BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 91-103, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

Araştırma Makalesi - Research Article

Üçgensel Matris Halkalarında İnvolutifler

Tuğba Petik[1*], Leman Hocaoğlu[2], Halim Özdemir[3]

Geliş / Received: 21/02/2020 ***Revize / Revised: 09/04/2020*** ***Kabul / Accepted: 13/04/2020***

ÖZ

R, 1 birimli, involutifleri sadece -1 ve 1 olan bir değişmeli halka ve M, elemanları R halkası üzerinden alınan bir üst üçgensel matrisler halkası olsun. Çalışmada, M halkasından alınan bir elemanın involutif olması için gerek ve yeter koşullar ortaya koyulmaktadır. Ayrıca, R sonlu olduğunda, M halkasındaki involutif elemanların sayısını belirleyen bir sonuç verilmekte ve bu sonuç sayısal örneklerle desteklenmektedir.

Anahtar Kelimeler- İnvolutif matrisler, Üçgensel matrisler, Matris halkaları

[1]*Sorumlu yazar iletişim: tpetik@sakarya.edu.tr (https://orcid.org/0000-0003-4635-2776)
Matematik Bölümü, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Sakarya, Türkiye
[2] İletişim: lemanhocaoglu06@hotmail.com (https://orcid.org/0000-0003-3561-0020)
Matematik Bölümü, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Sakarya, Türkiye
[3] İletişim: hozdemir@sakarya.edu.tr (https://orcid.org/0000-0003-4624-437X)
Matematik Bölümü, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Sakarya, Türkiye

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 91-103, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

Involutives in Triangular Matrix Rings

ABSTRACT

Let R be a commutative ring with identity 1 whose involutives are only -1 and 1, and let M be an upper triangular matrices ring which entries are taken from the ring R. In the study, it is established the necessary and sufficient conditions for an element taken from the ring M to be involutive. Also, when R is finite, it is given a result determining the number of involutive elements in the ring M, and this result is supported by numerical examples.

Keywords- Involutive matrices, Triangular matrices, Matrix rings

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316
e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

I. GİRİŞ

Çalışma boyunca ℕ, doğal sayılar kümesini, R, 1 birimli ve involutifleri (Bir $a \in R$ elemanına, eğer $a^2 = 1$ ise, R' nin bir involutif elemanı denir) sadece -1 ve 1 olan bir değişmeli halkayı, $|R|$, R' nin eleman sayısını, $\mathrm{T}(n,R)$ ve $\mathrm{T}(\infty,R)$, sırasıyla, elemanları R halkasından alınan, $n \in$ ℕ olmak üzere tüm $n \times n$ boyutlu üst üçgensel matrisler halkasını ve sonsuz boyutlu üst üçgensel matrisler halkasını gösterecektir.

