Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 37, Sayı 3, 2021

Erciyes University
Journal of Institue Of Science and Technology
Volume 37, Issue 3, 2021

Lineer Modellerde Kısıtlama Altında Parametre Tahmini Üzerine Bir Çalışma

Fatma Buğlem YALÇIN[*1], **Cemil YAPAR**[2],

[*1] Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, ORDU
[2] Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, ORDU

(Alınış / Received: 19.05.2021, Kabul / Accepted: 29.09.2021, Online Yayınlanma / Published Online: 30.12.2021)

Anahtar Kelimeler
Alışılmış En Küçük Kareler,
En Çok Olabilirlik,
Kısıtlanmış En Küçük Kareler,
Lineer Model,
Moore-Penrose Genelleştirilmiş Tersi,
Parametre Tahmini

Öz: İstatistiksel analizlerden biri olan regresyon analizinin temel amacı, tahmin edilen değerler ile gerçek gözlem değerleri arasındaki farkı minimum yapmaktır. Bu nedenle, çeşitli tahmin yöntemleri geliştirilmiştir. Regresyon modeli oluşturulurken genellikle alışılmış en küçük kareler (AEKK) veya en çok olabilirlik (EÇO) yaklaşımlarından biri kullanılır. Bazı durumlarda, parametre vektörü üzerine lineer eşitlik veya lineer eşitsizlik kısıtlamaları konulabilir. Parametre vektörü üzerine lineer eşitlik kısıtlaması konulduğunda parametre, kısıtlanmış en küçük kareler (KEKK) yaklaşımı ile tahmin edilir. Ayrıca kısıtlanmış modeller altında parametre tahmini, matrislerin genelleştirilmiş terslerini (g-terslerini) içerir. Bu çalışmada klasik regresyon modelinde en küçük kareler tahmin edicileri, parametre vektörü üzerine eşitlik kısıtlamaları konularak ve matrislerin Moore-Penrose g-tersleri kullanılarak elde edilmiştir.

A Study on Parameter Estimation under Constraint in the Linear Models

Keywords
Ordinary Least Squares,
Maximum Likelihood,
Constrained Least Squares,
Linear Model,
Moore-Penrose Generalized Inverse,
Parameter Estimation

Abstract: The main purpose of the regression analysis, which is one of the statistical analyzes, is to minimize the difference between the estimated values and the actual observation values. Therefore, various estimation methods have been developed. Ordinary least squares (OLS) or maximum likelihood (ML) approaches are often used when creating the regression model. In some cases, linear equality or linear inequality constraints can be imposed on the parameter vector. When linear equality constraint is imposed on the parameter vector, the parameter is estimated by the constrained least squares (CLS) approach. Besides, parameter estimation under constrained models includes generalized inverse (g-inverse) of matrices. In this study, least squares estimators in classical regression model were obtained by imposing equality constraints on parameter vector and using Moore-Penrose g-inverses of matrices.

***İlgili Yazar, e-mail:** yalcinfatmabuglem@gmail.com

1. Giriş

Çeşitli alanlarda, uygulama vasıtasıyla toplanan veriler incelenir ve bu verileri modelleyen fonksiyon bulunmak istenir. Verilere tam anlamıyla uyan fonksiyonu bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Regresyon analizi, bu verilere en iyi şekilde uyan fonksiyonu bulma yöntemidir [1].

Alışılmış en küçük kareler (AEKK) yöntemi, regresyon analizinde sıklıkla kullanılan yöntemlerden biridir. Ünlü matematikçi C. F. Gauss, AEKK yöntemini 1795'de geliştirmiştir. Bu yöntemi ilk defa 1801'de Cres astroidinin yörüngesini belirlemek için kullanmıştır [2]. Gauss'dan bağımsız olarak A. Legendre 1805'de ve R. Adrain 1808'de yöntemi bulmuşlardır [3].

