Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **20** (2020) 021302 (213-221) AKU J. Sci. Eng. **20** (2020) 021302 (213-221)

DOI: 10.35414/akufemubid.685429

Araştırma Makalesi / Research Article

Kesirli Mertebe Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Ayrık Homotopi Perturbasyon Metodu ile Çözümü

Figen ÖZPINAR[1]

[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Bolvadin Meslek Yüksekokulu, Büro Yönetimi ve Yönetici Asistanlığı, Afyonkarahisar.*

e-posta: fozpinar@aku.edu.tr ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-7428-498

Geliş Tarihi: 07.02.2020 Kabul Tarihi: 13.04.2020

Anahtar kelimeler
Ayrık homotopi perturbasyon metodu; Caputo kesirli mertebe türev; Kesirli mertebe ayrık difüzyon denklemi; Kesirli mertebe ayrık Schrödinger denklemi; Kesirli mertebe ayrık Burgers denklemi

Öz

Bu çalışma, lineer ve lineer olmayan zaman kesirli mertebeli kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için ayrık uzak biçimli ayrık homotopi perturbasyon metodunu geliştirmiştir. Kesirli mertebe türevler Caputo anlamında göz önüne alınmıştır. Bu metodun başarısı ve uygulanabilirliği bazı örnek problemler ile gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar kesirli mertebe bir olduğunda, tam çözümler ile iyi bir uyumluluk göstermiştir. Bu çalışmada gösterilen metodun kesirli mertebe hesabındaki benzer problemleri çözmesi beklenmektedir.

Solution of Fractional Order Partial Differential Equations by Discrete Homotopy Perturbation Method

Keywords
Discrete homotopy perturbation method; Caputo fractional derivative; Fractional discrete diffusion equation; Fractional discrete Schrödinger equation; Fractional discrete Burgers' equation

Abstract

This work is developed the discrete homotopy perturbation method with a space discrete version to solve the linear and nonlinear time derivative fractional partial differential equations. The fractional derivatives are considered in the sense of Caputo. The success and applicability of this method has been demonstrated by some sample problems. When fractional order is unit, obtained results are good agreement with the exact solutions. The method demonstrated in this study is expected to solve similar problems in fractional calculus.

1. Giriş

Kesirli mertebe türev teorisi, üç yüz yıldır sadece matematikçiler için yararlı olan teorik matematik alanında gelişme göstermiştir.

Son yirmi-otuz yıldır birçok araştırmacı kesirli mertebe modellerin önceden kullanılan tamsayı mertebe modellerden daha yeterli olduklarına işaret etmişlerdir. Kesirli mertebe türevler, çeşitli materyallerin ve işlemlerin hafızasını ve kalıtsal özelliklerini tanımlamak için mükemmel bir araçtır. Kesirli mertebe türevlerin avantajları, gerçek malzemelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin modellenmesinde, kayaların reolojik özelliklerinin tanımlanmasında ve diğer birçok alanda öne çıkar.

Çoğu kesirli mertebe diferensiyel denklemin analitik çözümleri olmadığından, bu denklemlerin çözümlerini elde etmek için yaklaşık ve sayısal metotlar kullanılır. Homotopi perturbasyon metodu(HPM) lineer/lineer olmayan problemlere analitik yaklaşım sağlamak için oldukça yeni bir yaklaşımdır. HPM ilk olarak 1998 yılında He tarafından önerilmiştir. HPM uygulaması birçok araştırmada kullanılmıştır(He 1998, He 2000, He 2003, He 2009, Maitama 2016, Zhu *et al.* 2010, Zhu and Ding 2014). Son yıllarda, ayrık HPM(AHPM) Burgers denkleminin ve ısı denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için kullanıldı(Zhu and Ding 2014). Ayrıca ayrık Adomian ayrışım metodu ve ayrık homotopi analiz metodu kesirli mertebe kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanıldı (Dhaigude and Birajdar 2014, Özpınar 2018).

Bu çalışmada, kesirli mertebe ayrık difüzyon, ayrık Schrödinger ve ayrık Burgers denklemlerinin sayısal çözümünü elde etmek için AHPM kullanıldı.

2. Ön Bilgiler ve Gösterimler

2.1. Kesirli Mertebe Analizi

Tanım 1 (Luchko and Gorenflo 1999): $f_1(x) \in C[0,\infty)$ olmak üzere, $f(x) = x^p f_1(x)$ olacak biçimde $p > \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ reel sayısı varsa $f(x)$, $x > 0$ reel fonksiyonu C_α uzayındadır denir.

Tanım 2 (Luchko and Gorenflo 1999): $f^m \in C_\alpha$ ise $f(x)$, $x > 0$ fonksiyonu C_α^m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ uzayındadır denir.