Matris teorisinde çalışılan özel tipli matrislerin (idempotent, involutif, nilpotent, tripotent vs) lineer bileşimlerinin karakterizasyonu ile ilgili çalışmalara benzer olarak, halka teorisinde de özel tipli matrislerin karakterizasyonu ile ilgili çalışmalar son yıllarda ilgi görmeye başlamıştır. 1991'de Hannah ve O'Meara, matris halkalarında, eş zamanlı üçgenselleştirilebilir idempotent matrislerin çarpımını karakterize etmişlerdir [1]. 2005'de Fošner, keyfi bir F cismi üzerinde $n \times n$ boyutlu tüm üst üçgensel idempotent matrislerin kısmi sıralı kümelerinin otomorfizmalarını koruyarak ortogonalliğin genel formunu elde etmiştir [2]. 2009'da Chen ve arkadaşları, elemanları, değişmeli olan bir idempotent ve bir birimin toplamı olarak tek türlü ifade edilebilen halkalar üzerinde çalışmışlardır [3]. 2016 yılında Ying ve arkadaşları, ilk olarak bir R halkasının her elemanının değişmeli bir idempotent ve bir tripotentin toplamı olmasının gerek ve yeter koşullarını; daha sonra her elemanın değişmeli iki idempotentin toplamı veya farkı olması için gerek ve yeter koşulları ve son olarak her elemanın değişmeli iki tripotentin toplamı olması için gerek ve yeter koşulları araştırmışlardır [4]. 2017'de Sheibani ve Chen, her elemanı bir tripotent ve bir nilpotent matrisin toplamı olan bir matris halkası üzerinde çalışmalar yapmışlardır [5]. 2018'de Zhou, önce, her elemanı, biri diğerleri ile değişmeli olan bir nilpotent, bir idempotent ve bir tripotentin toplamı olan halkalar, daha sonra da her elemanı, biri diğerleri ile değişmeli olan bir nilpotent ve iki tripotentin toplamı olan halkalar üzerinde çalışmalar yapmıştır [6]. 2018'de Danchev, elemanları, üç tane değişmeli idempotentin toplamı veya iki tane değişmeli idempotentin negatif toplamı olan halkalar üzerinde çalışmıştır [7]. 2019'da Cheraghpour ve Ghosseiri, sonlu bir F cismi üzerindeki bir matris halkasının idempotentlerinin ve sıfır bölenlerinin sayısını hesaplamışlardır [8]. Yine 2019'da Tang ve arkadaşları, Hirano-Tomigana'nın her elemanı iki idempotentin toplamı olan halkalar üzerindeki çalışması (bkz: [11]) ve Seguins Pazzis'in pozitif karakteristikli bir cisim üzerindeki her matrisin, idempotentlerin toplamına ayrıştırılması ile ilgili çalışmasından (bkz: [12]) esinlenerek bir değişmeli halka üzerinde üç idempotent ve üç involutif matrisin toplamı olan matrisleri incelemişlerdir [9]. Yine 2019'da Hou, üçgensel matris halkalarında idempotentlerin yapısını inceleyerek, halkanın sonlu boyutlu olması durumunda bu tip matrislerin sayısını belirleyen bir sonuç elde etmiştir [10].

Bu çalışmada önce, üçgensel matris halkalarında idempotent matrislerin karakterizasyonuna benzer şekilde üçgensel matris halkalarında involutif matrislerin yapısı karakterize edilecektir. Sonra, halkanın sonlu boyutlu olması durumunda bu tip matrislerin sayısını ortaya koyan bir sonuç verilecektir.

II. ANA SONUÇLAR

M, $\mathrm{T}(n,R)$ veya $\mathrm{T}(\infty,R)$ olmak üzere $A=[a_{ij}]\in M$ bir involutif eleman olsun. $A^2 = \mathrm{I}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&a_{ii}^2 = 1,\\
&a_{ii}a_{i,i+1} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+1} = 0,\\
&a_{ii}a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+2} = 0,\\
&a_{ii}a_{i,i+3} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+3} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+3} + a_{i,i+3}a_{i+3,i+3} = 0,\\
&\vdots\\
&\sum_{l=0}^{k} a_{i,i+l}a_{i+l,i+k} = 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

elde edilir. R halkası değişmeli olduğundan, bu denklemler sisteminin aşağıdaki sisteme denk olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
&a_{ii}^2 = 1, \\
&\left(a_{ii} + a_{i+1,i+1}\right) a_{i,i+1} = 0, \\
&\left(a_{ii} + a_{i+2,i+2}\right) a_{i,i+2} + a_{i,i+1} a_{i+1,i+2} = 0, \\
&\left(a_{ii} + a_{i+3,i+3}\right) a_{i,i+3} + a_{i,i+1} a_{i+1,i+3} + a_{i,i+2} a_{i+2,i+3} = 0, \\
&\vdots \\
&\left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right) a_{i,i+k} + \sum_{l=1}^{k-1} a_{i,i+l} a_{i+l,i+k} = 0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1}$$

Böylece $A \in \mathrm{T}(2,R)$ ve $A^2 = \mathrm{I}$ olduğunda (1) denklemlerinden, $a \in R$ keyfi olmak üzere, A matrisinin

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$$

biçimlerinden birine sahip olduğu hemen görülür.

