

P-medyan Tesis Yeri Seçim Problemi ve Çözüm Yaklaşımları

The P-median Facility Location Problem and Solution Approaches

Dr. Mehmet BASTI

Fatih Üniversitesi
mbasti@fatih.edu.tr

ÖZET

Her geçen gün globalleşen ve rekabetin sürekli olarak arttığı dünyamızda organizasyonların yaşamlarını devam ettirebilmelerinde başarılı bir tedarik zinciri yönetimi stratejisi vazgeçilmez hale gelmiştir. Organizasyonların giderlerinin önemli bir kısmını ise tedarik zinciri içerisindeki taşımalardan ortaya çıkan maliyetler oluşturmaktadır. Bu sebeple organizasyonların stratejik kararlarından birisi olan tesis yeri seçimi, tedarik zincirinin performansını ve maliyetlerini doğrudan etkileyen bir konudur. Tesis yeri seçimi problemine güncel metotlarla çözüm yaklaşımı geliştirilmesi bu aşamada oldukça önemli hale gelmektedir. Bu çalışmada hizmet veren tesisler ve talep noktaları arasındaki taşımalardan dolayı ortaya çıkan maliyetlerin minimize edilmesini amaçlayan ve tesis yeri seçim problemleri içerisinde önemli bir yer tutan p-medyan problemi tanıtılmaya çalışılmış ve çözüm metotları üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: tesis yeri seçim problemi, p-medyan problemi

ABSTRACT

In today's globalized and increasingly competitive environment, organizations' need to implement successful strategies for supply chain management has become indispensable. Transportation costs within the supply chain comprise an important part of the organizations' expenses. For this reason, the strategic selection of location is an issue that directly affects supply chain performance and costs. At this stage, it becomes very important to apply the latest and the best methods to the facility location problem. The focus of this study is the p-median problem and its solution techniques, one of the location allocation problems aimed at minimizing the costs arising from shipments between facilities and demand points.

Keywords: facility location problem, p-median problem

1. GİRİŞ

Tesis yeri seçim kararları tüm tedarik zinciri performansını doğrudan etkileyen ve lojistik maliyetlerini önemli ölçüde belirleyici olan kararlardır. Bu sebeple tesis yeri seçim kararları işletmelerin karlılıklarına uzun vadede etkisi olan, çok boyutlu ve önemli kararlardır. Dolayısıyla tedarik zinciri maliyetlerinin işletme giderleri içerisindeki payının sürekli arttığı son yıllarda tesis yerinin seçimi çok daha önemli hale gelmiştir.

Son yıllarda şebeke temelli tesis yeri seçim problemi üzerinde yapılan çalışmalar ciddi bir şekilde artış göstermiştir. Bu durum ülke içinde birden fazla noktada faaliyet gösteren işletmelerin çoğalması, hatta birden fazla ülkede faaliyetlerini sürdüren global işletmelerin sayılarındaki artışla doğrudan ilişkilidir. Bu yüzden yer seçimi ve atama modelleri olarak da ifade edilen tesis yerlerinin belirlenmesi ve bu belirlenen konumlara talep noktalarının atanmasına dayanan tesis yeri seçim problemi eskiye göre çok daha önemli bir konu haline gelmiştir.

Tesis yeri seçim problemi okullar, hastaneler, itfaiye merkezleri gibi kamu hizmet noktaları ile depolar, lojistik merkezleri, mağazalar gibi özel şirket tesislerinin yerlerinin belirlenmesini içine almaktadır. Tesis yeri seçim problemi tesislerin harita üzerindeki istenilen noktaya yerleştirilebildiği model olan sürekli yapıda ya da tesislerin sadece belirlenen şebeke yapısı üzerindeki noktalara yerleştirilebildiği ayrık yapıda olabilmektedir. Bu çalışmada gerçek hayattaki yerleşim yerlerinin noktalar olarak düşünüldüğü, aralarındaki yolların ise noktalar arasındaki bağlantıları ifade edeceği şekildeki bir model olan ayrık tesis yeri seçim problemlerinin bir türü olan p -medyan problemi üzerinde durulmuştur.

Çalışmada üzerinde durulacak olan p -medyan problemi, p adet tesisin n adet talep noktasının ihtiyaçlarını minimum maliyetle karşılanmasını sağlayacak şekilde yerlerinin belirlenmesi ve hizmet alacak olan talep noktalarının bu tesislere atanması olarak tanımlanabilir. Bu problemde $p=1$ olduğunda 1-medyan problemi olarak isimlendirilen bütün taleplerin bir tek tesisten karşılandığı durum ortaya çıkarken, $p=n$ olduğunda ise tüm tesislerin kendisine atandığı bir durumla karşılaşılır. Burada önceden belirlenmiş bir p sayısındaki tesisin açılması ve talep noktalarının bu tesislere atanması kombinatoryal bir optimizasyon problemidir. Literatürde p -medyan probleminin çözümü için birçok yaklaşımlar geliştirilmiştir. Hakimi tarafından ilk defa 1964 yılında tanıtılan p -medyan problemi gerçek hayatta karşılaşılan önemli bir problem türü olduğu için ilk tanıtıldığı zamandan bu yana oldukça ilgi çekmiş ve birçok araştırmacı tarafından üzerinde çalışılmıştır. NP-Zor türde bir problem olan p -medyan probleminin çok küçük boyutlu olanları haricinde analitik yöntemlerle çözülmesi kabul edilebilir sürelerde mümkün değildir. Analitik metotlar kullanılarak çözümünün zorluğundan dolayı p -medyan probleminin çözümünde daha çok sezgisel ve meta sezgisel algoritmalar kullanılmaktadır.

2. TESİS YERİ SEÇİM PROBLEMİ

Çalışmanın bu bölümünde “tesis yeri seçim problemi” kavramı üzerinde durulacak ve tesis yeri seçim problemi türleri açıklanacaktır. Bu bölümde ayrıca çalışmanın odaklanmış

olduğu ve tesis yeri seçim probleminin önemli bir türü olan p -medyan problemi hakkında kısaca bilgi verilecektir. P -medyan problemi hakkında daha detaylı bilgi ise takip eden bölüme bırakılmıştır.

2.1. Tesis Yeri Seçim Probleminin Tanımı

Tesis yeri seçim problemi gerçek hayatta oldukça fazla karşılaşılan optimizasyon problemlerinden birisidir. İster kamu kuruluşu isterse özel sektör kuruluşu olsun neredeyse tüm organizasyonlar bu problem ile karşı karşıya kalmaktadır. Kamu kurumları vatandaşa hizmet verecekleri hizmet noktalarını (okullar, hastaneler, acil servis binaları vb.) en iyi konumlara yerleştirmeye çalışırken, özel sektör ise üretim merkezleri, satış noktaları ve depoların yerleri ile ilgili kritik kararlar vermek durumunda kalmaktadır.

Genel olarak tesis yeri seçim problemleri n adet tesisin m adet konuma ($n < m$) taşıma maliyetlerinin minimize edilecek şekilde yerleştirilmesi konusu ile ilgilenmektedir (Tavakkoli ve Shayan, 1998). Tanımı biraz daha açacak olursak; bir grup hizmet veren tesisin bazı kısıtlar göz önünde bulundurularak, müşterilerin (talep noktası) taleplerinin karşılanması maliyetlerini minimum düzeye indirecek şekilde uygun konumlara yerleştirilmesini ve her bir müşterinin hizmet veren tesislere atanmasını kapsayan problemlerdir. Tesis yeri seçim problemi mutlaka coğrafik olarak farklı yerlerde olan tesislerin yerleştirilmesi olarak düşünülmemelidir. Bu konuda geliştirilen bir model fabrika içindeki tezgah ya da departmanların yerleşimi için de rahatlıkla uygulanabilir.

Günümüzde lojistik maliyetlerinin artışı göz önüne alındığında tesis yeri seçimi büyük organizasyonların en önemli kararlarından birisi haline gelmiştir. Uzun vadede başarı için karar verme konumunda olanlar, hızlı teslimatın önemli bir rekabet aracı olduğu bir ortamda sadece hızlı tepki vermeyi değil aynı zamanda maliyet unsurunu da göz önünde bulundurarak karar vermek durumundadırlar.

En iyi tesis yerini seçmek gerçekten de çözülmesi oldukça zor bir problemdir. Problemin zorluğu bu tür problemlerde birçok parametrenin dikkate alınması gerekliliği ve oldukça fazla kısıt bulunmasından kaynaklanmaktadır. Literatür incelendiğinde tesis yeri seçimi konusunun her zaman dikkat çekmiş ve üzerinde farklı tekniklerle birçok çalışma yapılmış olduğu görülmektedir. Son yıllarda ise özellikle bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak tesis yeri seçim probleminin çözümünde daha çok sezgisel ve meta sezgisel algoritmaları kullanan çalışmalar ön plana çıkmıştır.

Tesis yeri seçimi konusunda literatürdeki ilk çalışma yirminci yüzyıl başlarında Alfred Weber tarafından yapılmıştır. Weber çalışmasında üç talep noktasından birisini minimum taşıma maliyeti oluşacak şekilde diğer iki tesise hizmet veren tesis olarak belirlemeye çalışmıştır. Bu amaçla talep noktaları ile hizmet noktası arasındaki toplam mesafeyi minimize etmek için bir model ortaya koymuştur (Jamshidi, 2009).

Hakimi tarafından 1964 yılında yapılan çalışmada telekominikasyon şebekesi üzerindeki ağ bağlantı noktalarının ve otoyol üzerindeki polis noktalarının en uygun yerlerinin belirlenmesi için bir model önerilmiştir. Bu çalışmadan sonra birden fazla tesisin şebeke üzerinde yerleştirilmesi problemi üzerinde yoğun olarak çalışılmaya başlanmıştır.

Literatürde Hakimi tarafından ilk defa tanıtılan ve p -medyan problemi olarak isimlendirilen bu problem, tesis yeri seçim problemi altında yer alan bir problem türüdür (Hakimi,1964).