Tanım 3 (Podlubny 1999): $f \in C_\alpha$ ve $\alpha \geq -1$ ise $f(x,t)$'nin t 'ye göre α mertebe Riemann-Liouville kesirli mertebe integrali

$$J^\alpha f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(x,\tau) d\tau, \qquad t > 0,\ \alpha > 0.$$

ile tanımlanır.

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1) t^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)},$$

J^α Riemann-Liouville operatörünün önemli bir özelliğidir .

Tanım 4 (Caputo 1967). $\alpha > 0$ sayısından büyük en küçük tamsayı m olmak üzere $f(x,t)$'nin t'ye göre α mertebe Caputo kesirli mertebe türevi

$$D_t^\alpha f(x,t) = \frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m f}{\partial t^m} d\tau, & m-1 < \alpha < m, \\ \dfrac{\partial^m f(x,t)}{\partial t^m}, & \alpha = m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Riemann-Liouville operatörü ve Caputo kesirli mertebe türev operatörü arasında iyi bilinen bağıntılar aşağıda verildiği gibidir:

$$D^\alpha\left(J^\alpha f(x,t)\right) = f(x,t),$$

$$\begin{aligned} J^\alpha\left(D^\alpha f(x,t)\right) &= J^\alpha\left(J^{m-\alpha} f^{(m)}(x,t)\right) \\ &= J^m f^{(m)}(x,t) \\ &= f(x,t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(x,0) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Tanım 5 (Podlubny 1999): $z \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha) > 0$ olmak üzere, bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+1)}$$

ile tanımlanır.

2.2. Ayrık Homotopi Perturbasyon Metodu

Bu metodu açıklamak için; A, genel fark operatörü olmak üzere

$$A\left(u_j(t)\right) - f_j(t) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

j 'ye göre genel fark denklemini göz önüne alalım. $\Delta x = h$ ve $u(x,t) = u(j\Delta x, t)$ fonksiyonunun $u_j(t)$ ile gösterilen bir ayrık fonksiyon olduğunu kabul edelim. Benzer biçimde $f(x,0) = f(j\Delta x)$, f_j ile gösterilen ayrık fonksiyondur.

A operatörü; L lineer ve N lineer olmayan operatör olarak iki parçaya ayrılabilir. Böylece (1) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$L\left(u_j(t)\right) + N\left(u_j(t)\right) - f_j(t) = 0. \qquad (2)$$

Homotopi tekniğini kullanarak, (2) denklemi için

$$H\left(v_j(t;p),p\right) = (1-p)\left[L\left(v_j(t;p)\right) - L\left(u_{j,0}(t)\right)\right] + p\left[A\left(v_j(t;p)\right) - f_j(t)\right] = 0 \quad (3)$$

veya

$$H\left(v_j(t;p),p\right) = L\left(v_j(t;p)\right) - L\left(u_{j,0}(t)\right) + p\left[N\left(v_j(t;p)\right) - f_j(t) + L\left(u_j(0)\right)\right] = 0$$

biçiminde bir homotopi kurulur. Burada $p \in [0,1]$ gömme parametresi ve $u_{j,0}(t)$ orijinal denklemin çözümüne bir başlangıç yaklaşımıdır. $p = 0$ olduğunda (3) denklemi lineerleştirilmiş denklem olur:

$$H\left(v_j(t;0),0\right) = L\left(v_j(t;0)\right) - L\left(u_{j,0}(t)\right) = 0 \quad (4)$$

ve $p = 1$ olduğunda (3) denklemi orijinal denklem olur:

$$H\left(v_j(t;1),1\right) = A\left(v_j(t;1)\right) - f_j(t) = 0. \qquad (5)$$

p'nin sıfırdan bire değişmesi, $v_j(t;p)$'nin başlangıç koşulu $u_{j,0}(t)$'den orijinal denklemin çözümü olan $u_j(t)$'ye değişmesidir. Topolojide bu durum homotopi olarak adlandırılır.
(3) denkleminin çözümünün p'nin bir serisi olarak yazılabileceğini kabul edelim:

$$v_j(t;p) = v_{j,0}(t) + p v_{j,1}(t) + p^2 v_{j,2}(t) + \cdots \; . \quad (6)$$

$p = 1$ alarak, (1) denkleminin bir yaklaşık çözümü

$$u_j(t) = \lim_{p\to 1} v_j(t;p) = v_{j,0}(t) + v_{j,1}(t) + v_{j,2}(t) + \cdots \qquad (7)$$

olarak elde edilebilir.

