Int. J. Adv. Eng. Pure Sci. 2020, 32(3): 239-250
DOI: 10.7240/jeps.629843

RESEARCH ARTICLE / ARAŞTIRMA MAKALESİ

R^3 de k- Vektör İçin $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^{S(3)}$ Cisminin Üreteçleri

The generators of the field $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^{S(3)}$ for k- vectors given in R^3

Muhsin İNCESU[1]

[1]*Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi ABD, Güzeltepe Kampusu 49100 Muş*

Öz

k- bilinmeyenli reel kaysayılı tüm G- invaryant rasyonel fonksiyonların kümesi $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ ile gösterilir. Üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında benzerlik dönüşümleri grubu G = S(3) olmak üzere, bu çalışmada $\mathbb{R}^3$ de verilen ve k vektörden oluşan $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ kümesinin rasyonel S(3)-invaryantlarını tam olarak belirleyebilmek için G grubuna göre invaryant rasyonel fonksiyonlar cismi olan $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ cisminin üreteç kümesi ifade edilmiştir. Böylece A kümesinin herhangi bir S(3) invaryantı bu üreteç kümenin elemanlarının bir fonksiyonu olarak ifade edilebilecektir.

Anahtar kelimeler:G-invariant foksiyonlar,benzerlik dönüşümü,üreteç invaryantlar, S(3)-invaryant rasyonel fonksiyonlar.

Abstract

The field of the G-invariant rational functions with k- variables $x_1,x_2,\ldots,x_k$ is denoted by$R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$. In this paper the generator set of the field of G-invariant rational functions denoted by $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ is obtained to determine completely all S(3)-invariants of the set $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ consisted of k- vector variables in $\mathbb{R}^3$ where G = S(3) which is the similarity transformations' group in 3 dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$. So any S(3)-invariant of the set *A* can be stated by the functions of the generator set of the field $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$.

Keywords: G- invariant functions, similarity transformation, generator invariants, S(3)-invariant rational functions

I. GİRİŞ

İnvaryant teori alanındaki çalışmaların temelinde $R[x]^G$-invaryant fonksiyonlar halkasının sonlu üreteçli olup olmadığının incelenmesi problemi vardır. Bu problem ilk defa 1860 lı yıllarda binary formları için verilmiştir. 1900 de David Hilbert, Paris'teki uluslararası konferansta sunduğu 23 problemden 14. de, bu üreteçlerin ne zaman sonlu olması gerektiği problemini ortaya koymuştur. Daha sonra 1962 de M. Nagata $R[x]^G$- nin, G- nin lineer reduktif olması koşulunda sonlu üreteçli olduğunu göstermiştir. Lineer reduktif olmayan G grubları için $R[x]^G$ nin sonlu üreteçli olabilmesinin şartları da Khadjiev D. [1] ve Grosshans F. [2] çalışmalarında verilmiştir.

İnvaryant teorinin gelişimi matematiğin farklı alanlarını etkilemiştir. Felix Klein'e gelinceye kadar, sadece belli başlı geometriler bilinmekteydi.1872 de F.Klein, Erlangen programı ile grup kavramının geometrilerin önemli yapı taşları olduğunu göstermiştir.Buna göre benzerlik geometrisi, benzerlik dönüşümleri grubu ve altgruplarının invaryantlar teorisidir. Klein'e göre bir geometride iki eleman birbirlerine denktir, ancak ve ancak geometriyi oluşturan dönüşüm grubundan öyle bir dönüşüm alınabilir ki elemanlardan birini diğerine dönüştürür [3].

O(n) grubu için noktaların tam invaryant sistemini 1897 de E. Study vermiştir. Daha sonra bunu Hermann Weyl geliştirmiştir [4]. 1988 de, D. Khadjiev, R. Aripov tüm Öklid hareketlerinin grubu E(n) için bu problemi çözmüştür [5]. Bu alandaki çalışmalar Khadjiev ile birlikte [6-20] çalışmalarla devam etmiştir. Bu çalışmalara örnek olarak affin uzaylarda parametrik eğrilerin diferensiyel invaryantları konusunda Y.Sağıroğlu ve Ö. Pekşen[7,8,9], noktaların Öklid invaryantları konusunda M. Karataş [12], Lorentz uzayında alt uzayların invaryantları, Öklid geometride eğrilerin diferensiyel invaryantları, Unitar uzaylarda izometri grubunun invaryantları ve Taxicab geometride eğrilerin invaryantları konularında İ.Ören, D. Khadjiev, Ö.Pekşen ve H.A. Çoban [10,11,17,18,19,20], benzerlik geometrisinde noktaların ve Bézier eğrilerinin invaryantları konularında M.İncesu ve O. Gürsoy [6,13,14,15] çalışmaları verilebilir.