Tesis yeri seçim problemleri kendine has bazı özelliklerinden dolayı analitik yöntemler kullanılarak çözülmesi zor problemler olarak kabul edilmektedir. Bu tip problemler, çözüm için harcanan sürenin problemin boyutu ile ilişkili olarak üssel bir şekilde arttığı problemlerdir. NP-Zor olarak isimlendirilen bu yapıdaki problemler, problem boyutunun polinom fonksiyonu ile sınırlı olan hesaplama süresi içinde çözülememektedir. Bu sebepten dolayı NP-Zor kategorisindeki problemlerin çözümünde tam çözüm yöntemleri yerine, optimumu garanti etmeyen fakat kabul edilebilir makul bir çözüme ulaşabilen, çözüm süresi olarak da polinom sınırlar içinde kalan bir zaman alan sezgisel algoritmalar kullanılmaktadır. Bu konunun üzerinde ikinci bölümde ayrıntılı olarak durulacaktır.

2.2. Tesis Yeri Seçim Probleminin Sınıflandırılması

Tesis yeri seçim problemlerinin literatürde farklı açılardan birçok sınıflandırmaya tabi tutulduğu görülmektedir. Daskin tarafından yapılan geniş bir sınıflandırma aşağıda verilmiştir (Daskin, 1995: 10-18);

1. Düzlem (sürekli), ağ veya ayrık yapıda olmasına göre
2. Ağaç problemi ya da genel grafik yapısında olmasına göre
3. Mesafe ölçüsüne göre
4. Yerleştirilecek tesis sayısına göre (çoklu veya tekli)
5. Statik ya da dinamik yerleşim modelleri olmasına göre
6. Deterministik ya da probalistik olmasına göre
7. Tek ya da çoklu ürün modelli olmasına göre
8. Özel sektör veya kamu sektörü problemleri olmasına göre
9. Tek amaçlı ya da çok amaçlı olmasına göre
10. Esnek ya da esnek olmayan talep durumuna göre
11. Kapasite kısıtlı ya da kapasite kısıtsız olmasına göre
12. Talebin en yakın tesisten ya da dağıtılarak karşılanmasına göre
13. Hiyerarşik ya da tek aşamalı olmasına göre
14. İstenen veya istenmeyen tesisler olmasına göre

Tesis yeri seçim problemleri için diğer bir sınıflandırma ise Sule tarafından yapılan sınıflandırmadır. Sule (2001) tarafından tesis yeri seçim problemi p -medyan problemi, p -merkez problemi, kapasite kısıtsız tesis yeri seçim problemi, kapasite kısıtlı tesis yeri seçim problemi, karesel atama problemi olmak üzere temel beş kategoriye ayrılmıştır (Sule, 2001: 22).

Diğer önemli bir sınıflandırma ise tekli tesis yeri seçim ve çoklu tesis yeri seçim olarak yapılmaktadır. Tekli tesis yeri seçim probleminde tek bir hizmet veren tesisin yerinin

belirlenmesi söz konusu iken, çoklu tesis yeri seçim probleminde birden fazla hizmet veren tesisin yerlerinin seçilmesi ve bu tesislerden hizmet alacak olan talep noktalarının minimum maliyet oluşacak şekilde belirlenmesi söz konusu olmaktadır (Küçükdeniz, 2009: 13). Yani öncelikle bir yer seçim kararı verilmekte sonra ise bu tesislere talep noktalarının atanması işlemi yapılmaktadır. Bu çalışmada üzerinde durulan p -medyan problemi, burada yapılan sınıflandırmaya göre ise çoklu tesis yeri seçim problemi sınıfına girmektedir.

Yine yukarıda verilen önemli bir sınıflandırma da kapasite kısıtlı ve kapasite kısıtsız olmak üzere yapılan sınıflandırmadır. Kapasite kısıtı olmayan modelde hizmet veren tesisler müşterilerin tüm taleplerini karşılayabilecek özelliktedir. Kapasite kısıtlı olan modelde ise hizmet veren tesisler belirli bir kapasiteye sahiptir ve bir talep noktası ihtiyacını birden fazla hizmet noktasından karşılamak durumunda kalabilir.

Yapılan sınıflandırmalardan en temel olanlardan birisi de sürekli (continuous), ayrık (discrete) ve ağ (network) tesis yeri seçim modelleri olarak yapılan sınıflandırmadır. Sürekli tesis yeri seçim problemi hizmet veren tesislerin ve talep noktalarının düzlem üzerinde herhangi bir noktaya yerleştirilebildiği yaklaşımdır. Ayrık tesis yeri seçim probleminde ise açılacak tesisler ve talep noktaları sadece şebeke üzerindeki düğümlere yerleştirilebilmektedir. Son model olan ağ modelinde ise talep noktaları şebeke üzerindeki düğümlerde bulunmakta iken hizmet veren tesisler düğümler ya da düğümler arasındaki bağlantılar üzerinde yerleştirilebilir (Daskin, 1995: 10-11). Bu çalışmada ayrık tesis yeri seçim problemi üzerinde durulmuştur. Yani açılacak olan tesisler sadece şebeke üzerindeki düğümlere yerleştirilmektedir.

Bu çalışmanın odaklandığı ayrık tesis yeri seçim modeli konusunda literatürde kabul gören sınıflandırmalardan birisi Daskin tarafından yapılmış olan sınıflandırmadır. Daskin kitabında ayrık tesis yeri seçim problemlerini kapsama problemleri, merkez problemleri, medyan problemleri, sabit maliyetli tesis yerleşim problemleri olmak üzere 4 ana gruba ayırmıştır (Daskin, 1995).

Ayrık tesis yeri seçim modeli konusunda Daskin tarafından yapılan sınıflandırmayı büyük ölçüde kapsayan, daha geniş bir sınıflandırma ise Current ve arkadaşları tarafından yapılmıştır. Bu sınıflandırmada Current ve arkadaşları ayrık tesis yeri seçim problemlerini sekiz ana grupta incelemişlerdir. Bunlar küme kapsama, maksimum kapsama, p -merkez, p -dağılım, p -medyan, sabit maliyetli tesis yeri seçim, ana dağıtım üssü yeri seçim ve maksimum toplam olarak ifade edilebilir (Current v.d., 2001).

Aşağıda Daskin (1995), Sule (2001) ve Current ve arkadaşları (2001) tarafından yapılan sınıflandırmalarda bahsedilen tesis yeri seçim modelleri kısaca açıklanmıştır.

P -medyan problemi; p adet tesisin n adet düğümden oluşan şebeke üzerinde minimum maliyet oluşacak şekilde yerleştirilmesi ve yerleştirilen bu tesislerden hizmet alacak talep noktalarının belirlenmesi problemidir. Burada bahsedilen minimum maliyet; zaman, para, toplam mesafe veya buna benzer herhangi bir ölçüt olabilir. Toplam maliyeti minimize etmek ana amaç olduğundan dolayı bu problem minimum problemi veya Weber problemi olarak da isimlendirilmektedir. Eğer problemde talep noktasıyla ilişkili bir ağırlık söz konusu ise bu problem ağırlıklı p -medyan problemi olarak isimlendirilir. Ağırlıklı p -

medyan problemi, problemdeki tüm talep noktalarının amaç fonksiyonunu eşit miktarda etkilemediği durumları ifade etmektedir (Sule, 2001: 21-22).

P-merkez problemi; talep noktalarının önceden belirlenmiş olan p adet hizmet veren tesise olan maksimum mesafesinin minimize edilmesine çalışılan problemlerdir. P -merkez problemi daha çok acil servis birimlerinin yerleşimi için kullanılan bir modeldir. Bir örnekle açıklanacak olursa itfaiye merkezlerinin bir şehirde yerleştirilmesi sırasında, itfaiyenin şehirdeki her hangi bir noktaya ulaşabileceği maksimum zamanın minimize edilmesi amaçlanmaktadır (Sule, 2001: 21-22).

Kapasite kısıtsız tesis yeri seçim problemi; toplam maliyeti minimize etmeyi amaçlayan bir modeldir. Bu problemde yeni tesis açmaktan dolayı ortaya çıkan sabit maliyet, açılan tesisin nereye yerleşeceğine bağlı olarak toplam maliyet fonksiyonu içerisinde yer almaktadır. Kapasite kısıtsız tesis yeri seçim probleminde açılacak tesis sayısı maliyeti minimize edecek şekilde belirlenmektedir. Yani başlangıçta açılacak tesis sayısı belirlenmiş değildir. Bu modelde hizmet veren tesislerin kapasite sınırı olmadığı için bir talep noktasını birden fazla hizmet noktasına bağlamak hiçbir zaman karlı olmayacaktır, yani bir talep noktası sadece bir hizmet noktasından ihtiyaçlarını karşılamaktadır (Sule, 2001: 21-22).

Kapasite kısıtlı tesis yeri seçim problemi; temel olarak kapasite kısıtsız tesis yeri seçim problemine benzemekle birlikte, farklı olan yönü bu problemde hizmet veren tesislerin sınırlı bir kapasiteye sahip olmasıdır. Bu modelde problemin optimum çözümü için talep noktaları sadece bir tesisten değil birden fazla tesisten taleplerini karşılamak durumunda kalabilmektedir (Sule, 2001: 21-22).

Karesel atama problemi; birbirleri arasındaki akışların tanımlanmış olduğu n adet tesisin n adet konuma aynı anda yerleştirilmesi problemidir. Bu problemde amaç, akış ve uzaklık parametrelerinin çarpımı ile oluşacak toplam mesafeyi minimize etmektir. Bu tür problemlerde n adet tesisin yerleştirilmesi gerekiyorsa olası farklı çözüm sayısı $n!$ olmaktadır. Bu ise problem boyutunun büyümesi ile birlikte çok güçlü bilgisayarların bile normal sürelerde çözemeyeceği kadar büyük bir problem tipidir (Sule, 2001: 22).

Küme kapsama problemi modeli; tüm talep noktalarını belirli bir hizmet seviyesinde kapsayacak en az sayıda hizmet verecek tesisi belirlemeyi amaçlamaktadır. Bu modelde her talep noktasının en azından bir tesise atanması kısıtı vardır. Açılan her bir hizmet veren tesisin sabit maliyeti de söz konusu olduğu için bu model toplam sabit maliyetin minimum yapılması amaçlandığında da kullanılabilir (Current v.d., 2001: 86).