3. Örnekler

Örnek 1. İlk olarak aşağıdaki zaman kesir mertebeli ayrık difüzyon denklemini

$$D_t^\alpha u_j(t) = D_h^2 u_j(t) + jhD_h u_j(t) + u_j(t), \quad 0 < \alpha \le 1, \qquad (8)$$

$$u_j(0) = jh \qquad (9)$$

başlangıç koşuluyla göz önüne alalım.

$D_h u_j(t)$ ve $D_h^2 u_j(t)$;

$$D_h u_j(t) = \frac{u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t)}{2h},$$
$$D_h^2 u_j(t) = \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2}$$

ile tanımlanan standart merkezi farklardır.
(8)-(9) başlangıç değer problemi

$$u(x,0) = x,$$

başlangıç koşullu

$$D_t^\alpha u(x,t) = u_{xx}(x,t) + x u_x(x,t) + u(x,t), \quad 0 < \alpha \le 1\,,$$

difüzyon denklemi için başlangıç değer probleminin ayrık biçimidir. Burada $D_t^\alpha u(x,t)$, α mertebe Caputo kesirli mertebe türevdir. .
(8)-(9) başlangıç değer problemini AHPM ile çözmek için aşağıdaki homotopi kurulur:

$$(1-p)\left[D_t^\alpha v_j(t;p) - D_t^\alpha u_{j,0}(t)\right] + p[D_t^\alpha v_j(t;p) - D_h^2 v_j(t;p) - jhD_h v_j(t;p) - v_j(t;p)] = 0. \qquad (10)$$

(6)'yı (10)'da yazarak ve p'nin aynı dereceli terimlerinin katsayıları karşılaştırılarak:

$$p^0 : \; D_t^\alpha v_{j,0}(t) - D_t^\alpha u_{j,0}(t) = 0,$$

$$p^1 : D_t^\alpha v_{j,1}(t) + D_t^\alpha u_{j,0}(t) - D_h^2 v_{j,0}(t) \\ -jhD_h v_{j,0}(t) - v_{j,0}(t) = 0,$$

$$p^2 : D_t^\alpha v_{j,2}(t) - D_h^2 v_{j,1}(t) - jhD_h v_{j,1}(t) - v_{j,1}(t) \\ = 0,$$

$$\vdots$$

$$p^\ell : D_t^\alpha v_{j,\ell}(t) - D_h^2 v_{j,\ell-1}(t) - jhD_h v_{j,\ell-1}(t) \\ -v_{j,\ell-1}(t) = 0$$

elde edilir.

Başlangıç değeri

$$v_{j,0}(t) = u_{j,0}(t) = u_j(0) = jh$$

olduğunda,

$$v_{j,1}(t) = (jh)\frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad ,$$

$$v_{j,2}(t) = (jh)\frac{2^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \quad ,$$

$$v_{j,3}(t) = (jh)\frac{2^3 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \quad ,$$

$$\vdots$$

$$v_{j,n}(t) = (jh)\frac{2^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \quad .$$

sonuçları elde edilir. (7)'den

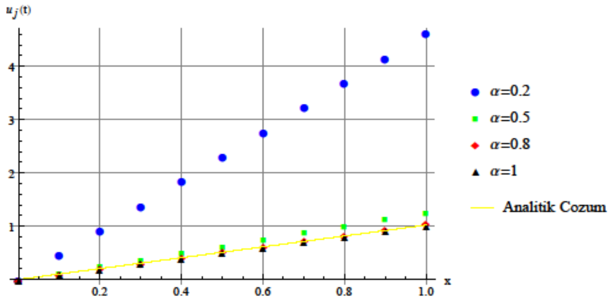
$$u_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(jh)\frac{2^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} = (jh)E_\alpha(2t^\alpha)$$

elde edilir. Burada E_α Mittag-Leffler fonksiyonudur.

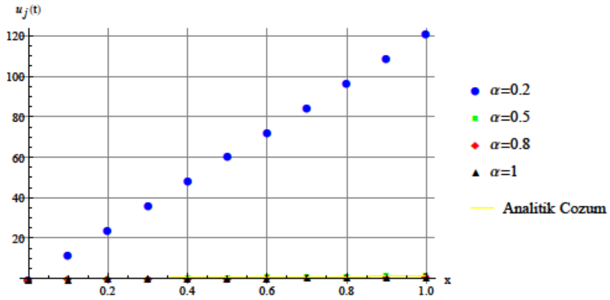
$$u(x,t) = xE_\alpha(2t^\alpha).$$

Sürekli biçimin analitik çözümüdür.

Şekil 1, α'nın farklı değerleri için $u(x,t)$'nin AHPM yaklaşık çözümlerini gösterir.