Benzer şekilde, $A \in \mathrm{T}(3,R)$ ve $A^2 = \mathrm{I}$ olduğunda, (1) denklemlerinden, $a,\ b \in R$ keyfi olmak üzere, A matrisinin

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & a & b \\ 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & b \\ 0 & \pm 1 & a \\ 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & a & \mp ab/2 \\ 0 & \mp 1 & b \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

biçimlerinden birine sahip olduğu kolaylıkla görülebilir.

Bu şekilde incelemeye devam edilerek, daha yüksek boyutlu durumlar karakterize edilebilir. Aşağıdaki teorem, sonlu veya sonsuz boyutlu üst üçgensel matris halkalarındaki bir elemanın involutif olması için sağlaması gereken özellikleri ortaya koyar.

Teorem 2.1. R, 1 birimli ve involutifleri sadece -1 ve 1 olan bir değişmeli halka olsun. M, $\mathrm{T}(\infty,R)$ veya $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathrm{T}(n,R)$ matris halkası olsun. Bu durumda, bir $A = [a_{ij}] \in M$ matrisinin involutif olmasının gerek ve yeter koşulları,

i) Tüm i ler için $a_{ii} \in \{-1,1\}$ ' dir,

ii) $i < j$ için eğer $a_{ii} = a_{jj}$ ise, bu durumda $a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad j = i+1 \\ -\dfrac{1}{4}\left(a_{ii} + a_{jj}\right) \displaystyle\sum_{l=i+1}^{j-1} a_{il} a_{lj} & , \quad j > i+1 \end{cases}$ dir,

iii) $i < j$ için eğer $a_{ii} \neq a_{jj}$ ise, a_{ij} keyfidir

özelliklerinin sağlanmasıdır.

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 91-103, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

İspat. $A=[a_{ij}]$, M 'nin bir involutif elemanı olsun. Önce gereklilik kısmını ispatlayalım. A matrisinin elemanlarının (1) denklem sistemini sağladığı açıktır. R 'nin involutifleri sadece -1 ve 1 olduğundan (1) denklem sisteminin ilk denkleminden $a_{ii}\in\{-1,1\}$ elde edilir. Böylece (i) şıkkı sağlanır.

A matrisinin ana köşegeninin üzerindeki üst köşegenlerin sayısı $k=j-i$ olsun. Üst köşegenlerde $i>j$ olduğundan $k\geq 1$ ' dir. (ii) ve (iii) şıklarının ispatı için, $k=1$ ve $k>1$ olması durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

$k=1$ *olması durumu.*

(1) denklem sisteminin ikinci denkleminden,

$$\left(a_{ii}+a_{i+1,i+1}\right)a_{i,i+1}=0 \tag{2}$$

eşitliğine sahibiz. $a_{ii}\in\{-1,1\}$ olduğu dikkate alınırsa (2) eşitliğinden; $a_{ii}=a_{i+1,i+1}$ ise, $a_{i,i+1}=0$ olduğu ve $a_{ii}\neq a_{i+1,i+1}$ ise, $a_{i,i+1}$ 'nin keyfi seçilebileceği görülür. Dolayısıyla $k=1$ için (ii) ve (iii) sağlanır.

$k>1$ *olması durumu.*

(1) sisteminin $(k+1)$. denklemini ele alalım:

$$\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k}+\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}=0 \tag{3}$$

$a_{ii}\in\{-1,1\}$ ve R ' nin birim elemanı 1 olduğundan, eğer $a_{ii}=a_{i+k,i+k}$ ise,

$$a_{ii}+a_{i+k,i+k}=4\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)^{-1}=\begin{cases}2, & a_{ii}=a_{i+k,i+k}=1 \text{ ise}\\ -2, & a_{ii}=a_{i+k,i+k}=-1 \text{ ise}\end{cases}$$

dir. Böylece (3)' ün her iki tarafı $\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)^{-1}$ ile çarpılarak $a_{i,i+k}=-\frac{1}{4}\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}$ elde edilir. Dolayısıyla (ii) şıkkı sağlanır.

