Aritmetik Serilere İstatistiksel Bir Yaklaşım

Kazım KARA[1] **Gürol ZIRHLIOĞLU**[2]

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Ziraat Fakültesi 65080 Van Turkey

Özet : Matematikte önemli bir yeri olan seriler üzerinde çalışarak, aritmetik seriye istatistiksel bir yaklaşımda bulunulmuştur. Aritmetik dizinin terimler toplamı,

$$\frac{(a_n + a_1)}{2} * \frac{(a_n + r - a_1)}{r}$$

ifadesi ile hesaplanabilir. Bu ifadenin ilk kısmı medyan veya aritmetik ortalamayı, ikinci kısmı ise, dizideki eleman sayısını vermektedir. Öte yandan aritmetik serinin dağılımı Üniform dağılıma uymaktadır. Bu dağılımın ortalaması olan;

$$E(x) = \frac{(a_n + a_1)}{2}$$

üstteki ifadenin ilk terimine karşılık gelmektedir.

Anahtar Kelimeler : Aritmetik Seri, Aritmetik Dizi

A Statistical Approximation To Arithmetic Series

Abstract : A statistical approximation to arithmetic series were made by studying an series which has important place in mathematic. The sum of arithmetic sequence can be calculated by following equation:

$$\frac{(a_n + a_1)}{2} * \frac{(a_n + r - a_1)}{r}$$

The first part of this equation shows median or arithmetic mean while second part gives the number of elements. On the other hand, distribution of arithmetic series with uniform distribution.

$$E(x) = \frac{(a_n + a_1)}{2}$$

mean of this distribution, correspond to the term of above expression.

Key words : Arithmetic series, arithmetic sequence

Giriş

Matematik hemen hemen bütün bilim dallarının baş vurduğu bir disiplindir. Matematiğin geliştirdiği çeşitli teori ve yöntemler çok değişik alanlara uygulanabilmektedir. Uygulamalı matematiğin esas görevi de, bu gaye ile teknikler geliştirmektir.

Dizi ve serilerin matematikte çok önemli bir yeri vardır. Gaus'un yöntemi de herkes tarafından bilinmektedir. Ancak Gaus'un istatistikçi kimliği ile herkes ilgilenmeyebilir. Aslında, teorik matematikçiler de Gaus'un bu yönüyle pek fazla ilgilenmemişlerdir.

İstatistiği matematikten ayrı düşünmemek gerekir. Ancak bu alandaki önemli ve hızlı gelişmeler, istatistiği ayrı bir disiplin haline getirmiştir. İstatistik, matematiğin geliştirdiği teori ve tekniklere dayanarak kendisi de yeni yöntemler geliştirmektedir.

Bu çalışmada serilerin istatistik yönüyle ilgilenilmiş ve bu konuya farklı bir yaklaşımda bulunulmuştur.

Dizi ve Seri

Dizi

Hacısalihoğlu ve ark.(1994) diziyi, tanım cümlesi pozitif tam sayılar cümlesi olan bir fonksiyon olarak tanımlıyor. Bir dizi, $\{f(n)\}$ya da yaygın olarak, $(f(n))$biçiminde gösterilir. Bu gösterim;

(f(n)=(f(1),f(2),f(3),....,f(n),f(n+1),.....) (1)

demektir.

Burada, f(1) 1 inci terim, f(2) 2 inci terim,....f(n) de genel terimi ifade etmektedir.

Genel terim, dizinin karakteristik terimidir. Bir dizinin belirli olması, genel teriminin belirli olmasıyla da ilgilidir. Pasteka and Solat(1991), aritmetik dizilerin kapsadığı pozitif tamsayı setlerinden bahsetmişler ve dizilerde yapılmış olan ölçümler hakkında verdikleri bilgilerle konuya ışık tutmuşlardır.

Sonlu bir limite sahip olan diziye yakınsak, bunun dışında kalan diziye de ıraksak denmektedir. Mesela (1/n) dizisinin limiti 0 olup, bu dizi yakınsaktır. Halbuki, (n+1) / n dizisinin limiti sonlu olmadığı için ıraksaktır.

Seri

Saçlı ve Balcı (1982), $a_n$dizisinin tüm terimlerinin toplamı;

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (2)$$

olan ifadeye, genel terimi a_n olan bir seridir denmektedir. Burada;

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_k) \quad (3)$$

olduğundan, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsaklığı, genel terimi $a_n$olan,

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad (4)$$

dizisinin yakınsaklığına bağlı olmaktadır. Eğer burada yakınsaklık söz konusu ise, (3) nolu ifade

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \quad (5)$$

şeklinde gösterilir. Demek ki, $\sum a_k$ sembolü yakınsak olan bir serinin toplamını göstermektedir (Mustafin, 1992). (4) eşitliğinde gösterilen (S_n), kısmi toplamlar dizisi olup,

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \quad (6)$$

olduğundan,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (7)$$

dir. İşte kısmi toplamlar dizisi yakınsak olan seri de yakınsak oluyor. Bu durumda, serinin kısmi toplamlar dizisinin limitine serinin toplamı adı verilir (Hacısalihoğlu ve ark., 1994).

Aritmetik Seri

Bir dizinin bütün terimleri, kendinden bir önceki terimine sabit bir sayı eklenerek oluşturulan serilerdir (San, 1975). Buna göre ilk terimi $\mathbf{a_1}$ ortak farkı **r** olan **n** terimli bir dizinin terimleri,

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

....

$$a_n = a_{(n-1)} + r = a_1 + (n-1)r$$

olur. Buna göre, bir aritmetik dizinin genel terimi;

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (8)$$

olmaktadır. Tamsayılar dizisinde, **n** doğal sayının toplamı ise;

$$s = \frac{n(n+1)}{2} \quad (9)$$

olur.