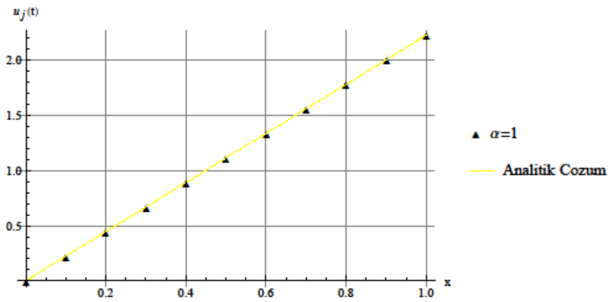
(a) *t = 0.01*



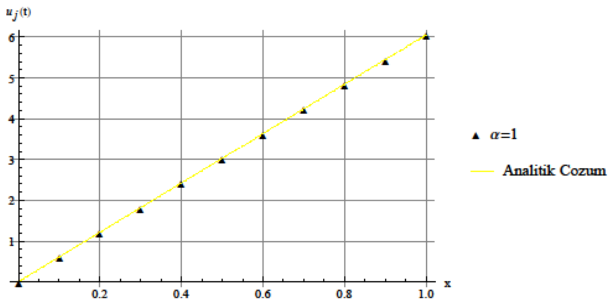
(b) *t = 0.1*

Şekil 1. $u(x,t)$ 'nin AHPM ile yaklaşık çözümünün sayısal gösterimi.

Şekil 2'de $\alpha = 1$ olduğunda, metodun analitik çözümle iyi bir uyumu olduğunu görürüz.



(a) *t = 0.4*



(b) *t = 0.9*

Şekil 2. $\alpha = 1$ olduğunda, AHPM ile elde edilen $u(x,t)$'nin sayısal çözümü ile analitik çözümün karşılaştırması.

Örnek 2. Bu örnekte, aşağıdaki lineer olmayan kesirli mertebe ayrık Schrödinger denklemini

$$iD_t^\alpha u_j(t) + D_h^2 u_j(t) + q\left|u_j(t)\right|^2 u_j(t) = 0,$$

$$j \in \mathbb{Z}, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{11}$$

$$u_j(0) = e^{ijkh} \tag{12}$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alalım.

(11)-(12) başlangıç değer problemi

$$u(x,0) = e^{ikx}$$

başlangıç koşullu

$$iD_t^\alpha u(x,t) + u_{xx}(x,t) + q|u(x,t)|^2 u(x,t) = 0,$$

$$t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

Schrödinger denklemi için başlangıç değer probleminin ayrık biçimidir.

$\left|u_j(t)\right|^2 u_j(t) = u_j^2(t)\bar{u}_j(t)$ alacağız.

(11) denklemi için AHPM kullanarak aşağıdaki homotopi kurulabilir:

$$\begin{aligned}(1-p)&\left[D_t^\alpha v_j(t;p) - D_t^\alpha u_{j,0}(t)\right]\\ &+p\left[D_t^\alpha v_j(t;p) - iD_h^2 v_j(t;p) - iqv_j^2(t;p)\bar{v}_j(t;p)\right]\\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

(6)'yı (13)'te yazıp, p'nin aynı dereceli terimlerinin katsayılarını karşılaştırarak:

$$p^0 : \; D_t^\alpha v_{j,0}(t) - D_t^\alpha u_{j,0}(t) = 0,$$

$$p^1 : \; D_t^\alpha v_{j,1}(t) + D_t^\alpha u_{j,0}(t) - iD_h^2 v_{j,0}(t) - iqv_{j,0}^2(t)\bar{v}_{j,0}(t) = 0,$$

$$p^2 : \; D_t^\alpha v_{j,2}(t) - iD_h^2 v_{j,1}(t) - iq\left[2v_{j,0}(t)v_{j,1}(t)\bar{v}_{j,0}(t) + v_{j,0}^2(t)\bar{v}_{j,1}(t)\right] = 0,$$

$$\begin{aligned}p^3 : \; D_t^\alpha v_{j,3}(t) - iD_h^2 v_{j,2}(t) &-iq\left[2v_{j,0}(t)v_{j,2}(t)\bar{v}_{j,0}(t) + v_{j,1}^2(t)\bar{v}_{j,0}(t)\right.\\ &+ 2v_{j,0}(t)v_{j,1}(t)\bar{v}_{j,1}(t)\\ &\left.+ v_{j,0}^2(t)\bar{v}_{j,2}(t)\right] = 0,\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$p^\ell : \; D_t^\alpha v_{j,\ell}(t) - iD_h^2 v_{j,\ell-1}(t) - iq\left[\sum_{m=0}^{l-1}\sum_{n=0}^{l-m-1} v_{j,m}(t)\, v_{j,n}(t)\bar{v}_{j,l-n-m-1}(t)\right] = 0$$

elde ederiz.