AEKK yöntemi, pek çok bilim dalında (matematik, sosyoloji, mühendislik, tıp, ziraat gibi) değişkenler arasındaki ilişkileri saptarken kullanılan araçlardan biridir [4].

AEKK yöntemi Gauss-Markov Teoremi'ne göre, optimal yöntemdir. Yani hata kareler toplamını (HKT'yi) minimum yapmayı amaçlayan bir yöntemdir. Veriler için birtakım varsayımlar sağlandığında yöntem, güvenilir tahminler elde edilmesini sağlar [5-6]. Bu yöntemde, değişkenler arasındaki ilişkiyi bulmak için matematiksel model kurulur, daha sonra da kurulan modelin geçerliliği araştırılır [7]. Eğer kurulan model verilere uygun değilse yanıltıcı sonuçlar doğuracaktır [8].

AEKK yöntemi, geçmişten günümüze kadar matematikçilerin ve diğer bilim adamlarının yoğun olarak üzerinde çalıştıkları konu haline gelmiştir [9-15].

Ancak bazı durumlarda AEKK kestirimine lineer kısıtlamalar koymak gerekebilir. Bu durumda lineer modellerde kısıtlama altında elde edilen tahmine, kısıtlanmış en küçük kareler (KEKK) tahmini denir [16-21]. KEKK yöntemi ile elde edilen parametreler bu kısıtları sağlamalıdır. Amaç yine HKT'yi minimum yapmaktır.

Bu çalışmada amacımız, lineer modellerde kısıtlama altında KEKK tahminini, matrislerin genelleştirilmiş tersinin özel bir hali olan Moore-Penrose g-tersi vasıtasıyla bulmaktır. Bunun için önce, AEKK ile KEKK tahminlerini ifade edelim ve Moore-Penrose g-tersinden kısaca bahsedelim.

2. Materyal ve Metot

2.1. Alışılmış en küçük kareler (AEKK) tahmini

$\boldsymbol{Z}$ bilinenlerin t ranklı bir $s \times t$ matrisi, $\boldsymbol{w}$ gözlenebilir bir $s \times 1$ rasgele vektör, $\boldsymbol{\gamma}$ parametrelerin bir $t \times 1$ vektörü, $\boldsymbol{e}$, $E(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$ ortalamalı ve $var(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{I}$ kovaryanslı bir hata vektörü ve $\boldsymbol{\sigma}^2$ pozitif bir parametre olmak üzere aşağıdaki genel lineer modelini göz önüne alınız:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Z\gamma} + \boldsymbol{e}\,. \tag{1}$$

$\boldsymbol{\gamma}$ nın AEKK tahmin edicisi, aşağıdaki HKT yi $\boldsymbol{\gamma}$ ya göre minimumlaştırılarak elde edilir:

$$\text{HKT}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z\gamma})'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z\gamma}) = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z\gamma}\,.$$

HKT($\boldsymbol{\gamma}$) nın minimum olması için gerek şart

$$\frac{\partial \text{HKT}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}'} = 0,$$

$$-2\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w} + 2\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z\gamma} = \boldsymbol{0}$$

olmasıdır.

Böylece $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ için, $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}$ normal denklemler sistemi elde edilir.

Yukarıdaki normal denklemler sistemi her zaman tutarlıdır. Yani $\boldsymbol{Z}$ nin rankına bağlı değildir. $rank(\boldsymbol{Z}_{s\times t}) = t \leq s$ olması halinde, normal denklemler sistemi için $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ çözümü

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}$$

ile verilir [22-26].

$E(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}) = E[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}] = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'E[\boldsymbol{w}] = \boldsymbol{\gamma}$ dır. Yani $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$, $\boldsymbol{\gamma}$ nın bir yansız tahmin edicisidir. $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ nın kovaryans matrisi ise,

$$\begin{aligned} var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}) &= E[((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\gamma})((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\gamma})'] \\ &= E[((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{Z\gamma} + \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{\gamma})((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{Z\gamma} + \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{\gamma})'] \\ &= (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'E(\boldsymbol{ee}')\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} = \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} \end{aligned}$$

biçimindedir. $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \frac{(w-Z\widehat{\gamma})(w-Z\widehat{\gamma})'}{s-rank(\boldsymbol{Z})}$, $\boldsymbol{\sigma}^2$ nin bir yansız tahmin edicisidir.