Maksimum kapsama problemi; belirli bir hizmet veren tesis sayısı kısıtı altında kapsanan talep noktası sayısını maksimum yapmayı amaçlamaktadır. Yani bu modelde bütün talep noktalarının kapsanması şartı yerine belirli sayıda hizmet verecek tesisle (p) en fazla talep noktasına hizmet verilmesi hedeflenmektedir (Current v.d., 2001: 88-89).

P-dağılım problemi; diğer tesis yerleşim modellerinden farklı olarak p -dağılım probleminde hizmet verecek tesislerin arasındaki mesafeye odaklanılmaktadır. Burada amaçlanan hizmet verecek tesislerin birbirleri arasındaki en kısa mesafenin maksimum yapılmasıdır. Bu modelde örnek olarak bayi yerleşiminde bayiler arasındaki

mesafenin birbirlerine zarar vermeyecek ama en yakın şekilde ayarlanması verilebilir (Current v.d., 2001: 91-92).

Sabit maliyetli tesis yerleşim problemi; optimum tesis sayısının belirlenmesi, bu tesislerin en uygun noktalara yerleştirilmesi ve talep noktalarının bu tesislere minimum maliyet oluşacak şekilde atanmasını amaçlamaktadır. Kısaca modelde toplam tesis açma ve taşıma maliyeti birlikte minimize edilmeye çalışılmaktadır. Bu modelde diğer tesis yerleşim modellerinden farklı olarak bir talep noktası kapasite kısıtı olmasından dolayı en yakın hizmet veren tesise atanamayabilir (Current v.d., 2001: 93-94).

Ana dağıtım üssü yerleşim problemi; topla-dağıt ağ yapısında kullanılan bu modelin ana amacı toplam taşıma maliyeti ve teslimat süresi minimize edilecek şekilde ana dağıtım üslerinin yerleştirilmesidir. Diğer tesislerden gelen akışlar ana dağıtım üssünde toplanır ve gruplandırılır. Akışların tamamı ya diğer ana dağıtım üslerine ya da doğrudan son varış noktalarına gönderilmek üzere bu merkezden ayrılır. Genellikle lojistik sistemlerinde kullanılan bir model olup özellikle uzun mesafeli taşımalarda araç kapasitelerinin daha iyi kullanılması ve hızlı taşıma hedeflenmektedir (Current v.d., 2001: 94-95).

Maksimum toplam problemi; bu model ortalama mesafe modelleri olarak bilinen p -medyan, sabit maliyetli yerleşim ve ana dağıtım üssü yerleşim problemlerinden farklı olarak açılacak olan hizmet veren tesislerin talep noktalarından maliyeti en düşük tutacak şekilde olabildiğince uzak olmasını amaçlamaktadır. Bu model daha çok geri dönüşüm tesisleri, enerji üretim merkezleri, çöp toplama merkezleri ve atık su arıtma tesisleri gibi yerleşim merkezlerine yakın olması istenmeyen tesislerin en düşük maliyet oluşacak konumlara yerleştirilmesinde kullanılmaktadır (Current v.d., 2001: 96-97).

3. P-MEDYAN PROBLEMİ

P -medyan problemi tesis yeri seçim problemleri içerisinde en çok bilinen ve çözümü amacıyla literatürde birçok çalışma yapılmış olan bir tesis yerleşim ve atama modelidir (Alp v.d., 2003). P -medyan problemi minisum (minimum toplam) tesis yerleşim problemleri sınıfına girmektedir. Minisum problemleri ilk olarak Kuehn ve Hamburger (1963), Hakimi (1964), Manne (1964) ve Balinski (1965) tarafından formülize edilmiştir. P -medyan probleminin ayrıntılı olarak formülasyonunu ise ilk defa 1964 yılında Hakimi yapmıştır. Hakimi sadece problemi formülize etmekle kalmamış aynı zamanda üçgen eşitsizliği olan bir şebekede optimum yerleşimin düğümler üzerinde olduğunu ispatlamıştır (Marianov ve Serra, 2004).

P -medyan probleminin en temel hali 1-medyan problemi olarak da isimlendirilen, şebeke üzerinde tüm talep noktalarına hizmet verecek olan 1 adet medyan tesisin yerinin belirlenmesini amaçlayan modeldir. Sadece bir tesis yeri seçilen bu problemde amaç toplam maliyetin minimum yapılmasıdır. Literatürde p ile ifade edilen medyan noktası sayısının birden fazla olduğu problemlere ise genel olarak p -medyan problemi adı verilmiştir.

3.1. *P*-medyan Probleminin Tanımı

P-medyan problemi kısaca n adet talep noktasına hizmet verecek olan p adet tesisin tüm sistemin ağırlıklı maliyetini minimize edecek şekilde şebeke üzerinde yerleştirilmesi ile ilgilenmektedir (Hakimi, 1965). Burada bahsedilen maliyet talep noktaları ile hizmet noktaları arasındaki mesafe, süre ya da parasal tutar olabilmektedir. *P*-medyan probleminde p adet tesis sadece şebeke üzerindeki düğümlere yerleştirilebilmektedir. *P*-medyan problemi bu özelliği ile aynı zamanda ayrık tesis yeri seçim problemleri kategorisi içerisinde yer almaktadır.

P-medyan probleminin bir kombinatoriyal NP-Zor optimizasyon problemi olduğu Cornuejols ve diğerleri (1977), Kariv ve Hakimi (1979) tarafından ispat edilmiştir. Kombinatoriyal optimizasyon ayrık çözüm uzayına sahip problemler için optimum çözümü arayan metotlara verilen genel isimdir. Bu metotla amaç fonksiyonunu optimize eden kesikli karar değişkenlerinin değerlerinin bulunması hedeflenmektedir. Gezgin satıcı problemi, en kısa yol problemi, atama problemleri, araç rotalama problemleri ve benzeri birçok problem bu yapıdaki problemlerdir.

Kombinatoriyal problemler çözülmesi kolay ve zor olan iki tür problem yapısını içinde barındırmaktadır. Kolay olanlar *P* sınıfı, zor olanlar ise NP-Zor sınıfı olarak guruplandırılmaktadır. Bir problem *P* sınıfına dahilse, bu problemin optimum çözümüne ulaşılabilir. NP-Zor sınıfına giren problemler ise optimum çözümü kabul edilebilir sürede elde edilemeyen problemlerdir. Karar problemlerinin bir türü olan *P* sınıfı problemler bazı algoritmalar kullanılarak, çözüm süresi problem boyutunun polinom fonksiyonu olarak artan bir sürede çözülebilir. Bir örnek verilecek olursa n adet düğüme sahip en kısa yol problemi Dijkstra's algoritması ile çözülebilir. Kullanılan Dijkstra's algoritmasının çözüm süresi $O(n^2)$ ile sınırlıdır (Cook, 2011). Burada büyük O bir fonksiyon değil sadece bir gösterim şeklidir. Bu gösterim algoritmaların performansları için önemli bir ölçüt olan işlem sayısının büyüme hızını ifade etmektedir. İkinci dereceden bir denklemde n değeri büyüdükçe n^2 baskın hale geleceği için büyük O gösteriminde sadece baskın terim olan n^2 yer almaktadır.

NP-Zor türü problemlerin çözümü için polinom süreli bir algoritma yoktur. Bu tür problemlerin özelliği problemin çözüm süresinin problem boyutuna bağlı olarak üstel şekilde artmasıdır. Dolayısıyla bu sınıfa giren problemlerin kesin çözümünün bulunması hayli zordur. Kuadratik atama, tesis yeri seçim, gezgin satıcı, araç rotalama gibi problemler NP-Zor sınıfına giren problemlere örnek olarak verilebilir.

NP-Zor sınıfına giren ve bu çalışmanın ana konusu olan *p*-medyan tesis yeri seçim problemi için kullanılan çözüm yaklaşımları üç ana tip üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bunlar, tam çözüm metotları, sezgisel algoritmalar ve meta sezgisel algoritmalar şeklinde ifade edilebilir (Jamshidi, 2009).

Çözüm metotlarının *p*-medyan problemlerinde kullanılma oranları karşılaştırıldığında sezgisel ve meta sezgisel yaklaşımlar açık bir şekilde önde görünmektedir. İlerideki bölümlerde bu konu üzerinde ayrıca durulacaktır.

3.2. P-medyan Probleminin Matematiksel Modeli

P-medyan problemi sadece tesis yeri seçim problemi değil aynı zamanda yerleştirilen tesislerden hizmet alacak talep noktalarının en yakın tesise atanmasını da içeren bir modeldir. Modelin amacı talep ağırlıklı toplam mesafeyi minimum yapacak şekilde açılacak olan p adet tesisin en uygun yerlerinin (şebeke üzerindeki düğümler) belirlenmesidir.

P-medyan probleminin varsayımları aşağıdaki gibidir (Jamshidi, 2009);

1. Maliyet ve mesafe arasında doğrusal bir ilişki vardır
2. Açılacak tesis sayısı bilinmektedir
3. Zaman sınırı yoktur
4. Hizmet veren tesislerin kapasite sınırı yoktur
5. Tesis açma maliyeti yoktur
6. Sabit müşteri talebi söz konusudur
7. Bütün tesisler eşit özelliktedir
8. Problem yapısı ayrıktır (sadece düğümler üzerinde tesis açılabilir)
9. Tesislerin açılacağı noktalar belirlidir

P-medyan probleminde tesislerin sadece şebeke üzerindeki düğümler üzerinde açılabilir olması koşulu, tesislerin şebeke üzerinde herhangi bir yere yerleştirildiği sürekli modele göre daha kötü bir çözüm ortaya çıkaracağı fikrini doğurabilir. Fakat Hakimi (1965) tarafından p -medyan probleminde p adet tesisin şebeke üzerindeki düğümlere yerleştirildiğinde de en az bir optimum sonuç olduğu ispatlanmıştır (Küçükdeniz, 2009). Yani problemin ayrık yapıda olması optimum sonuca ulaşılması konusunda engel teşkil etmemektedir. P-medyan probleminin bu özelliğini dikkate alarak n adet düğüm ve açılacak p adet tesisten oluşan bir problemin muhtemel çözüm sayısını aşağıdaki eşitlik (1) ile gösterebiliriz.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (1)$$

P-medyan probleminin matematiksel formülasyonu ilk defa ReVelle ve Swain tarafından yapılmıştır (ReVelle ve Swain, 1970). Formülasyondaki notasyonlarda zamanla bazı küçük değişiklikler yapılmış olmakla birlikte büyük ölçüde orijinali ile aynıdır. Bu çerçevede ReVelle ve Swain tarafından yapılan formülasyonu temel alan, Rolland ve arkadaşlarının yapmış olduğu p -medyan problemine ait matematiksel formülasyon (Rolland v.d., 1996) aşağıdaki gibidir.