Başlangıç değeri

$$v_{j,0}(t) = u_{j,0}(t) = u_j(0) = e^{ijkh}$$

olduğunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$v_{j,1}(t) = -i\omega e^{ijkh}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,,$$

$$v_{j,2}(t) = -\omega^2 e^{ijkh}\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\,,$$

$$v_{j,3}(t) = i\omega^3 e^{ijkh}\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\left[1 + q\frac{\Gamma(2\alpha+1) - 2\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2}{\omega\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2}\right],$$

$$\vdots$$

Burada $\omega = (4/h^2)sin^2(kh/2) - q$ dir.

(7)'den

$$u_j(t) = e^{ijkh}\left\{1 - \frac{i\omega t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\omega^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{i\omega^3 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\left[1 + q\frac{\Gamma(2\alpha+1) - 2\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2}{\omega\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2}\right] + \cdots\right\}. \tag{14}$$

sonucunu elde ederiz.

$\alpha = 1$ özel durumu için ayrık Schrödinger denkleminin tam çözümü olan

$$u_j(t) = e^{ijkh}\left\{1 - i\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \frac{i\omega^3 t^3}{6} + \cdots\right\}$$

$$= e^{ijkh}\left\{1 + \frac{(-i)\omega t}{1!} + \frac{(-i)^2\omega^2 t^2}{2!} + \frac{(-i)^3\omega^3 t^3}{3!} + \cdots\right\}$$

$$= e^{ijkh}e^{-i\omega t}$$

$$= e^{i(jkh-\omega t)}$$

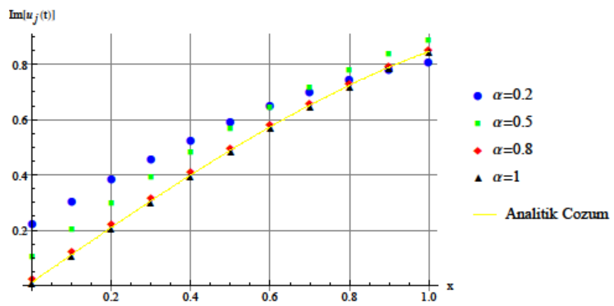
sonucu elde edilir (Bratsos *et al*. 2008).

k dalga sayısı ve ω frekansı göstermek üzere sürekli biçim;

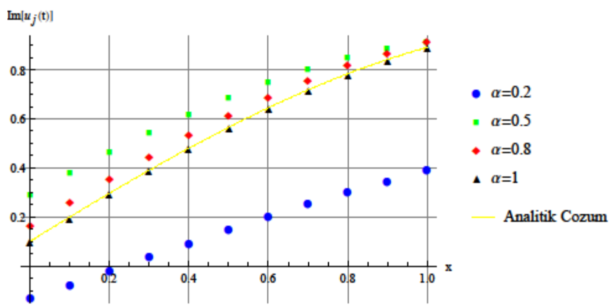
$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

düzlemsel dalga çözümüne sahiptir.

Şekil 3 ve Şekil 4, $k = 1$ ve $q = 2$ için , α'nın farklı değerleri için $u(x,t)$'nin AHPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerini gösterir.

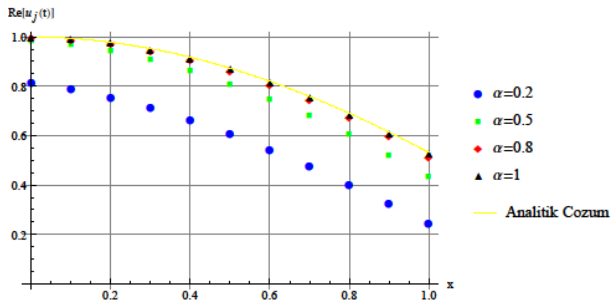


(a) *t = 0.01*

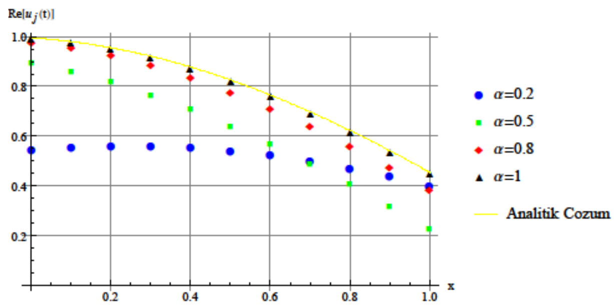


(b) *t = 0.1*

Şekil 3. AHPM ile elde edilen $u(x,t)$'nin yaklaşık çözümünün sanal kısmının sayısal gösterimi.