2.2. Kısıtlanmış en küçük kareler (KEKK) tahmini

$\mathbb{R}^t$; $t \times 1$ tipindeki tüm reel matrislerin bir kümesi olmak üzere $\mathbb{R}^t$ nin bir alt uzayı,

$$\phi = \{\boldsymbol{\gamma} : \ \boldsymbol{C\gamma} = \boldsymbol{\delta}\}$$

olsun. $\boldsymbol{\gamma}$ için parametre uzayı ϕ alt uzayına kısıtlanmıştır. $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{C\gamma} = \boldsymbol{\delta}$ tutarlı lineer denklemler sistemini sağlamak üzere, beklenen değeri $\boldsymbol{Z\gamma}$ olan $\boldsymbol{w}$ yi gözleriz.

$\boldsymbol{C}_{q\times t}$ matrisinin tam ranklı olduğunda ısrar edeceğiz; aksi halde gereksiz denklemlere sahip olacağız. Denklemlerin tutarlı olmalarını garantilemek için $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{C})$ ($\mathcal{C}(\boldsymbol{C})$, $\boldsymbol{C}$ nin sütun uzayı) olması yeterlidir [27].

O halde $rank(\boldsymbol{C}_{q\times t}) = q$ ve $\boldsymbol{\delta}$ bilinenlerin bir $q \times 1$ vektörü olmak üzere, $\boldsymbol{C}$ sınırlama matrisi için katsayılar üzerine koyulan aşağıdaki q −sayıda lineer kısıtlamasını göz önüne alınız:

$$\boldsymbol{C\gamma} = \boldsymbol{\delta}. \tag{2}$$

$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z\gamma})'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z\gamma})$ amaç fonksiyonu, (2) kısıtlaması altında minimumlaştırılarak KEKK tahmini elde edilir. $\boldsymbol{\alpha}'$ Lagrange çarpanlarının bir $q \times 1$ vektörü olmak üzere, Lagrange fonksiyonu

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z\gamma} - \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{C\gamma})$$

dır. [28]'deki çalışmaya göre $\boldsymbol{M}$ bir matris, $\boldsymbol{m}$ ve $\boldsymbol{n}$ vektörler olmak üzere,

$$\frac{\boldsymbol{\partial(m'Mm)}}{\boldsymbol{\partial m}} = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}')\boldsymbol{m} \ (= 2\boldsymbol{Mm}, \qquad \boldsymbol{M} \ simetrik\ olduğunda)$$

ve

$$\frac{\boldsymbol{\partial(m'n)}}{\boldsymbol{\partial m}} = \boldsymbol{n}$$

dir. Bu sonucu kullanarak, Lagrange fonksiyonunu $\boldsymbol{\gamma}$ ya ve $\boldsymbol{\alpha}$ ya göre diferensiyelleme aşağıdaki şartları verir:

$$-2\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w} + 2\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z\gamma} + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{C\gamma} - \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

(3) eşitliğini soldan $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}$ ile çarpma

$$-2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w} + 2\boldsymbol{C\gamma} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$$

eşitliğini verir. $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'$ matrisi pozitif tanımlıdır. Yukarıdaki eşitlikte $\widehat{\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}$ ifadesini kullanarak,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}')^{-1}(2\boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{\gamma}} - 2\boldsymbol{C\gamma}) = -2(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})$$

elde edilir. $\boldsymbol{\alpha}$ nın bu değerini (3) eşitliğinde yerine koyarak, $\boldsymbol{\gamma}$ nın KEKK tahmin edicisi

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}} = \widehat{\boldsymbol{\gamma}} + (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})$$

olarak bulunur [29-32].