Amaç Fonksiyonu:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i d_{ij} z_{ij} \quad (2)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} = 1 \quad \forall i \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$z_{ij} \leq y_j \quad \forall i, j \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = p \quad (5)$$

$$z_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Karar Değişkenleri:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i \text{ müşterisi } j \text{ tesisine atanmışsa} \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{eğer } j \text{ noktasında bir tesis açılmışsa} \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

Burada;

n = toplam talep noktası sayısı

a_i = i noktasındaki talep

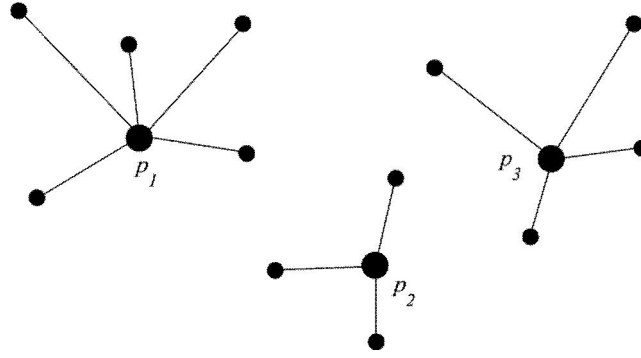
d_{ij} = i noktası ile j noktası arasındaki en kısa mesafe

p = yerleştirilecek olan hizmet verecek tesis (medyan) sayısı

Eşitlik 2 ile gösterilen amaç fonksiyonuyla hizmet veren tesisler ile talep noktaları arasında oluşan toplam maliyeti minimize etmek amaçlanmaktadır. Eşitlik 3 ile bir talep noktasının tüm taleplerinin sadece bir tesisten karşılanması kısıtı verilmiştir, yani her talep noktası yalnız bir tesise atanmaktadır. Eşitlik 4 ile açık olmayan bir tesise talep noktası ataması yapılmaması şartı ifade edilmekte, yani tutarlılık sağlanmaktadır. Eşitlik 5 ise açılacak olan tesis sayısını p adet ile sınırlandırmaktadır.

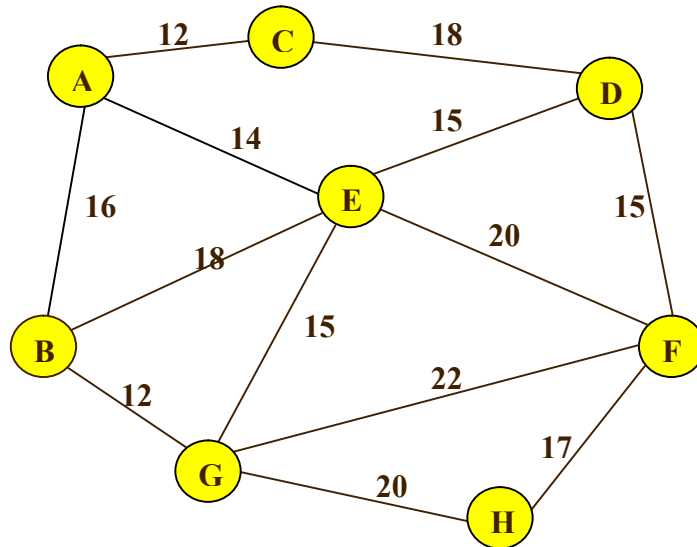
3.3. P-medyan Probleminin Gösterimi ve Örnek Problem

Şebeke üzerinde gösterilen p -medyan problemi belirli sayıda düğümden ve bu düğümler arasındaki bağlantılardan oluşan bir çizgedir. Bu çizge, üzerinde düğümler arası bağlantılara ait mesafelerin de verildiği bir yapıdır. Bu bağlamda şebeke üzerindeki düğümler müşterilerin taleplerini karşılayan potansiyel tesisler ya da müşterilerdir. Bir minimum optimizasyon problemi olan p -medyan problemi medyan tesislerin talep noktalarının ihtiyaçlarını karşılarken minimum maliyet oluşacak şekilde şebeke üzerinde yerleştirilmesini amaçlamaktadır. Aşağıda Şekil 1’de çözümü yapılmış tipik bir p -medyan probleminin görünümü verilmiştir. Burada p noktaları hizmet veren medyan tesisleri bu tesislere bağlı noktalar ise talep düğümlerini işaret etmektedir.



Şekil 1: Tipik Bir P -medyan Probleminin Çözümü ($n=15, p=3$)

P -medyan probleminin gösterimi, medyan tesislerin belirlenmesi ve talep düğümlerinin tesislere atanması aşamaları bağlantılara ait maliyetlerin verildiği bir örnek problem ile gösterildiğinde daha iyi anlaşılacaktır. Bu çerçevede örnek bir problem aşağıda Şekil 2’de verilmiştir. Örnek problem üzerinde Daskin’ın kullandığı miyopik sezgisel algoritma kullanılarak p -medyan probleminin çözüm aşamaları incelenecektir.



Şekil 2. Örnek Problem ve Şebeke Yapısıyla Gösterimi

Örnek problemdeki aday tesislerde herhangi bir kapasite kısıtı yoktur. Kapasite kısıtı olmadığı için her bir müşteriye (talep noktası) ait talebinin sadece bir tesisten karşılanması optimum değeri verir. Örnekte sabit maliyetlerin eşit olduğu varsayımıyla hareket edilmektedir.

P -medyan probleminde olası çözüm sayısı $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ olarak ifade edilmişti, bu

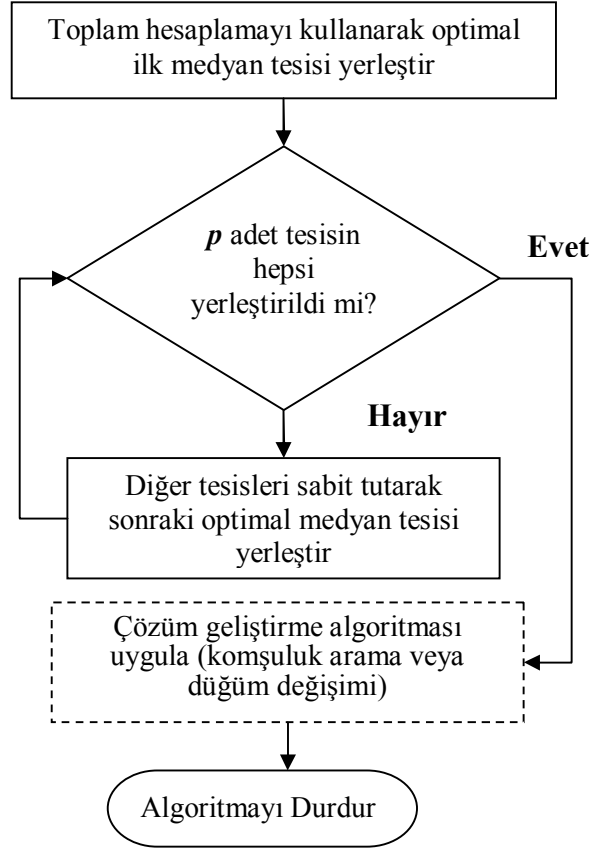
çerçevede örnek problemi değerlendirirsek $p=2$ alındığında olası çözüm sayısı $\frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$ olarak hesaplanır. Her bir düğümden, her bir düğüme en kısa yollar

hesaplandığında aşağıda Tablo 1 ile verilen maliyet matrisi elde edilir.

Tablo 1. Örnek Probleme Ait Maliyet Matrisi

Düğüm i	Tesis j							
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	16	12	29	14	34	28	48
B	16	0	28	33	18	34	12	32
C	12	28	0	18	26	33	40	50
D	29	33	18	0	15	15	30	32
E	14	18	26	15	0	20	15	35
F	34	34	26	15	20	0	22	17
G	28	12	40	30	15	22	0	20
H	48	32	50	32	35	17	20	0

Bu örnek problemin çözümünde aşağıdaki Şekil 3'te verilen miyopik sezgisel algoritma kullanılacaktır.



Şekil 3. Örnek Problemin Çözümü İçin Kullanılan Sezgisel Algoritma (Daskin, 1995)

Aşağıda Tablo 2’de verilen toplam maliyet matrisinden de anlaşılacağı üzere, $p=1$ olduğunda, yani sadece tek bir tesis açılacağı durumda en düşük maliyeti veren E düğümü medyan tesis olarak belirlenir. Diğer ifadeyle tüm taleplerin E tesisinden karşılandığında oluşacak toplam maliyet 143 olmaktadır.

Tablo 2. Maliyet Matrisi ve En Düşük Maliyetli Tesisin Seçilmesi

Düğüm	Tesis j							
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	16	12	29	14	34	28	48
B	16	0	28	33	18	34	12	32
C	12	28	0	18	26	33	40	50
D	29	33	18	0	15	15	30	32
E	14	18	26	15	0	20	15	35
F	34	34	26	15	20	0	22	17
G	28	12	40	30	15	22	0	20
H	48	32	50	32	35	17	20	0
Toplam	181	173	200	172	143	175	167	234

Sezgisel algoritmanın adımlarını uyguladığımızda, ikinci medyan tesisi yerleştirmek için maliyet matrisinde E tesisinin tüm değerlerini 0 (sıfır) yaparak ikinci en az maliyete sahip tesisi buluruz.

Tablo 3. Maliyet Matrisi ve En Düşük Maliyetli 2. Tesisin Seçilmesi

Düğüm <i>i</i>	Tesis <i>j</i>							
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	16	12	29	14	34	28	48
B	16	0	28	33	18	34	12	32
C	12	28	0	18	26	33	40	50
D	29	33	18	0	15	15	30	32
E	0	0	0	0	0	0	0	0
F	34	34	26	15	20	0	22	17
G	28	12	40	30	15	22	0	20
H	48	32	50	32	35	17	20	0
Toplam	167	155	174	157	143	155	152	199

Maliyet matrisine göre ikinci en düşük maliyeti veren tesis G düğümüdür. Bu durumda ikinci ve son medyan tesisimiz G düğümü olacaktır.