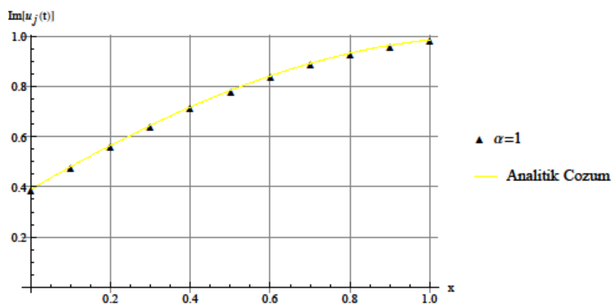
(a) *t = 0.01*



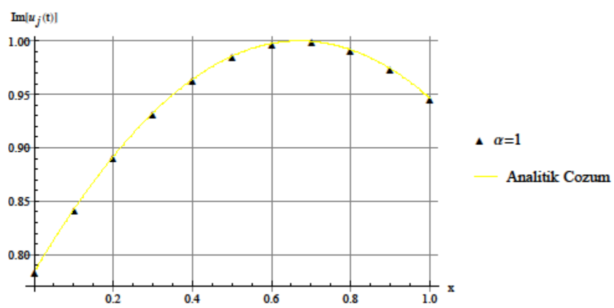
(b) *t = 0.1*

Şekil 4. AHPM ile elde edilen $u(x,t)$'nin yaklaşık çözümünün reel kısmının sayısal gösterimi.

Şekil 5 ve Şekil 6'da ise $\alpha = 1$ olduğunda, metodun analitik çözümle iyi bir uyumu olduğunu görürüz.

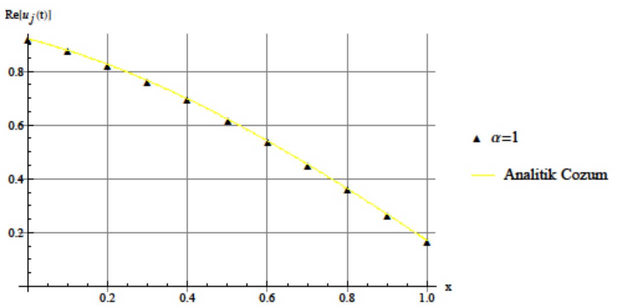


(a) *t = 0.4*

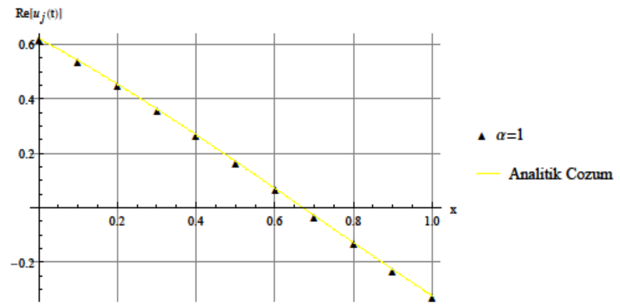


(b) *t = 0.9*

Şekil 5. $\alpha = 1$ olduğunda, AHPM ile elde edilen $u(x,t)$'nin sayısal çözüm ile analitik çözümün sanal kısımlarının karşılaştırması.



(a) *t = 0.4*



(b) *t = 0.9*

Şekil 6. $\alpha = 1$ olduğunda, AHPM ile elde edilen $u(x,t)$'nin sayısal çözüm ile analitik çözümün reel kısımlarının karşılaştırması.

Örnek 3. Son olarak aşağıdaki zaman kesir mertebeli lineer olmayan ayrık uzay Burgers' denklemini

$$D_t^\alpha u_j(t) + u_j(t) D_h u_j(t) = D_h^2 u_j(t),$$

$$j \in \mathbb{Z}, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (15)$$

$$u_j(0) = jh \quad (16)$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alalım. (15)-(16) başlangıç değer problemi

$$u(x,0) = x$$

başlangıç koşullu

$$D_t^\alpha u(x,t) + u(x,t) u_x(x,t) = u_{xx}(x,t),$$

$$0 < t < 1, \quad x \in [0,1], \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

lineer olmayan kesirli mertebe Burgers denklemi için başlangıç değer probleminin ayrık biçimidir. (15) denklemini AHPM ile çözmek için, aşağıdaki homotopi kurulur:

$$(1-p)\left[D_t^\alpha v_j(t;p) - D_t^\alpha u_{j,0}(t)\right] + p\left[D_t^\alpha v_j(t;p) + v_j(t;p) D_h v_j(t;p) - D_h^2 v_j(t;p)\right] = 0. \quad (17)$$