$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$ tahmin edicisi, (2) eşitliğini sağlar. Üstelik $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$, $\boldsymbol{\gamma}$ nın bir yansız tahmin edicisidir. $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$ nin kovaryans matrisine gelecek olursak,

$$var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}}) = \boldsymbol{E}[(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{\gamma})(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{\gamma})'] = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{ee}')\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{c}})' = \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{c}})'$$

olarak bulunur.

Burada $\boldsymbol{\mathcal{M}}_c = [\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{C}]$, idempotent bir matristir ancak simetrik bir matris değildir [27]. Ayrıca $var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c)$ için, $var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c) = \boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\mathcal{M}}_c(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}$ denk ifadesi de yazılabilir.

2.3. Matrisler için genelleştirilmiş tersler (g-tersler)

Fredholm ilk kez 1903'de g-ters kavramından integral operatörleri ile ilgili çalışmasında bahsetmiştir. Matrislerin g-ters kavramı ilk olarak E. H. Moore tarafından 1920'de ifade edilmiştir. Daha sonra bu, Penrose tarafından 1955'de geliştirilmiştir. 1900'lü yılların ortasından itibaren lineer programlamanın gelişmesiyle g-terslere ilgi daha da artmıştır [33].

2.3.1. Moore-Penrose g-tersi

Herhangi bir $\boldsymbol{P}$ matrisi için,

$$\textbf{i. } \boldsymbol{PGP} = \boldsymbol{P}, \ \textbf{iii. } (\boldsymbol{PG})' = (\boldsymbol{PG}),$$
$$\textbf{ii. } \boldsymbol{GPG} = \boldsymbol{G}, \ \textbf{iv. } (\boldsymbol{GP})' = (\boldsymbol{GP})$$

koşullarını sağlayan tek bir $\boldsymbol{G}$ matrisi vardır. Bu matrise Moore-Penrose g-tersi denir ve $\boldsymbol{P}^+$ ile gösterilir [34].

3. Bulgular

3.1. Moore-Penrose g-tersi ile KEKK tahmininin elde edilişi

Burada $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$ yı elde etmek için başka bir yöntemi ortaya koyacağız. Bunun için, $rank(\boldsymbol{C}_{q\times t}) = q \le t$ şartı ve (2) kısıtlaması altında, $\boldsymbol{C}$ nin $\boldsymbol{C}^+ = \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}')^{-1}$ Moore-Penrose g-tersini ($\boldsymbol{C}^+$, tektir) kullanarak (2) lineer denklemler sisteminden aşağıdaki $\boldsymbol{\gamma}^*$ çözümünü elde ederiz:

$$\boldsymbol{\gamma}^* = \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})\boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^t. \tag{4}$$

$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^t$ optimum vektörünü bulmaya çalışalım ve buna $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ diyelim. $\boldsymbol{\gamma}^*$ değerini (1) modelinde yerine koyarak

$$\underbrace{\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}}_{=\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{Z}\,\underbrace{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})\boldsymbol{\xi}}_{=\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{e}$$

modelini elde ederiz. Bu takdirde $\boldsymbol{\varphi}$ nın $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ tahmin edicisi, $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{v}$ normal denklemi sağlar. O halde

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})\widehat{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}) = \widehat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}$$

olduğu görülür. $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^t$ keyfi bir vektör olmak üzere, yukarıdaki ifadenin $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ için çözümünden

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\xi}} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}) + [\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})^+(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})]\boldsymbol{\eta} \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}) + [\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})]\boldsymbol{\eta} \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}\boldsymbol{\eta}\end{aligned}$$

olur. (4) ifadesinde $\boldsymbol{\xi}$ yerine $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ koyarak $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$ yı elde ederiz. Buna göre,

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c &= \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}\boldsymbol{\eta}\} \\ &= \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\end{aligned} \tag{5}$$

elde edilir.