Tablo 4. Belirlenen Medyan Tesisler ve Maliyetleri

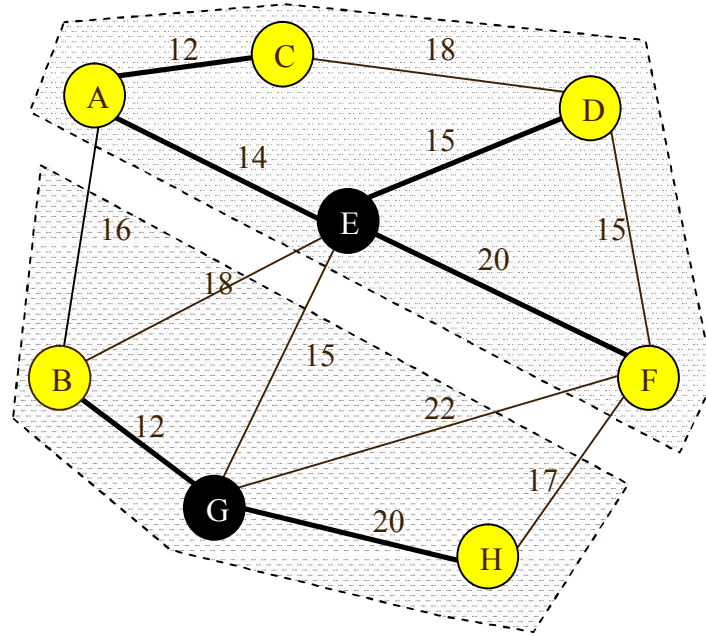
Tesis No	Tesis	Toplam Maliyet
1	E	143
2	G	152

Örnek problemin çözümünün birinci aşaması olan medyan tesislerin belirlenmesi işlemi burada tamamlanmaktadır. Bu aşamadan sonra, her bir talep noktası kendisine en yakın medyan tesise atanmalıdır.

Atama işlemi yapılırken her bir talep noktasının belirlenen medyan tesislere olan uzaklığı kontrol edilir. Örnekte talep noktaları olan A,B,C,D,F,H düğümleri medyan tesisler olan E ve G tesislerinden hangisine daha yakın ise o tesise atanır. Aynı zamanda medyan tesisler olan E ve G kendilerine atanacaktır. Burada bahsedilmesi gereken bir konu bir talep noktasının her iki medyan tesise de eşit mesafede olması durumudur. Böyle bir durumda talep noktası medyan tesislerden herhangi birisine keyfi olarak atanabilir (Daskin, 1995: 213). Tablo 1’de verilen maliyet matrisi dikkate alınarak ve yukarıda belirtilen kurala göre atamalar yapıldığında aşağıdaki Tablo 5’te verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 5. Medyan Tesisler ve Bu Tesislere Atanan Talep Noktaları

Tesis No	Tesis	Tesise Atanan Talep Noktaları
1	E	A, C, D, E, F
2	G	B, G, H



Şekil 4. Seçilen E ve G Medyan Tesisleri ve Tesislere Atanan Talep Noktaları

Bu atama sonuçlarına göre ortaya çıkan toplam maliyet tablosu Tablo 6'daki gibi olacaktır.

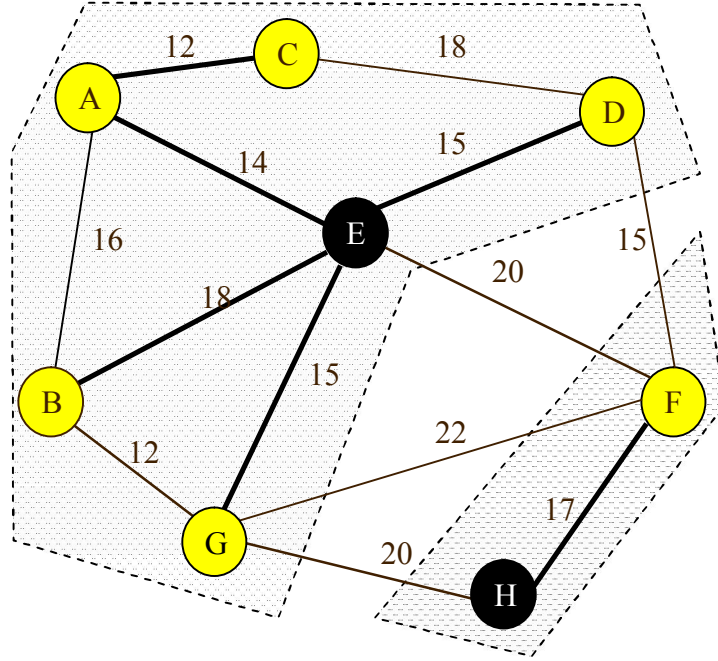
Tablo 6. Seçilen E ve G Tesislerine Ait Maliyetler

Talep Noktaları	Tesisler	
	E	G
A	14	0
B	0	12
C	26	0
D	15	0
E	0	0
F	20	0
G	0	0
H	0	20
Sütun Toplamı	75	32
Toplam Maliyet	107	

Toplam maliyet E ve G tesislerinin maliyetlerinin toplamı olan 107 değeri olacaktır. Görüldüğü gibi, tek başına E tesisinin açılmasının maliyeti 143 iken, E ve G tesislerinin birlikte açılması durumunda maliyet 36 birim azalarak 107 olarak gerçekleşmiştir. Bu çerçevede 3 tesis açılmasının maliyeti ayrıca araştırılabilir.

Bu aşamadan sonra algoritmada isteğe bağlı olarak sunulan komşuluk arama veya düğüm değişimi yöntemlerinden birisi ya da her ikisi ayrı ayrı kullanılarak çözümün iyileştirilmesi için çalışılabilir.

Aşağıda Şekil 5'te medyan tesislerden G düğümünün H düğümü ile yer değişimi ve sonrasında yapılan en yakın tesise atama işlemleri sonucu ortaya çıkan durum verilmiştir.



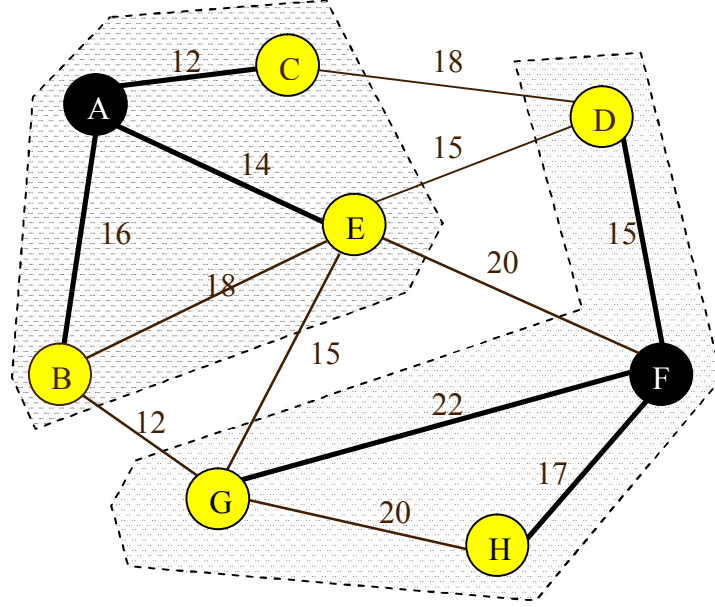
Şekil 5. Seçilen E ve H Medyan Tesisleri ve Tesislere Atanan Talep Noktaları

Tablo 7. Seçilen E ve H Tesislerine Ait Maliyetler

Talep Noktaları	Tesisler	
	E	H
A	14	0
B	18	0
C	26	0
D	15	0
E	0	0
F	0	17
G	15	0
H	0	0
Sütun Toplamı	88	17
Toplam Maliyet	105	

Tablo 7'de de görüldüğü gibi ilk durumdaki medyan tesislerden G düğümü H ile değiştirildiğinde yeni atamalar toplam 105 maliyetini vermektedir. Bu ise toplam maliyette 2 birimlik bir azalmayı ifade eder.

Bundan sonra yine düğüm değiştirme işlemine devam edildiğinde toplam maliyette iyileşme olup olmayacağı incelenmeye çözüm gelişmez oluncaya kadar devam edilecektir. Bu çerçevede aşağıda Şekil 6'da medyan tesislerden G düğümünün A düğümü ile, H düğümünün ise F düğümü ile yer değişimi ve sonrasında yapılan en yakın tesise atama işlemleri sonucu ortaya çıkan durum verilmiştir. Bu adımda birinci adımdan farklı olarak her iki medyan tesis çözümü iyileştiren komşuluğundaki bir tesisle değiştirilmiştir.



Şekil 6. Seçilen A ve F Medyan Tesisleri ve Tesislere Atanan Talep Noktaları

Tablo 8. Seçilen A ve F Tesislerine Ait Maliyetler

Talep Noktaları	Tesisler	
	A	F
A	0	0
B	16	0
C	12	0
D	0	15
E	14	0
F	0	0
G	0	22
H	0	17
Sütun Toplamı	42	54
Toplam Maliyet	96	

Tablo 8'de görüldüğü gibi ilk durumdaki medyan tesislerden G düğümü H ile değiştirildiğinde yeni atamalar toplam 96 maliyetini vermektedir. Bu ise toplam maliyette bir önceki adımdaki maliyete göre 9 birimlik bir azalmayı ifade eder.

Bu çözüm geliştirme amacıyla yapılan komşuluk arama işlemi her defasında çözümü geliştiremeyebilir. Burada konunun fazla uzamaması için çözümü geliştirmeyen değişimler verilmemiştir.

Görüldüğü gibi Daskin tarafından kullanılan ve bir tür miyopik algoritma olan bu sezgisel çok küçük boyutlu bir problemde bile çok fazla işlem gerektirmektedir. P -medyan problemine özel olarak geliştirilen diğer sezgisellerde de benzer durumlar söz konusudur. Bu yüzden büyük boyutlu p -medyan problemlerinin çözümünde bilgisayarlardan yararlanmak ve dolayısıyla meta sezgisel algoritmaları kullanmak neredeyse bir zorunluluktur.