Eğer $a_{ii}\neq a_{i+k,i+k}$ ise, bu durumda $a_{ii}+a_{i+k,i+k}=0$ olmalıdır. Dolayısıyla (3)' ten $\sum_{l=1}^{k-1}a_{i,i+l}a_{i+l,i+k}=0$ elde edilir.

Şimdi, $A(k,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,i+k}\\ & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,i+k}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{i+k,i+k}\end{pmatrix}$ matrisi, A matrisinin bir alt matrisi olsun. $A(k,i)$ matrisini

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 91-103, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

$$A(k,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha & a_{i,i+k} \\ \mathbf{0} & \beta & \gamma \\ 0 & \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix} \tag{4}$$

şeklinde bir blok matris olarak yazalım. A bir involutif matris olduğundan, A' nın köşegeni üzerindeki bir bloğu olan $A(k,i)$ matrisi de involutiftir. Dolayısıyla, $A(k-1,i)=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}$ ve $A(k-1,i+1)=\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}$ blok matrisleri de involutiftir.

$\left(A(k-1,i)\right)^2=\mathrm{I}$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix} a_{ii}{}^2 & \alpha_{ii}\alpha+\alpha\beta \\ \mathbf{0} & \beta^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

ve buradan

$$a_{ii}\alpha+\alpha\beta=\mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \beta^2=\mathrm{I} \tag{5}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\left(A(k-1,i+1)\right)^2=\mathrm{I}$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix} \beta^2 & \beta\gamma+\gamma a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

ve buradan,

$$\beta\gamma+\gamma a_{i+k,i+k}=\mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \beta^2=\mathrm{I} \tag{6}$$

elde edilir. Böylece, $a_{ii}{}^2=a_{i+k,i+k}^2=1$ olduğu dikkate alınarak, (5) ve (6)'dan

$$\mathrm{I}=\left(A(k,i)\right)^2=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & a_{ii}a_{i,i+k}+\alpha\gamma+a_{i,i+k}a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

bulunur.

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 91-103, 2020
BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316
e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

Hatırlanırsa, $\sum_{l=1}^{k-1} a_{i,i+l}a_{i+l,i+k} = 0$ idi. Bu eşitliğin sol yanındaki toplam $\alpha\gamma$ çarpımına eşittir. Dolayısıyla, (7)'deki matrisin $(1,\ k+1)$. elemanı $(a_{ii} + a_{i+k,i+k})a_{i,i+k}$' ya eşittir. Fakat, $a_{ii} + a_{i+k,i+k} = 0$ olduğundan, bu eleman doğrudan 0 olur. Dolayısıyla, $a_{i,i+k}$' nın değeri ne olursa olsun, $A(k,i)$ matrisi involutif olur. Böylece, (iii) şıkkı sağlanır.

Yeterlilik kısmının ispatına geçelim. A elemanı teoremin (i), (ii) ve (iii) şıklarındaki şartları sağlasın. Gösterilmesi gereken, A matrisinin involutif olduğudur. Bunun için k üzerinde tümevarım uygulayacağız.

Tüm $A(2,i)$ alt matrislerinin involutif olduğunu gösterelim.

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & a_{i,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & a_{i,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}a_{i,i+1} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+1} & a_{ii}a_{i,i+2} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i,i+2}a_{i+2,i+2} \\ 0 & a_{i+1,i+1}^2 & a_{i+1,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i+1,i+2}a_{i+2,i+2} \\ 0 & 0 & a_{i+2,i+2}^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

olup, (i) şıkkından dolayı $a_{ii}^2 = 1$, $a_{i+1,i+1}^2 = 1$, $a_{i+2,i+2}^2 = 1$ olduğu açıktır. $a_{ii} = a_{i+1,i+1}$ ise, (ii) şıkkından $a_{i,i+1} = 0$, dolayısıyla, $a_{ii}a_{i,i+1} + a_{i,i+1}a_{i+1,i+1} = 0$' dır. $a_{ii} \neq a_{i+1,i+1}$ ise, $a_{ii} + a_{i+1,i+1} = 0$, dolayısıyla $(a_{ii} + a_{i+1,i+1})a_{i,i+1} = 0$ olur. Böylece (8)'in (1,2). elemanı 0 olur.