(6)'yı (17)'de yazarak ve p'nin aynı dereceli terimlerinin katsayılarını karşılaştırarak:

$$p^0: \; D_t^\alpha v_{j,0}(t) - D_t^\alpha u_{j,0}(t) = 0,$$

$$p^1: \; D_t^\alpha v_{j,1}(t) + D_t^\alpha u_{j,0}(t) + v_{j,0}(t) D_h v_{j,0}(t) - D_h^2 v_{j,0}(t) = 0,$$

$$p^2: \; D_t^\alpha v_{j,2}(t) + v_{j,0}(t) D_h v_{j,1}(t) + v_{j,1}(t) D_h v_{j,0}(t) - D_h^2 v_{j,1}(t) = 0,$$

$$p^3: \; D_t^\alpha v_{j,3}(t) + v_{j,0}(t) D_h v_{j,2}(t) + v_{j,1}(t) D_h v_{j,1}(t) + v_{j,2}(t) D_h v_{j,0}(t) - D_h^2 2(t) = 0,$$

$$\vdots$$

$$p^\ell: \; D_t^\alpha v_{j,\ell}(t) + \sum_{k=0}^{\ell-1} v_{j,k}(t) D_h v_{j,\ell-1-k}(t) - D_h^2 v_{j,\ell-1}(t) = 0$$

elde edilir.
Başlangıç değeri

$$v_{j,0}(t) = u_{j,0}(t) = u_j(0) = jh$$

olduğunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$v_{j,1}(t) = -jh \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$v_{j,2}(t) = 2jh \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

$$v_{j,3}(t) = -4jh \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - jh \frac{\Gamma(2\alpha+1) t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2},$$

$$\vdots$$

(7)'den (15)-(16) başlangıç değer probleminin çözümü

$$u_j(t) = v_{j,0}(t) + v_{j,1}(t) + v_{j,2}(t) + \cdots$$

$$= -jh\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 2jh\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - 4jh\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - jh\frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2} + \cdots$$

elde edilir.
$\alpha = 1$ özel durumu için

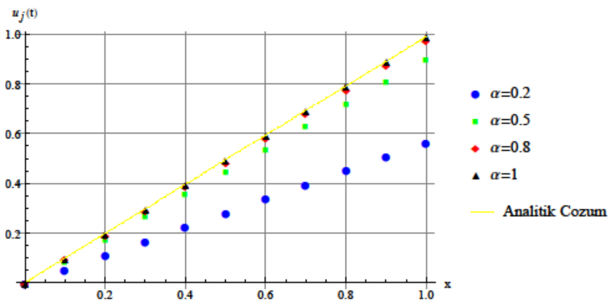
$$u_j(t) = jh[1 - t + t^2 - t^3 + \cdots] = jh\frac{1}{1+t}$$

çözümü elde edilir.
Sürekli biçim;

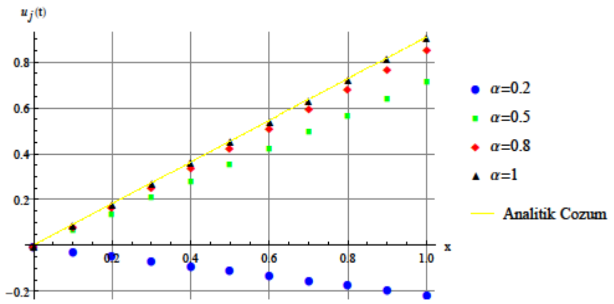
$$u(x,t) = \frac{x}{1+t}$$

analitik çözümüne sahiptir(Taghizadeh *et al*. 2011).

Şekil 7, α 'nın farklı değerleri için $u(x,t)$'nin AHPM yaklaşık çözümlerini gösterir.



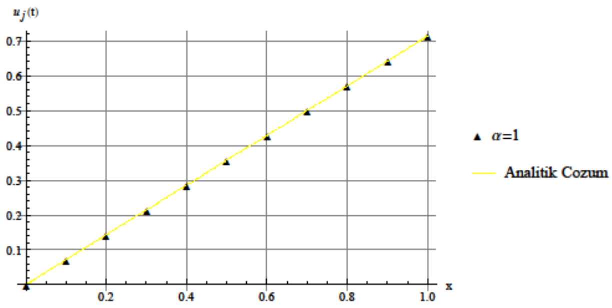
(a) *t = 0.01*



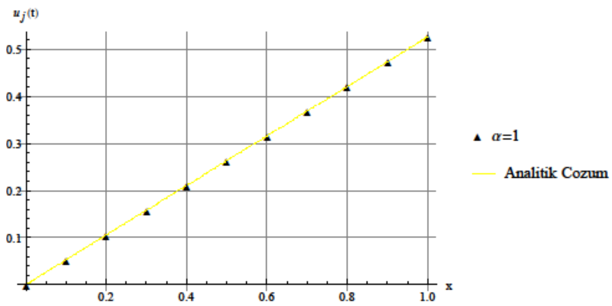
(b) *t = 0.1*

Şekil 7. $u(x,t)$ 'nin AHPM ile yaklaşık çözümünün sayısal gösterimi.