3.4. P -medyan Test Problemleri

P -medyan probleminin çözümü için geliştirilen yöntemler genellikle optimum çözümü bilinen test problemleri kullanılarak denenmekte böylece başarımlar düzeyleri konusunda bir sonuç elde edilmektedir. Burada temel yaklaşım optimum çözümü bilinen problemlerde sonuca ulaşan yada az hatalara sahip çözüm elde eden metotların gerçek hayat problemlerinde de başarıyla kullanılabileceği varsayımdır. Optimum çözümü bilinmeyen problemler için ise birden fazla yöntemin uygulanması ve sonuçların birbirleriyle karşılaştırılması yoluyla yöntemin başarısı konusunda karar verilmesi tercih edilmektedir. Literatürde yaygın olarak kullanılan test problemleri aşağıda kısaca tanımlanmıştır.

Test problem setlerinden birincisi literatürde üzerinde yoğun olarak çalışılan OR-Library test problemleri olarak ifade edilen ve Beasley (1990) tarafından yayınlanan problem setidir. Bu test problem setinin tamamının optimum çözümleri Beasley tarafından verilmiştir (Beasley, 1990). OR-Library problem seti toplam 40 ayrı problemden oluşmaktadır. Problemler sekme ile ayrılmış metin dosyaları halinde olup her bir dosya içinde şebeke üzerindeki toplam düğüm sayısı, düğümler arasındaki bağlantı adedi ve açılacak olan tesis sayısı ile aralarında bağlantı olan düğümler ile bu düğümler arası mesafeler verilmiştir. Bu problem dosyaları pmed1, pmed2 şeklinde başlayıp pmed40'a kadar devam eden şekilde isimlendirilmiştir. Bu problem yapısında her bir düğüm potansiyel tesis ve aynı zamanda potansiyel talep noktası özelliğindedir. OR-Library problem setindeki problemlerden birincisi 100 düğüm, 5 medyan tesis ve 200 düğümler arası bağlantıdan oluşurken 40'ıncı problemde 900 düğüm, 90 medyan tesis ve 16200 düğümler arası bağlantı bulunmaktadır. Problemlerin geneline baktığımızda açılacak tesis sayısı (p) 5 ile 200 arasında değişirken, şebekedeki düğüm sayısı (n) ise 100 ile 900 arasında değişmektedir.

Literatürde üzerinde çalışılan diğer test problemi seti ise Galvao problem seti olarak bilinen problem setidir. Bu problem seti Galvao ve ReVelle (1996) tarafından tanımlanmış fakat p -medyan problemine ilk defa Senne ve Lorena (2000) tarafından uygulanmıştır. Bu problem seti 100 ve 150 düğümden oluşan iki şebeke yapısıdır. Bu iki şebekenin 5 ile 50 arasında değişen farklı p değerleri (açılacak medyan tesis sayısı) için 8'er farklı türü geliştirilmiştir. Alp ve arkadaşları tarafından Galvao problem seti ve ayrıca 4 farklı daha problem seti bir araya toplanmış ve çözümü için GA ile geliştirilen bir model uygulanmıştır. Problem seti Alp ve Erku'un web sayfalarında yayınlanmıştır (Alp v.d., 2003). Galvao problem seti

OR-Library problem setinden görece olarak daha küçük boyuttaki problemlerden oluşmaktadır.

TSP-Lib test problemleri aslında gezgin satıcı problemi için geliştirilmiş bir test problemi seti olmakla birlikte literatürde bazı çalışmalarda kullanılmıştır. Problemler TSP-Lib web sitesinden indirilebilmektedir.

Rolland ve arkadaşlarına ait test problemleri ise 1996 yılında Rolland ve arkadaşları tarafından ilk defa test edilmiş öklit uzaklığı şeklinde olmayan bir problem setidir. Bu problem seti 13 ile 500 arasında farklı düğüm sayılarına sahip 100 test problemini içermektedir.

Resende ve Werneck test problemleri tamamen rastgele uzaklık matrislerinden oluşmakta olan ve 2003 yılında tanıtilen problem setidir (Resende ve Werneck, 2003). Problemlerde n değerleri sırasıyla 100, 250, 500 ve 1000 şeklindedir ve problem dosyaları sırasıyla $rw100$, $rw250$, $rw500$, $rw1000$ olarak isimlendirilmiştir. Bu problem setinde farklı p değerlerinin çözüm için denenmesi yoluyla uygulama yapılmaktadır.

Kochetov test problemleri küçük boyutlu p -medyan test problemleri olup n değerleri 100 ile 144 arasında, p değerleri ise yaklaşık 10 gibi değerlerdir (Kochetov, 2001).

Son olarak test problemlerine Senne and Lorena test problemleri ilave edilebilir. Bu test problemi seti aslında OR-Library test problemlerine ek mahiyetindedir. Burada ek olarak sunulan 3 yeni problem söz konusudur. Sunulan bu 3 problem, $sl700$ problemi OR-Library $pmed34$ ile aynı grafiğe sahiptir farklı olarak p değeri 233 olarak belirlenmiştir. Yine $sl800$ OR-Library $pmed37$ ile aynı şebeke yapısına sahip fakat p değeri 267 alınmıştır son olarak $sl900$ ise OR-Library $pmed40$ ile aynı şebekeye sahip iken p değerinin 300 olması tek farkıdır (Resende ve Werneck, 2004).

4. P-MEDYAN PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI

P -medyan problemi konusunda literatürde yapılmış olan çalışmalar incelendiğinde temel olarak dört farklı makale türü ile karşılaşmaktadır. Bunlar sırasıyla;

- Problem formülasyonu ile ilgili yapılmış olan çalışmalar
- Kesin çözüm yöntemleri ile yapılmış çalışmalar
- Sezgisel yöntemlerle yapılmış çalışmalar
- Meta sezgisel algoritmalar kullanılarak yapılmış olan çalışmalar

olarak sayılabilir.

Aşağıda verilen Tablo 9'da p -medyan probleminin formülasyonu ile ilgili çalışmalar ve problemin NP-zor olduğunu ispatlama konusunda yapılmış çalışmalar birlikte verilmiştir.

Tablo 9. *P*-medyan Probleminin Formülasyonu ve Zorluğu İle İlgili Çalışmalar

Hakimi, 1964	<i>P</i> -medyan probleminin ilk defa tanıtılması
Balinski, 1965	Tamsayılı Programlama Formülasyonu
Efroymsen ve Ray 1966	Tamsayılı Programlama
ReVelle ve Swain, 1970	Lineer Programlama Formülasyonu
Kariv ve Hakimi, 1979	Problemin NP-Zor olduğu üzerine çalışma
Garey ve Johnson, 1979	Problemin NP-Zor olduğu üzerine çalışma
Rosing v.d., 1979	Lineer Programlama Gevşetmesi Formülasyonu
Church, 2003	Alternatif <i>P</i> -medyan Formülasyonu (COBRA)
Berman ve Drezner, 2008	Alternatif <i>P</i> -medyan Formülasyonu
Goldengorin ve Krushinsky, 2011	<i>P</i> -medyan probleminin kompleksliği üzerine çalışma

Tablo 10 ise *p*-medyan probleminin çözümünde kesin çözüm yöntemlerinin kullanıldığı makalelerin verilmiş olduğu tablodur.

Tablo 10. *P*-medyan Problemi İçin Kesin Çözüm Teknikleri Kullanılan Çalışmalar

Hakimi, 1965	Direk hesaplama yöntemi
Hribar ve Daskin, 1997	Matematik Programlama
Avella ve Sassano, 2001	Matematik Programlama
Ceselli, 2003	Lagranj Gevşetmesi ve Alt Gradyan
Lorena ve Sene, 2003	Lagranj Gevşetmesi ve Yerel Arama
Senne v.d., 2005	Sütun Geliştirme ve Lagranj Gevşetmesi
Beltran v.d., 2006	Lagranj Gevşetmesi
Baiou ve Barahona, 2011	Lineer Programlama Gevşetmesi

Aşağıda verilen Tablo 11’de ise *p*-medyan probleminin çözümü amacıyla sezgisel algoritmalar kullanılan çalışmalardan önemli görülenler verilmiştir.

Tablo 11. *P*-medyan Problemi İçin Sezgisel Çözüm Teknikleri Kullanılan Çalışmalar

Teitz ve Bart ,1968	Yerel Arama
Whitaker , 1983	Açgözlü Sezgisel
Ardalan, 1988	Ardalan Sezgiseli
Captivo, 1991	Bileşik (iki prosedürlü)
Pizzolato, 1994	Bileşik
Hansen ve Mladenovic, 1997	Yerel Arama
Rosing v.d., 1999	Gamma Sezgiseli
Resende ve Werneck, 2003	Düğüm Değişimi
Arya v.d., 2004	Yerel Arama
Caccetta ve Dzator, 2005	Bileşik
Ashayeri v.d., 2005	Düğüm Değişimi
Chrobak v.d., 2006	Ters Açgözlü Sezgisel
Tseng ve Wu, 2009	Yerel Arama
Lim v.d., 2009	Lloyd Algoritması ve Düğüm Değişimi

Son olarak ise *p*-medyan probleminin çözümü için meta sezgisel algoritmaların kullanıldığı makaleler aşağıda Tablo 12’de verilmiştir.