Benzer şekilde,

$a_{i+1,i+1} = a_{i+2,i+2}$ ise, (ii) şıkkından, $a_{i+1,i+2} = 0$ ve dolayısıyla $a_{i+1,i+1}a_{i+1,i+2} + a_{i+1,i+2}a_{i+2,i+2} = 0$ olur. $a_{i+1,i+1} \neq a_{i+2,i+2}$ ise, $a_{i+1,i+1} + a_{i+2,i+2} = 0$ ve buradan yine, $(a_{i+1,i+1} + a_{i+2,i+2})a_{i+1,i+2} = 0$ olur. Böylece (8)'in (2,3). elemanı 0 olur.

Şimdi, (1,3). elemanı için inceleme yapalım. $a_{ii} = a_{i+2,i+2}$ ve $a_{ii} \neq a_{i+2,i+2}$ durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

$a_{ii} = a_{i+2,i+2}$ *olması durumu.*

Bu durumda, (ii) şıkkından,

$$a_{i,i+2} = -\frac{1}{4}(a_{ii} + a_{i+2,i+2})\sum_{l=i+1}^{i+1} a_{il}a_{l,i+2} = -\frac{1}{4}(a_{ii} + a_{i+2,i+2})a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} \tag{9}$$

olur. Şimdi, $a_{ii} = a_{i+2,i+2} = 1$ ise, (9)'dan $a_{i,i+2} = -\frac{1}{4}2a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$ yani,

$$a_{i,i+2} = -\frac{1}{2}a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} \tag{10}$$

elde edilir. Öte yandan

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

$$a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2}=(a_{ii}+a_{i+2,i+2})a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=2a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$$

dir. Buradan, (10) dikkate alınırsa, $a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2}=-a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=0$ olur.

Benzer şekilde, $a_{ii}=a_{i+2,i+2}=-1$ ise, (9)'dan $a_{i,i+2}=-\frac{1}{4}(-2)a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$, yani

$$a_{i,i+2}=\frac{1}{2}a_{i,i+1}a_{i+1,i+2} \tag{11}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2}=(a_{ii}+a_{i+2,i+2})a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=-2a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}$$

olup, (11) dikkate alınırsa, $a_{ii}a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+2}a_{i+2,i+2}=-a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=0$ bulunur. Böylece, (8)'in (1,3). elemanının 0 olduğu görülür.

$a_{ii}\neq a_{i+2,i+2}$ *olması durumu.*

Bu durumda, $a_{ii}+a_{i+2,i+2}=0$ olmakla birlikte iki durum söz konusudur:

1. $a_{ii}=a_{i+1,i+1}$ *olması durumu.*

Bu durumda, (ii) şıkkından $a_{i,i+1}=0$ olduğundan, (8)'in (1,3). elemanı $(a_{ii}+a_{i+2,i+2})a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=0$ şeklinde olur.

2. $a_{ii}\neq a_{i+1,i+1}$ *olması durumu.*

Bu durumda, $a_{i+1,i+1}=a_{i+2,i+2}$ ise (ii) şıkkından $a_{i+1,i+2}=0$ olduğundan $(a_{ii}+a_{i+2,i+2})a_{i,i+2}+a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}=0$ olur.

Not edelim ki $a_{ii}\neq a_{i+2,i+2}$ ve $a_{ii}\neq a_{i+1,i+1}$ iken $a_{i+1,i+1}\neq a_{i+2,i+2}$ durumu imkansız durumdur. Böylece, her durumda, (8)'in (1,3). elemanı daima sıfırdır. Sonuç olarak, $A(2,i)$ matrisi involutiftir.