$(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}']^{-1}$ g-tersi, Moore-Penrose g-tersinin üç özelliğini sağlar.

i. $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$, **ii.** $\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^+ = \boldsymbol{C}^+$, **iii.** $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^+)' = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^+$.

Eğer (5) ifadesinde $\boldsymbol{C}^+$ yerine $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}']^{-1}$ matrisini kullanırsak,

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c &= \{(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}']^{-1}\}\boldsymbol{\delta} + (\boldsymbol{I} - \{(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}']^{-1}\}\boldsymbol{C})\widehat{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= \widehat{\boldsymbol{\gamma}} + (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})\end{aligned}$$

olduğu görülür. KEKK tahmin edicisinin kovaryans matrisine tekrar dönecek olursak,

$$var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c) = \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} + \boldsymbol{\sigma}^2[-(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} + \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}],$$

$$var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}) - var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c) = \boldsymbol{\sigma}^2[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}]$$

ifadesini elde ederiz.

Şimdi AEKK tahmin edicisinin varyans matrisi (kovaryans matrisi) ile KEKK tahmin edicisinin varyans matrisinin farkından oluşan matrisi inceleyelim. Bunun için

$$\boldsymbol{X} = [(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}]$$

diyelim. ϕ parametre uzayından $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{C}') = \mathcal{N}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}'^+)$ vektörünü seçelim (burada $\mathcal{N}$, sıfır uzayı veya çekirdeği gösterir). $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^q$ ve $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^t$ olacaktır. Böylece Moore-Penrose g-ters özelliklerini kullanarak, her $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^t$ için

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{C}[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}]\boldsymbol{C}'\boldsymbol{b} \\ = \boldsymbol{b}'[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}' - \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}']\boldsymbol{b} \\ = \boldsymbol{b}'[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}' - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}']\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}']\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

bulunur. Burada $rank(\boldsymbol{Z}_{s\times t}) = t$ olduğundan, $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})$, $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}$ ve $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'$ matrisleri pozitif tanımlıdır. O halde $\boldsymbol{X}$ de pozitif tanımlıdır.

Böylece, $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$ tahmin edicisinin varyansı, $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ tahmin edicisinin varyansından bir pozitif tanımlı matris kadar eksiktir [35-36]. Yani, $var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}) \geq var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c)$ dir. O halde, $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$ nin; $\boldsymbol{\sigma}^2$ nin biliniyor olması şartı veya kovaryans matrislerinin kriteri ile Loewner sıralaması altında $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ dan daha etkin olduğu ispat edilmiş olur.

Son olarak $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$ nin tekliğinden bahsedelim. (5) ifadesini soldan $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})\widehat{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{v} \\ = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi soldan $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})$ ile çarparak

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c - \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$$

elde ederiz. Buradan $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c - \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}) \in \mathcal{N}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})$ olduğu yani, $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c - \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}) \in \mathcal{C}(\boldsymbol{C}')$ veya $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w} + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ olduğu görülür. Bu nedenle $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_c$ tektir.

3.2. KEKK tahmininin bir uygulaması

Ordu ilindeki bir fındık fabrikasında, 2013-2017 yılları arasında fındıktan elde edilen gelir aşağıda Tablo 1. de verilmiştir[27].

Tablo 1. 2013-2017 yılları arasında fındıktan elde edilen gelir

Yıllar	Gelir (TL)
2017	1033132,457
2016	1062882,890
2015	1324114,990
2014	824509,375
2013	536710,989

Önce parametre üzerine lineer kısıtlama koyarak parametre tahminini, Moore-Penrose g-tersini kullanarak hesaplayalım. Sonra Tablo 1. deki verilerden yararlanarak en küçük kareler yöntemi vasıtasıyla 2021 yılındaki gelirin kestirimini yapalım.