Tablo 12. *P*-medyan Problemi İçin Meta Sezgisel Çözüm Teknikleri Kullanılan Çalışmalar

Hosage ve Goodchild, 1986	Genetik Algoritma
Glover, 1990	Tabu Arama
Moreno-Perez v.d., 1994	Tabu Arama ve Tavlama Benzetimi
Righini, 1995	Tavlama Benzetimi
Rolland v.d., 1996	Tabu Arama
Voss, 1996	Tabu Arama
Maniezzo v.d., 1998	Bionomik Algoritma (GA temelli)
Rosing v.d., 1998	Tabu Arama
Dvoretz, 1999	Genetik Algoritma
Estivill-Castro ve Torres-Velazquez, 1999	GA ve Düğüm Değişimi
Chiyoshi ve Galvao, 2000	Düğüm Değişimi ve Tavlama Benzetimi
Chiou ve Lan, 2001	Genetik Algoritma
Bozkaya v.d., 2002	Genetik Algoritma
Garcia-Lopez v.d., 2002	Değişken Komşuluk Arama (VNS)
Merino ve Perez, 2002	Yapay Sinir Ağı
Salhi, 2002	Tabu Arama
Alp v.d., 2003	Genetik Algoritma

Crainic v.d., 2003	Değişken Komşuluk Arama
Merino v.d., 2003	Yapay Sinir Ağı
Levanova ve Loresh, 2004	Karınca Kolonisi Optimizasyonu
Correa v.d., 2004	Genetik Algoritma
Resende ve Werneck, 2004	Açgözlü Rastgele Adaptif Arama Prosedürü
Alba ve Dominguez, 2006	Genetik Algoritma ve Yapay Sinir Ağı
Dominguez ve Munoz, 2005	Genetik Algoritma ve Stokastik Yapay Sinir Ağı
Kochetov v.d., 2005	Değişken Komşuluk Arama
Fathali ve Kakhki, 2006	Değişken Komşuluk Arama
Diaz ve Fernandez, 2006	Dağıtık Arama ve Tabu Arama
Brito v.d., 2007	PSO (p-medyan probleminin sürekli türü için)
Osman ve Ahmadi, 2007	Açgözlü Rastgele Adaptif Arama Prosedürü ve Yerel arama
Pullan, 2008	GA temelli hibrit bir meta sezgisel
Fleszar ve Hindi, 2008	Değişken Komşuluk Arama
Otto ve Kokai, 2008	Evrimsel Optimizasyon Algoritmaları
Mamedsaidov, 2009	Ayrık PSO Algoritması
Hansen v.d., 2009	Değişken Komşuluk Arama
Arroyo v.d., 2010	Açgözlü Rastgele Adaptif Arama Prosedürü
Xianrui Xua ve Xiaojie Lia, 2010	Dağıtık Arama
Cadenas v.d., 2011	İki Popülasyonlu GA

5. SONUÇ

Bu çalışmada, NP-Zor kombinatoriyal problemler sınıfına giren ve tesis yeri seçim problemleri içinde önemli bir yeri olan p -medyan problemi ve çözüm yöntemleri üzerinde durulmuştur. P -medyan problemi Hakimi tarafından tanıtıldığı 1964 yılından bu yana birçok araştırmacının üzerinde çalıştığı ve çözümü için çok farklı çözüm yöntemleri geliştirilen bir problemdir. Genel olarak tesis yeri seçim problemleri ve özelde de p -medyan problemi birden fazla farklı konumda faaliyet gösteren işletmelerin 1980 yıllardan itibaren artmasıyla birlikte daha çok dikkat çekmiş ve üzerinde daha fazla çalışılan bir problem haline gelmiştir.

P -medyan probleminin çözümü için literatürde iki temel yaklaşım mevcuttur. Bunlardan birinci yaklaşım kesin çözüm metotları iken ikincisi yaklaşık çözüm metotlarıdır. Kesin çözüm yaklaşımları ile kabul edilebilir süreler içinde çözülebilecek problem boyutları oldukça sınırlıdır. Bu sebeple literatürde yapılan çalışmaların çoğunluğunda yaklaşık çözüm metotları olan sezgisel ve meta sezgisel algoritmalar kullanılmıştır. Sezgisel ve meta sezgisel algoritmalar optimum çözümü garanti etmese de kısa sürelerde iyi sonuçlara ulaşmaları dolayısıyla literatürde yaygın olarak kullanılmaktadır.

P -medyan probleminin çözümü amacıyla kesin çözüm yöntemlerinin sınırlı sayıda çalışmada tercih edildiği görülmektedir. Daha önce de bahsedildiği üzere kesin çözüm

yöntemleri ile çözümüne ulaşılacak problemlerin daha çok küçük boyutlu problemler olmasının bu sonucu doğurduğu söylenebilir.

Çözüm yaklaşımları içerisinde ikinci sırada tercih edilen yaklaşım sezgisel algoritmaların kullanılması yoluyla yapılan çalışmalardır. Sezgisel algoritmalar tam çözüm yöntemlerine göre birçok avantaj sunmakla birlikte, probleme özel olarak geliştirilmesi en önemli dezavantajı olarak sayılabilir. Bu tür algoritmalar bazı farklı problemler için geliştirilen sezgisellerin düzenlemeler yapılarak p -medyan problemine uyarlanması şeklinde olabildiği gibi, sadece p -medyan problemine özel olarak da geliştirilenler mevcuttur.

Bahsedilen çözüm yaklaşımları ile yapılan çalışmaların sayılarına bakıldığında meta sezgisel algoritmalarla yapılan çalışmaların sayısı olarak çok önde olduğu görülmektedir. Meta sezgisel algoritmaların bu açık üstünlüğü bu tür algoritmaların bazı temel avantajlarından kaynaklanmaktadır. Meta sezgisel algoritmalar bir probleme özel geliştirilmiş algoritmalar olmayıp birçok optimizasyon problemine uygulanabilmektedir. Özellikle bilgisayar teknolojilerindeki gelişmeler bu tür algoritmaların optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanımını oldukça yaygınlaştırmıştır.

Nihai olarak p -medyan probleminin çözümü için kullanılan tekniklerde meta sezgisel algoritmalar doğru eğilimin artarak devam ettiği söylenebilir. Bu çerçevede gelecek çalışmalarda p -medyan problemine henüz uygulanmamış meta sezgisel algoritmalar probleme uyarlanarak sonuçlar diğer p -medyan problemine uygulanmış olan meta sezgisellere ait sonuçlarla karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Alba, E., Dominguez, E. (2006) "Comparative analysis of modern optimization tools for the p-median problem", *Stat. Comput.* 16, 251–260.
- Alp, O., Erkut, E. & Drezner Z. (2003). "An Efficient Genetic Algorithm for the p-Median Problem", *Annals of Operations Research*, Vol.122, No:1-4, pp.21-42.
- Ardalan, A. (1988), "A comparison of heuristic methods for service facility locations" *International Journal of Operations and Production Management*, 8(2):52–58.
- Arya, V., Garg, N. Khandekar, R. Pandit, V. Meyerson, A. & Munagala K. (2004). "Local search heuristics for k-median and facility location problems", *SIAM Journal on Computing*, Vol.33, No:3, pp.544–562.
- Arroyo, J. E. C., Soares, M. S. & Santos, P. M. (2010). "A GRASP heuristic with path-relinking for a bi-objective p-median problem", *10th International Conference on Hybrid Intelligent Systems*, Atlanta, USA, pp.97-102.
- Ashayeri, J., Heuts, R. & Tammel, B. (2005). "A modified simple heuristic for the p-median problem, with facilities design applications", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol.21, No:4-5, pp.451–464.
- Avella, P., Sassano, A. & Vasil'ev, I. (2003). "Computational study of large-scale p-median problems", *Technical Report 08-03*, Universita di Roma, La Sapienza.
- Baiou, M. & Barahona, F. (2011). "On the linear relaxation of the p-median problem", *Discrete Optimization*, Vol.8, No:2, pp.344–375.
- Balinski, M. (1965). "Integer programming, methods, uses and computation", *Manage Science*, Vol.12, No:3, pp.253-313.
- Beasley, J.E. (1985). "A note on solving large p-median problems", *European Journal of Operational Research*, Vol.21, No:2, pp.270-273.
- Beasley, J.E. (1990). "OR-Library: distributing test problems by electronic mail", *Journal of the Operational Research Society*, Vol.41, No:11, pp.1069-1072.
- Beltran, C., Tadonki, C. & Vial J. Ph. (2006). "Solving the p-Median Problem with a Semi-Lagrangian Relaxation", *Computational Optimization And Applications*, Vol.35, No:2, pp.239-260.
- Berman, O. & Drezner, Z. (2008). "A new formulation for the conditional p-median and p-center problems", *Operations Research Letters*, Vol.36, No:4, pp.481–483.
- Bozkaya, B., Zhang, J. & Erkut E. (2002) "An effective genetic algorithm for the p-median problem" , *Facility location: applications and theory* Ed. by. Horst Hamacher and Zvi Drezner, pp. 179-206.
- Brito, J., Martinez, F. J. & Moreno, J. A. (2007). "Particle Swarm Optimization for the continuous p-median problem", *6th WSEAS Int. Conference on Computational Intelligence, Man-Machine Systems and Cybernetics*, Tenerife, Spain.

- Caccetta, L. & Dzator M. (2005). Heuristic Methods for Locating Emergency Facilities, MODSIM-International Congress on Modelling and Simulation, Australia, pp.1744-1750.
- Cadenas, J.M., Canos, M.J. Garrido, M.C. Ivorra, C. & Liern, V. (2011). "Soft-computing based heuristics for location on networks: The p-median problem", Applied Soft Computing, Vol.11, No:2, pp.1540-1547.
- Captivo, M.E. (1991). "Fast primal and dual heuristics for the pmedian location problem", European Journal of Operational Research, Vol.52, No:1, pp.65-74.
- Ceselli, A. (2003). "Two exact algorithms for the capacitated p-median problem,", 4OR: Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies, Vol.1, No:4, pp.319-340.
- Chiou, Y. & Lan, L.W. (2001). "Genetic clustering algorithms", European Journal of Operational Research, Vol.135, pp.413-427.
- Chiyoshi, F. & Galvao, R.D. (2000). "A statistical analysis of simulated annealing applied to the p-median problem", Annals Operations Research, Vol.96, No:1-4, pp.61-74.
- Chrobak, M. Kenyon, C. & Young, N. (2006). "The reverse greedy algorithm for the metric k-median problem", Information Processing Letters, Vol.97, No:2, pp.68-72.
- Church, R. L. (2003) "COBRA: A new formulation of the classic p-median location problem" Annals of Operations Research, 122:103-120.
- Cook, S. "The P versus NP Problem", (Çevrimiçi), http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP/Official_Problem_Description.pdf, 7.02.2011
- Cornuejols, G., Fisher, M.L. & Nemhauser, G.L. (1977). "Location of Bank Accounts to Optimise Float: an Analytic Study of Exact and Approximate Algorithms" Management Science, Vol.23, No:8, pp.789-810.
- Correa, E.S., Steiner M.T.A., Freitas A.A. & Carnieri C. (2004). "A Genetic Algorithm for Solving a Capacitated p-Median Problem: Theory and Practice in Optimization" Numerical Algorithms. Ed. by. Martnez, J. M.and Yuan, J. Y., Vol.35, No:2-4, pp. 373-388.
- Current, J., Daskin, M.S. & Schilling, D. (2001). "Discrete Network Location Model", Facility Location: Applications and Theory, Ed. by. Z. Drezner and H.W. Hamacher, Springer-Verlag, pp.83-120.
- Crainic, T.G., Gendreau, M., Hansen, P. & Mladenovic, N. (2003). "Parallel variable neighborhood search for the p-median", Les Cahiers du GERAD, G-2003-4.
- Daskin, M.S. (1995). "Network and discrete location: Models, algorithms, and applications", John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Diaz, J.A. & E. Fernandez (2006). "Hybrid scatter search and path relinking for the capacitated p-median problem", European Journal of Operational Research, Vol.169, No:2, pp.570-585.