Şimdi, kabul edelim ki $A(2,\ i),\ A(3,\ i),\ \ldots,A(k-1,\ i)$ matrisleri tüm i ler için involutif olsun. İspatlamak istediğimiz $A(k,i)$' nin de her i için involutif olduğudur.

$A(k,i)$ matrisi, (4) biçiminde yazılabildiğinden,

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 91-103, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

$$\left(A(k,i)\right)^2=\begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}\alpha+\alpha\beta & \alpha\gamma+\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} \\ \mathbf{0} & \beta^2 & \beta\gamma+a_{i+k,i+k}\gamma \\ 0 & \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}^2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

dir. Kabulümüze göre

$$\left(A(k-1,\ i)\right)^2=\begin{pmatrix} a_{ii} & \alpha \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a_{ii}^2 & a_{ii}\alpha+\alpha\beta \\ \mathbf{0} & \beta^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$$

ve (13)

$$\left(A(k-1,\ i+1)\right)^2=\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k} \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \beta^2 & \beta\gamma+\gamma a_{i+k,i+k} \\ \mathbf{0} & a_{i+k,i+k}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} &a_{ii}\alpha+\alpha\beta=\mathbf{0} \\ &\beta\gamma+\gamma a_{i+k,i+k}=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{14}$$

elde edilir. (14) eşitliklerinin ilki γ ile sağdan, ikincisi α ile soldan çarpılırsa,

$$\begin{aligned} &a_{ii}\alpha\gamma+\alpha\beta\gamma=\mathbf{0} \\ &\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma a_{i+k,i+k}=\mathbf{0} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\alpha\beta\gamma=-a_{ii}\alpha\gamma=-\alpha\gamma a_{i+k,i+k} \tag{15}$$

olur.

$a_{ii}\neq a_{i+k,i+k}$ ise, (15)'e göre $\alpha\gamma=0$ olmalıdır. Ayrıca $a_{ii}+a_{i+k,i+k}=0$ dır. Böylece $\left(A(k,\ i)\right)^2$ nin $(1,k+1)$. elemanı

$$\alpha\gamma+\left(a_{ii}+a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k}=0 \tag{16}$$

olur. Ayrıca, (13)'ten

$$\beta^2=\mathrm{I},\ a_{ii}^2=1\ \text{ ve }\ a_{i+k,i+k}^2=1 \tag{17}$$

dir. Öte yandan $a_{ii}=a_{i+k,i+k}$ ise, (ii) şıkkının ikinci durumundan,

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 91-103, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

$$a_{ii} = a_{i+k,i+k} = 1 \text{ ise } a_{i,i+k} = \frac{\alpha\gamma}{-2}$$

ve

$$a_{ii} = a_{i+k,i+k} = -1 \text{ ise } a_{i,i+k} = \frac{\alpha\gamma}{2}$$

bulunur. Yani, $a_{ii} = a_{i+k,i+k} = 1$ ise

$$\alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} = \alpha\gamma + 2a_{i,i+k} = \alpha\gamma + 2\frac{\alpha\gamma}{-2} = 0 \tag{18}$$

ve $a_{ii} = a_{i+k,i+k} = -1$ ise

$$\alpha\gamma + \left(a_{ii} + a_{i+k,i+k}\right)a_{i,i+k} = \alpha\gamma - 2a_{i,i+k} = \alpha\gamma - 2\frac{\alpha\gamma}{2} = 0 \tag{19}$$

olduğu görülür. Böylece, (12)'deki matris ile birlikte, (14), (16), (17), (18) ve (19) eşitlikleri dikkate alınarak $\left(A\left(k,\ i\right)\right)^2 = \mathrm{I}$ bulunur.

Sonuç olarak, A' nın üst üçgensel bir matris halkasında bir involutif matris olması için gerek ve yeter koşullar kümesinin (i), (ii) ve (iii) olması gerektiği görülmüş olur.