(1) modeli göz önüne alındığında, AEKK tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = 283186{,}7010$ olarak bulunur. Şimdi (2) lineer kısıtlamasını göz önüne alınız. Özel olarak $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 123121{,}6451 \\ 0 \end{bmatrix}$ seçilirse, $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}']^{-1}$ g-tersi, Moore-Penrose g-tersinin üç özelliğini sağladığından,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_c &= \hat{\boldsymbol{\gamma}} + (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{\delta} - (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= 283186{,}7010 + 123121{,}6451 - 283186{,}7010 = 123121{,}6451\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_c$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ dan daha etkindir.

$\hat{\boldsymbol{e}} = \bar{\boldsymbol{w}} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_c\bar{\boldsymbol{Z}} = 586905{,}2049$ dur. Tablo 1. deki verilere göre model, $\boldsymbol{w} = 123121{,}6451\,\boldsymbol{Z} + 586905{,}2049$ şeklinde bulunur. O halde 2021 yılı için ($\boldsymbol{Z} = 9$ için), tahmini fındık geliri $\boldsymbol{w} = 1695000{,}011$ TL olarak hesaplanır.

4. Tartışma ve Sonuç

(1) modeline benzer lineer modeller için parametrelerin tahmini ve birçok hipotezin testi, parametre vektörü üzerine lineer kısıtlamalar koyarak da yapılır. Bu tahmin Lagrange çarpanları yöntemi ile yapıldığı gibi farklı yöntemlerle de yapılabilir. Bu çalışmada, KEKK tahminini matrislerin Moore-Penrose g-tersini kullanarak yaptık. Bu çalışmada tartışılan konular, bu konuda çalışan araştırmacılara biraz da olsa katkıda bulunacaktır.

Kaynakça

[1] Golayoğlu, A. 2015. En Küçük Kareler Yöntemi. http://www.kocaelimakine.com/wp-content/uploads/2013/04/en-kucuk-kareler-yontemi-afet-golayoglu.pdf (Erişim Tarihi: 19.12.2019).

[2] Jabiyev, F., Tunçsiper, B., Karabulut, K. 2019. Mundell-Fleming Modeli Kapsamındaki Trilemma Hipotezinin Test Edilmesi: Azerbaycan Örneği. Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 23, 2073-2088.

[3] Reid, F. 2000. The Mathematician on the Banknote: Carl Friedrich Gauss. Parabola, 36(2), 2-9.

[4] Faraway, J. J. 2014. Linear Models with R. 2nd edition. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. 286s.

[5] Neter, J., Kutner, M., Wasserman, W. 1996. Applied Lineear Regression Models. 4th edition. McGraw Hill/Irwin Series: Operations and Decision Sciences. 1408s.

[6] Fox, J. 2002. Applied Regression Analysis: Linear Models and Related Methods. 1st edition. Sage Publications, Inc. 328s.

[7] Birkes, D., Dodge, Y. 1993. Alternative Methods of Regression. 1st edition. John Wiley & Sons. 240s.

[8] Wilcox, R. R. 1997. Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing. 3rd edition. Academic Press. 608s.

[9] Graybill, F. A. 1969. Introduction to Matrices with Applications in Statistics. 1st edition. Wadsworth Publishing. 372s.

[10] Casella, G., Berger, R. L. 2001. Statistical Inference. 2nd edition. Cengage Learning. 660s.

[11] Larson, R., Farber, B. 2014. Elementary Statistics: Picturing the World. 6th edition. Pearson. 704s.

[12] Van de Geer, S. A. 2005. Least Squares Estimation. Encyclopedia of Statistics in Behavioral Science, 2, 1041-1045.

[13] Miller, S. J. 2006. The Method of Least Squares. Mathematics Department Brown University, Providence: Brown University, 1-7.

[14] Barratt, S. T., Boyd, S. P. 2020. Least Squares Auto-Tuning. Engineering Optimization, 53(5), 789-810.

[15] Landreman, M., Zhu, C. 2021. Calculation of Permanent Magnet Arrangements for Stellarators: A Linear Least-Squares Method. Plasma Physics and Controlled Fusion, 63 (3), 035001.