- Dominguez, E. & Munoz, J. (2005) "Applying bio-inspired techniques to the p-median problem", Computational Intelligence and Bioinspired Systems, Ed. by. J. Cabestany, A. Prieto, and D.F. Sandoval, Springer-Verlag, pp.67-74.
- Dvoretz, J. (1999). "Compatibility-based genetic algorithm: A new approach to the p-median problem", Technical Report, Department of Industrial Engineering and Management Sciences, Northwestern University, Evanston, IL.
- Efroymsen, M. & Ray, T. (1966). "A branch-bound algorithm for plant location", Operations Research, 14(3), pp.361–368.
- Estivill-Castro, V. & Torres-Velazquez, R. (1999). "Hybrid genetic algorithm for solving the p-median problem" SEAL'98: Selected Papers from Second Asia-Pacific Conference Simulated Evolution Learning, Springer-Verlag, Berlin, pp.19–25.
- Fathali, J., Khahki, H. & Burkard, R. (2006). "An ant colony algorithm for the pos/neg weighted p-median problem" Central European Journal of Operations Research, Vol.14, No:3, pp.229–246.
- Fleszar, K. & Hindi, K.S. (2008). "An effective VNS for the capacitated p-median problem", European Journal of Operational Research, Vol.191, No:3, pp.612–622.
- Galvao, R.D. & ReVelle C. (1996). "A Lagrangean Heuristic for the Maximal Covering Location Problem", European Journal of Operations Research, Vol. 88, No:1, pp.114–123.
- Garey, M.R. & Johnson, D. S. (1979). "Computers and intractibility: A guide to the theory of NP-completeness", W.H. Freeman and Co., San Francisco.
- Garcia-Lopez, F., Melian-Batista, B. Moreno-Perez & J.A. Moreno-Vega, J.M. (2002). "The parallel variable neighborhood search for the p-median problem", Journal of Heuristics, Vol.8, No:3, pp.375–388.
- Glover, F. (1990). Tabu search for the p-median problem, unpublished manuscript.
- Goldengorin, B. & Krushinsky, D. (2011). "Complexity evaluation of benchmark instances for the p-median problem", Mathematical and Computer Modelling, Vol.53, No:9-10, pp.1719-1736.
- Hakimi, S.L. (1964). "Optimum Location of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph", Operations Research, Vol.12, No:3, pp.450–459.
- Hakimi, S.L. (1965). "Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems", Operations Research Vol.13, No:3, pp.462–475
- Hansen, P. & Mladenovic, N. (1997). "Variable neighborhood search for the p-median", Location Science, Vol.5, No:4, pp.207–226.
- Hansen, P., Brimberg, J. Urosevic, D. & Mladenovic, N. (2009). "Solving large p-median clustering problems by primal–dual variable neighborhood search", Data Mining and Knowledge Discovery, Vol.19, No:3, pp.351-375.

- Hosage C.M. & Goodchild, M.F. (1986), "Discrete space location–allocation solutions from genetic algorithms", *Annals Operations Research*, Vol.6, No:2, pp.35–46.
- Hribar, M. & Daskin, M.S. (1997). "A dynamic programming heuristic for the p-median problem", *European Journal of Operational Research*, Vol.101, No:3, pp.499–508.
- Jamshidi, M. (2009). "Median Location Problem", *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies*, Ed. by. R.Z. Farahani and M. Hekmatfar, Physica-Verlag Heidelberg, pp.177-191.
- Kariv, O. & Hakimi, S. L. (1979). "An algorithmic approach to network location problems: Part 2. The p-medians", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.37, No:3, pp.539–560.
- Kochetov, Y., (2001). Probabilistic local search algorithms for the discrete optimization problems. *Discrete Mathematics and Applications*, Moscow, MSU, 84–117.
- Kochetov, Y., Alekseeva, E. Levanova & T. Loresh M. (2005). "Large neighborhood local search for the p-median problem", *Yugoslav Journal of Operations Research*, Vol.15, No:1, pp.53-63
- Kuehn, A.A. & Hamburger, M.J. (1963). "A Heuristic Program for Locating Warehouses", *Management Science*, Vol.9, No:4, pp.643-666.
- Küçükdeniz, T. (2009). "Sürü Zekası Optimizasyon Tekniği ve Tedarik Zinciri Yönetiminde Bir Uygulama", *Yayınlanmamış Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı.*
- Levanova, T. V. & Loresh, M. A. (2004). "Algorithms of Ant System and Simulated Annealing for the p-median Problem", *Automation and Remote Control*, Vol.65, No:3, pp.431-438.
- Lim, G.J., Reese J. & Holder, A. (2009). "Fast and robust techniques for the euclidean p-median problem with uniform weights", *Computers & Industrial Engineering*, Vol.57, No:3, pp.896–905.
- Lorena, L. A. N. & Senne, E. L. F. (2003). "Local search heuristics for capacitated p-median problems" *Networks and Spatial Economics*, 3:409–419.
- Mamedsaidov, R. (2009). "Particle Swarm Optimization For P-Median Problems", *Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Fatih Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı.*
- Maniezzo, V., Mingozzi & A. Baldacci, R. (1998). "A bionomic approach to the capacitated p-median problem", *Journal of Heuristic*, Vol.4, No:3, pp.263-280.
- Manne, A. (1964). "Plant location under economies of scale - decentralization and computation", *Management Science*, Vol.11, No:2, pp.213-235.
- Marianov, V. & Serra, D. (2004). "p-Median Models in Public Sector", *Facility Location: Applications and Theory*, Ed. by. Horst W. Hamacher, Zvi Drezner, Berlin, Springer, pp. 119-143.

- Merino, E.D. Perez, J.M. & Aragoes, J. J. (2003). "Neural Network Algorithms for the p-Median Problem", ESANN'2003 proceedings - European Symposium on Artificial Neural Networks, Bruges, Belgium, pp.385-391
- Moreno-Perez , J.A., Moreno-Vega, J.M. & Mladenovic, N. (1994). "Tabu search and simulated annealing in p-median problems", The Canadian Operational Research Society Conference, Montreal.
- Osman, I.H. & Ahmadi, S. (2007). "Guided construction search metaheuristics for the capacitated p-median problem with single source constraint", Journal of the Operational Research Society, Vol.58, No:1, pp.100-114
- Otto, S. & Kokai, G. (2008). "Decentralized Evolutionary Optimization Approach to the p-Median Problem", Applications of Evolutionary Computing, Ed. by. M. Giacobini v.d., Springer-Verlag, Berlin, pp.659-668.
- Pizzolato, N.D. (1994). "A heuristic for large-size p-median location problems with application to school location", Annals of Operations Research, Vol.50, No:1, pp.473-485.
- Pullan, W. (2008). "A Population Based Hybrid Metaheuristic for the p-median Problem", IEEE Congress on Evolutionary Computation, pp.76-82.
- Resende, M.G.C. & Werneck, R.F. (2003). "On the implementation of a swap-based local search procedure for the p-median problem", Proceedings of the Fifth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments, Ed. by. Richard E. Ladner, Society for Industrial Mathematics, pp.119-127.
- Resende, M.G.C. & Werneck, R.F. (2004). "A hybrid heuristic for the p-median problem", Journal of Heuristics, Vol.10, No:1, pp.59-88.
- Rolland, E., Schilling, D.A. & Current, J.R. (1996). "An efficient tabu search procedure for the p-median problem", European Journal of Operational, Vol. 96, No:2, pp.329-342.
- ReVelle, C. & Swain, R. (1970). "Central Facilities Location", Geographical Analysis, Vol.2, No:1, pp.30-42.
- Righini, G. (1995) "A double annealing algorithm for discrete location/allocation problems", European Journal of Operational Research, 86(3):452-468.
- Rosing, K.E., ReVelle, C.S. & Rosing-Vogelaar, H. (1979). "The p-Median and its Linear Programming Relaxation: An Approach to Large Problems" Journal of the Operational Research Society, Vol.30, No:9, pp. 815-822.
- Salhi, S. (1997). "A perturbation heuristic for a class of location problems", Journal of the Operational Research Society, 48(12):1233-1240.
- Sene, E.L.F., Lorena, L.A.N. & Pereira, M.A. (2005). "A branch-and-price approach to p-median location problems", Computers and Operations Research, Vol.32, No:6, pp.1655-1664.
- Sule, D. R. (2001). Logistics of Facility Location and Allocation, Marcel Dekker, New York, US.

- Tavakkoli, R. & Shayan, E. (1998). "Facilities Layout Design by Genetic Algorithms", *Computers and Industrial Engineering*, Vol.35, No:3-4, pp.527-530.
- Teitz, M.B. & Bart, P. (1968). "Heuristic Methods for Estimating the Generalized Vertex Median of a Weighted Graph", *Operations Research*, Vol.16, No:5, pp.955-961.
- Tseng, L., Wu, C. (2009). "The OA-Based Swap Method for the P-Median Problem" In *SMC*, pp.2543-2548.
- Voss, S. (1996) "A reverse elimination approach for the p-median problem", *Studies in Locational Analysis*, 8:49-58.
- Whitaker, R.A. (1983). "A fast algorithm for the greedy interchange of large-scale clustering and median location problems", *INFOR*, Vol.21, No:2, pp.95-108.
- Xianrui Xua, X. & Xiaojie Lia, H. (2010). "An Improved Scatter Search Algorithm for Capacitated P-Median Problem", *Computer Engineering and Technology (ICCET) 2nd International Conference*, pp.316-320.