Şekil 8'de $\alpha = 1$ olduğunda, metodun analitik çözümle iyi bir uyumu olduğunu görürüz.



(a) *t = 0.4*



(b) *t = 0.9*

Şekil 8. $\alpha = 1$ olduğunda, AHPM ile elde edilen $u(x,t)$'nin sayısal çözümü ile analitik çözümün karşılaştırması.

4. Tartışma ve Sonuçlar

Bu makalede, lineer ve lineer olmayan kesirli-mertebe kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için ayrık HPM tanıtıldı. Önerilen metodun doğruluğu ve etkisi test problemlerle gösterildi. Sonuçlar, AHPM'nin bilim ve mühendisliğin kesirli-mertebe kısmi diferensiyel denklemlerini çözmek için son derece basit, kullanımı kolay ve doğruluğunun yüksek olduğunu göstermektedir. Bu makalede açıklanan temel düşüncenin, diğer benzer lineer olmayan kesirli mertebe kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için daha sık kullanılması beklenmektedir.

5. Kaynaklar

Bratsos, A., Ehrhardt, M. and Famelis, I.T., 2008. A Discrete Adomian decomposition method for discrete nonlinear Schrödinger equations. *Applied Mathematics and Computation,* **197**, 190—205.

Burgers, J.M., 1948. A Mathematical model illustration the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, **1**, 171—199.

Caputo, M., 1967. Linear models of dissipition whose Q is almost independent. *II, Geophys. J. Roy. Astron.*, **13**, 529—539.

Dhaigude, D.B. and Birajdar, G.A., 2014. Numerical solutions of fractional partial differential equations by discrete Adomian decomposition method. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **6**, 107—119.

He, J.H., 1998. An approximate solution technique depending on an artifical parameter: a special example. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **3**, 92—97.

He, J.H., 2000. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems. *International Journal of Non-Linear Mechanic.*, **35**, 37—43.

He, J.H., 2003. Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytic technique. *Applied Mathematics and Computation,* **135**, 73—79.

He, J.H., 2009. An elementary introduction to the homotopy perturbation method. *Computers and Mathematics with Applications*, **57**, 410—412.

Hemeda, A.A., 2012. Homotopy perturbation method for solving partial differential equations of fractional order. International Journal of *Mathematical Analysis*, **6(49)**, 2431—2448.

Luchko, Y. and Gorenflo, R., 1999. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivative. *Acta Mathmatica Vietnamica*, **24**, 207—233.

Özpınar F., 2018. Applying discrete homotopy analysis method for solving fractional partial differential equations. *Entropy*, **20(5)**, 332.

Özpınar F., 2018. Solving fractional difference equations by discrete Adomian decomposition method. *Journal of Balıkesir University Institute of Science and Technology*, **20(3)**, 15-22.

Özpınar F. and Belgacem F.B.M., 2019. The discrete homotopy perturbation Sumudu transform method for solving partial difference equations. *Discrete Continuous Dynamical Systems - S*, **12(3)**, 615-624.

Podlubny, I., , 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego.

Sripacharasakullert, P., Sawangtong, W. and Sawangtong, P., 2019. An approximate analytical solution of the multi-dimensional Burgers equations by the homotopy perturbation method. Advences in Difference Equations, **252(2019)**, https://doi.org/10.1186/s13662-019-2197-y.

Taghizadeh, N., Akbari, M. and Ghelichzadeh, A., 2011. Exact solution of Burgers equations by homotopy perturbation method and reduced differential transformation method. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, **5(5)**, 580—589.

Zhu, H., Shu, H. and Ding, M., 2010. Numerical solutions of two-dimensional Burgers' equations by discrete Adomian decomposition method. *Computers and Mathematics with Applications*, **60**, 840—848.

Zhu, H., Shu, H. and Ding, M., 2010. Numerical solutions of partial differential equations by discrete homotopy analysis method. A*pplied Mathematics and Computation,* **216**, 3592—3605.

Zhu, H. and Ding, M., 2014. The discrete homotopy perturbation method for solving Burgers' and heat equations. *Journal of Information and Computing Science*, **11(5)**, 1647—1657.