Sonuç 2.2. R, 1 birimli, involutifleri sadece -1 ve 1 olan bir değişmeli halka olsun. $|R|$, R halkasındaki eleman sayısını göstersin. Bu durumda, n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\mathrm{T}(n,R)$ matris halkasındaki involutiflerin sayısı,

$$\mathrm{N}\ (n,R) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{\mathrm{k}!(n-k)!}|R|^{k(n-k)}$$

ifadesi ile verilir.

İspat. Teorem 2.1'e göre, $\mathrm{T}(n,R)$'deki üst üçgensel involutif matrislerin sayısı, tam olarak $a_{ii} \neq a_{jj}$ olan köşegen eleman çiftine bağlıdır. Bu olasılıkları hesaplamak için, $d_i \in \{-1,1\}$, $i = 1,...,n$, olmak üzere, $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ vektörünü tanımlayalım. Δ ile, $i < j$ ve $d_i \neq d_j$ olmak üzere (d_i, d_j) çiftlerinin sayısını

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 91-103, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

gösterelim. $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$ için $f_i, g_i \in \{0,1\}$ ve $f_i \neq g_i$ olmak üzere $d = f - g$ olarak yazılabilir. Δ'nın aynı zamanda $i < j$ ve $f_i \neq f_j$ olan (f_i, f_j) ikililerinin sayısına da eşit olduğunu görmek kolaydır.

F, i. satır ve j. sütundaki elemanı,

$$f_i(1-f_j)+(1-f_i)f_j = \begin{cases} 1, & f_i \neq f_j \\ 0, & f_i = f_j \end{cases} \tag{20}$$

olan $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. (20)'nin sol tarafı, e vektörü, tüm elemanları 1 olan n-boyutlu bir vektör olmak üzere, $F = f(e-f)' + (e-f)f'$ olarak yazılabileceğini gösterir. $e'Fe$, F' nin elemanları toplamı, $k = e'f$, f'deki elemanların toplamı ve $n = e'e$ olduğu açıktır.

Δ, F'deki elemanların toplamının yarısına eşit olduğundan,

$$\Delta = \frac{e'Fe}{2} = \frac{e'[f(e-f)'+(e-f)f']e}{2} = \frac{(e'f)[(e-f)'e]+[e'(e-d)](d'e)}{2} = k(n-k)$$

elde edilir. Δ, f' de görünen 0 ve 1 elemanlarının; dolayısıyla d' de görünen 1 ve -1 elemanlarının sırasından bağımsızdır. Sonuç olarak, ana köşegen üzerinde k tane 1 elemanının ve $n-k$ tane -1 elemanının her bir düzenlemesi, $|R|^{k(n-k)}$ tane üst üçgensel involutif matrise götürür. Böyle bir düzenlemeyi seçmek için $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ tane yol olduğundan ispat tamamlanır.

(1) denklem sisteminin altında verilen 2×2 boyutlu matris örneklerine bakıldığında, ana köşegen üzerinde 2 tane 1 elemanını içeren 1 tane; 2 tane -1 elemanını içeren 1 tane ve 1 tane 1 elemanını içerip, 1 tane de -1 elemanını içeren 2 tane matris vardır. Fakat, bu son iki matris, üst köşegen üzerinde 1 tane keyfi eleman içerir. Yani toplamda $2+2|R|$ tane 2×2 boyutlu üst üçgensel involutif matris vardır.

Öte yandan, Sonuç 2.2' ye göre, 2×2 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin sayısının

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\ (2,R) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{2!}{k!(2-k)!} |R|^{k(2-k)} \\ &= 2+2|R| \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Bu durum, 2×2 boyutlu matrisler için verilen örneklerin, Sonuç 2.2 ile uyumlu olduğunu gösterir.