Aritmetik Seriye İstatistiksel Yaklaşım

Bir aritmetik dizinin terimler toplamı,

$$\frac{(a_n + a_1)}{2} * \frac{(a_n + r - a_1)}{r} \quad (10)$$

ifadesi ile elde edilebilir. Bu ifadenin ilk kısmı olan $\frac{(a_n + a_1)}{2}$, dizinin medyanını vermektedir. İkinci kısmı olan $\frac{(a_n + r - a_1)}{r}$ ise terim sayısını verir.

Burada **r**, sabit bir sayı olduğu için, dizinin tam ortasındaki değer (medyan), terim sayısı ile çarpılınca terimler toplamı elde edilmiş olur.

Dizinin terimler toplamını, bunların sayısına bölerek elde edilen değer aritmetik ortalama olup, simetriden dolayı bu değer medyanla aynı olmaktadır. Aritmetik ortalamanın hesaplanmasında kullanılan,

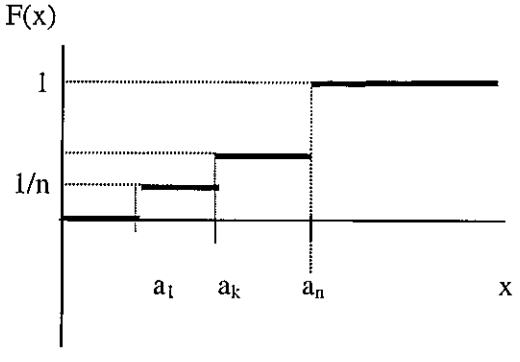
$$\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n} \tag{11}$$

ifadesinde yer alan terim sayısı (n)'nı tekrar bu ifade ile çarparsak yeniden;

$$n\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{12}$$

dizi toplamı elde edilmiş olur. Bu eşitlik, (10) no'lu ifadeye denktir.

Şimdi de, aritmetik seriye bir ihtimal dağılım yaklaşımı yapalım. Seri yakınsak ve terimleri ardışık olduğu için, Uniform dağılıma uymaktadır. Buna ait dağılımın fonksiyonu Şekil 1'de gösterilmiştir;



Şekil 1. Uniform Dağılımın Grafiği (Kara, 1989).

Bir uniform dağılım için beklenen değer,

$$E(x) = \frac{(a_n + a_1)}{2} \tag{13}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu eşitlik ise, (10) no'lu ifadenin ilk kısmı ile aynıdır.

Değerlendirme Ve Sonuç

Yaklaşımımızı sayısal örnekler ile gösterebiliriz:

Örnek 1: İlk terimi 1 ve ortak farkı (r) 7 olan seride $a_n = 71$ alınırsa, terimler şöyle olur:

1 8 15 22 29 36 43 50 57 64 71

Burada, medyan veya aritmetik ortalama, (10) numaralı ifadenin ilk kısmına göre,

$$\frac{(71+1)}{2} = 36$$

bulunur. Bu değer hem medyan, hem de aritmetik ortalamadır. Terimlerin sayısı da, aynı ifadenin ikinci kısmına göre;

$$\frac{(71+7-1)}{7} = 11$$

olur. Bu sayı aritmetik ortalama ile çarpılırsa, toplam;

36*11=396

olarak elde edilir.

Örnek 2 : İlk terimi 3 ve ortak farkı (r) 2 olan seride, a_n=27 alınırsa, dizinin terimleri şöyle olur;

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27

Burada, medyan veya aritmetik ortalama, (10) no'lu ifadeden (27+3)/2=15 bulunur. Dizinin terim sayısı ise; (27+2-3)/2=13 bulunur. Bu sayı, aritmetik ortalama ile çarpılırsa seri toplamı, 15*13 =195 olarak elde edilir.

Örnek 3 : İlk terimi 5 olan ve 5'er 5'er artan bir dizinin a_n=75 olsun. Burada dizinin elemanları,

5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75

olur. Medyan ve aritmetik ortalama, yine (10) numaralı ifadenin ilk kısmına göre, (75+5)/2=40 olur. Dizideki eleman sayısı ise,

(75+5-5)/2 = 75/5 = 15

bulunur. Bu sayı, aritmetik ortalama ile çarpılırsa, toplam; 40*15 = 600 olarak elde edilir.

İlk örneğe göre (10) numaralı ifade yeniden,

$$\frac{(a_n+1)}{2} * \frac{(a_n+r-1)}{r} \tag{14}$$

şeklinde yazılabilir. Üçüncü örneğe göre de,

$$\frac{(a_n+r)}{2} * \frac{a_n}{r} \tag{15}$$

yazılabilir. Bu ifadeler, (10) numaralı genel ifadenin farklı kullanım şekillerinden çıkmış olup, ikinci örnek ise genel ifadenin aynen uygulanmış halidir.

Kaynaklar

Hacısalihoğlu, H., Balcı ve M., Gökdal, F. (1994). Temel ve Genel Matematik, Cilt 1, Ankara.

Kara, İ. (1989). Olasılık, Anadolu Üniversitesi, No:69, Eskişehir.

Mustafin, M.A. (1992). Absolute and Uniform Convergence of Series in a Sine System, Different silnye-Uravneniya, No:8, AlmaAta, USSR.

Pasteka, M. and Solat, T. (1991). Buck's Measure Density and Sets of Possitive Integers Contaming Arithmetic Progression, Math.slovaco, No:3,283-193.

Saçlı, Ö.A. ve Balcı,M. (1982). Fen Bilimleri İçin Matematik. Modern Matematik ve Fen Kitapları:130, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul.

San, N. (1975). Analiz Dersleri, Atatürk Üniversitesi Yayınları, No:433, Ankara.