[16] Fan, Q., Jia, C., Liu, J., Luo, Y. 2021. Robust Recovery in 1-bit Compressive Sensing via ℓq-Constrained Least Squares. Signal Processing, 23, 2073-2088.

[17] Liu, Q., Chen, C., Zhang, Q. 2021. Perturbation analysis for total least squares problems with linear equality constraint. Applied Numerical Mathematics, 161, 69-81.

[18] Nikazad, T., Karimpour, M. 2021. Column-Oriented Algebraic Iterative Methods for Nonnegative Constrained Least Squares Problems. Numerical Algorithms, 86, 1265–1284.

[19] Zhang, F., Wei, M., Li, Y., Zhao, J. 2020. An efficient real representation method for least squares problem of the quaternion constrained matrix equation AXB + CY D = E. International Journal of Computer Mathematics, 98(7), 1408-1419.

[20] Khan, A., Sama, M. 2021. Stability analysis of conically perturbed linearly constrained least-squares problems by optimizing the regularized trajectories. Optimization Letters, 15, 2127–2145.

[21] Zhou, Z., Rui, Y., Cai, X., Lu, J. 2021. Constrained total least squares method using TDOA measurements for jointly estimating acoustic emission source and wave velocity. Measurement, 182, 109758.

[22] Lakshmi, K., Mahaboob, B., Rajaiah, M., Narayana, C. 2021. Ordinary Least Squares Estimation of Parameters of Linear Model. Journal of Mathematical and Computational Science, 11(2), 2015-2030.

[23] Bapat, R. P. 2000. Linear Algebra and Linear Models. 2nd edition. Springer. 148s.

[24] Moore, D., McCabe, G. 1998. Introduction to the Practice of Statistics. 3rd edition. W.H. Freeman and Company, 825s.

[25] Monahan, J. F. 2008. A Primer on Linear Models. 1st edition. Chapman and Hall/CRC. 304s.

[26] Rencher, A. C., Schaalje, G. B. 2008. Linear Models in Statistics. 2nd edition. John Wiley & Sons, 688s.

[27] Yalçın, F. B. 2018. Korelasyon Katsayısının Farklı Geometrik Yorumları, İstatistikte Lineer Modellerin Geometrisi, Lineer Modellerde Lineer Kısıtlamalar Altında Parametre Tahminleri ve Hipotez Testi. Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 195s, Ordu.

[28] Krottnerus, P. 2016. On New Variance Approximations for Linear Models with Inequality Constraints. Statica Neerlandica, 70, 26-46.

[29] Baksalary, J. K., Pordzik, P. R. 1990. Imposing Observation Varying Equality Constraints Using Generalised Restricted Least Squares. Linear Algebra and Its Applications, 127, 371-378.

[30] Doran, H. E., O'Donnell C. J., Rambaldi, A. N. 2003. A Note on Comparing the Unrestricted and Least Squares Estimators. ISSN 1446-5523: 323.

[31] Mead, J. L. 2010. Least Squares Problems with Inequality Constraints as Quadratic Constraints. Linear Algebra and Its Applications, 432, 1936-1949.

[32] Zhdanov, A. I., Gogoleva, S. Y. 2015. Solving Least Squares Problems with Equality Constraints Based on Augmented Regularized Normal Equations. Applied Mathematics E-Notes, 15, 218-224.

[33] Akdeniz, F., Öztürk, F. 1996. Lineer Modeller. 38, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları. 250s.

[34] Campbell, S. L., Meyer, C. D. 1979. Generalized Inverses of Linear Transformations. 1st edition. Pitman, London. 184s.

[35] Chow, G. C. 1960. Tests of Equality Between Subsets of Coefficients in Two Linear Regressions: An Expository Note. Econometrica, 28, 591-605.

[36] Fisher, F. M. 1970. Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions: An Expository Note. Econometrica, 38(2), 361-366.