Benzer şekilde, 3×3 boyutlu matrisler için verilen örneklere bakıldığında, ana köşegen üzerinde 2 tane -1 elemanını ve 1 tane 1 elemanını içeren matris sayısı 3 (üst köşegenler üzerinde ikişer tane keyfi değişken içeren); 1 tane -1 elemanını ve 2 tane 1 elemanını içeren matris sayısı 3 (üst köşegenler üzerinde ikişer tane keyfi değişken içeren); 3 tane 1 elemanını içeren matris sayısı 1 ve 3 tane -1 elemanını içeren matris sayısı 1 dir. Yani, 3×3 boyutlu üst üçgensel involutif matrislerin sayısı $3|R|^2+3|R|^2+1+1=2+6|R|^2$ dir.

Öte yandan, Sonuç 2.2'ye göre,

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\ (3,R) &= \sum_{k=0}^{3}\frac{3!}{k!(3-k)!}|R|^{k(3-k)} \\ &= 2+6|R|^2 \end{aligned}$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, verilen örnekler, Sonuç 2.2' yi doğrular niteliktedir.

NOT: Sonuç 2.2' deki $k(n-k)$ ifadesi, ana köşegen üzerinde k tane 1' in, $n-k$ tane -1' in bulunduğu matrislerin üst köşegenleri üzerindeki keyfi değişken sayısını ifade eder. Ayrıca 2×2 boyutlu üst üçgensel involutiflerin 4 farklı formu, 3×3 boyutlu üst üçgensel involutiflerin 8 farklı formunun mevcut olduğu görülmektedir. Bu sayıların, 2^2 ve 2^3 sayılarından ibaret olduğuna dikkat edelim. Burada, tabandaki 2 sayısı $\{-1,1\}$ kümesinin eleman sayısını, kuvvetlerdeki sayılar ise, matrislerin mertebesini belirtir. Bu tip örnekler, $n>3$ tamsayıları için de genişletilebilir.

TEŞEKKÜR

Yazarlar, makalenin sunumuna katkı sağlayan yapıcı ve geliştirici önerileri ve değerli yorumları için hakemlere teşekkür etmektedirler.

KAYNAKLAR

[1] Hannah J., O'Meara K.C. (1991). Products of Simultaneously Triangulable Idempotent Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 149, 185-190.

[2] Fošner, A. (2005). Automorphisms of the poset of upper triangular idempotent matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 53(1), 27-44.

[3] Chen, J., Wang, Z., Zhou, Y. (2009). Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit that commute. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213, 215–223.

[4] Ying, Z., Koşan, T., and Zhou,Y. (2016). Rings in which Every Element is a Sum of Two Tripotents. *Canad. Math. Bull.*, 59(3), 661–672.

[5] Sheibani, M. and Huanyin, C. (2017). *Rings over which every matrix is the sum of a tripotent and a nilpotent*. https://arxiv.org/abs/1702.05605

[6] Zhou, Y. (2018). Rings in which elements are sums of nilpotents, idempotents and tripotents. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(1), 1850009 (7 pages).

[7] Danchev, P.V. (2018). Rings whose elements are sums of three or minus sums of two commuting idempotents, *Albanian Journal of Mathematics*, 12(1), 3–7.

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.687316

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

[8] Cheraghpour, H. and Ghosseiri, Nader M. (2019). On the idempotents, nilpotents, units and zerodivisors of finite rings, *Linear and Multilinear Algebra*, 67(2), 327–336.

[9] Tang, G., Zhou, Y., and Su, H. (2019). Matrices over a commutative ring as sums of three idempotents or three involutions, *Linear and Multilinear Algebra*, 67(2), 267–277.

[10] Hou, X. Idempotents in Triangular Matrix Rings, Linear and Multilinear Algebra, https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1596223

[11] Hirano, Y. and Tominaga, H. (1988). Rings in which every element is the sum of two idempotents. *Bull. Austral. Math. Soc*., 37(2), 161-164.

[12] de Seguins C. Pazzis. (2010). On sums of idempotent matrices over a field of positive characteristic, *Linear Algebra Appl*., 433(4), 856–866.