Sorumlu yazar: Muhsin İNCESU, Tel: +90 4362491443, e-posta: m.incesu@alparslan.edu.tr
Gönderilme: 06.10.2019, **Düzenleme:** 22.03.2020, **Kabul:** 04.06.2020

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Benzerlik Dönüşümleri Grubu S(3)

Tanım 2.1: R^3 Öklid uzayı olsun. Her $\forall\, x, y \in R^3$ için

$$\|F(x) - F(y)\| = \lambda\|x - y\| \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in R$, $\lambda>0$ bulunabilirse $F: R^3 \to R^3$ dönüşümüne bir Benzerlik Dönüşümü denir. Buradaki λ sayısına F benzerlik dönüşümünün ölçeği ya da kısaca benzerlik ölçeği denir ve λ_F ile gösterilir. R^3 uzayında tanımlı tüm benzerlik dönüşümlerinin kümesi S(3) ile gösterilir.

Tanım 2.2: F benzerlik dönüşümü lineer ise F' ye lineer benzerlik dönüşümü denir. R^3 uzayında tanımlı tüm lineer benzerlik dönüşümlerinin cümlesini LS(3) ile gösterelim.

Sonuç 2.1: LS (3) değişmeli olmayan bir gruptur.

Tanım2.3: $a \in R^3$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere $\forall\, x \in R^3$ için

$$F(x) = a + \lambda\,(x - a) \qquad (2)$$

olarak tanımlanan $\boldsymbol{F}: R^3 \to R^3$ dönüşümüne a merkezli, λ ölçekli homoteti denir. R^3 üzerinde tanımlı tüm homotetilerin cümlesini H(3) ile gösterelim.

Önerme 2.1: Keyfi $F(x) = a + \lambda\,(x - a)$ homoteti dönüşümü λ ölçekli benzerlik dönüşümüdür.

İspat: $F(x) - F(y) = [a + \lambda\,(x - a)] - [a + \lambda\,(y - a)] = \lambda\,(x - y)$ olduğundan $\|F(x) - F(y)\| = \lambda\|x - y\|$ olacağından homoteti dönüşümü λ ölçekli benzerlik dönüşümüdür.

Önerme 2.2: $F \in H(3)$, a merkezli ve λ ölçekli homoteti dönüşümü lineerdir ⇔ $a = 0$ ya da $\lambda = 1$ dir.

İspat: F lineer olsun. O halde $F(x+y) = a + \lambda\,(x+y - a) = a + \lambda x + \lambda y - \lambda a$ dir. Öte yandan $F(x)+F(y) = [a + \lambda\,(x - a)] + [a + \lambda\,(y - a)] = 2a + \lambda x + \lambda y - 2\lambda a$ bulunur. Buradan $a\,(1-\lambda)=0$ bulunur. Böylece, $a = 0$ ya da $\lambda = 1$ elde edilir.

Tersine $a = 0$ ise $F(x) = a + \lambda\,(x - a) = \lambda x$ olur ki bu radyal dönüşümdür ve lineerdir. Gerçekten $\lambda\,(x+y) = \lambda x + \lambda y$ dir ve $\lambda\,(cx) = c\,\lambda\,(x)$ sağlanır. $\lambda = 1$ ise $F(x) = a + \lambda\,(x - a) = x$ dönüşümü birim dönüşümdür. Özel bir radyal dönüşümdür. Bu dönüşüm de lineerdir.

Sonuç 2.2: F lineer homotetidir ⇔ $F(x) = \lambda x$; $\lambda > 0$ dir.

R^3 üzerinde tanımlı tüm lineer homotetilerin kümesini LH(3) ile gösterelim.

Sonuç 2.3: LH(3) değişmeli gruptur.

Sonuç 2.4: LH(3) ⊂ LS (3) altgruptur.

Önerme 2.3: h, keyfi lineer homoteti ve f keyfi izometri olmak üzere $F = h \circ f$ dönüşümü bir benzerlik dönüşümüdür. Tersine, her λ ölçekli F benzerlik dönüşümü için bir $h \in$ LH (3) lineer homoteti dönüşümü ve bir $f \in$ E (3) izometrisi tek türlü olarak vardır, öyleki $F = h \circ f$ dir.

İspat: [17].

Sonuç 2.5: $F: R^3 \to R^3$, λ ölçekli lineer benzerlik dönüşümü ise $\forall x \in R^3$ için

$$F(x) = \lambda g x, \lambda > 0,\ g \in O(3) \qquad (3)$$

olarak tek türlü yazılabilir.

Sonuç 2.6: $F: R^3 \to R^3$, λ ölçekli benzerlik dönüşümü ise $\forall x \in R^3$ için

$$F(x) = \lambda g x + b, \lambda > 0, b \in R^3,\ g \in O(3) \qquad (4)$$

olarak tek türlü yazılabilir.

Tanım 2.4: G bir grup ve $G{:}X$ etkisi verilsin. $x_1, x_2 \in X$ için $x_2 = g x_1$ olacak şekilde bir $g \in G$ mevcutsa $x_1, x_2 \in X$ noktalarına G-denk noktalar denir ve kısaca $x_1 \overset{G}{\approx} x_2$ şeklinde gösterilir [6].

Tanım 2.5: $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subset X$ ve $G : X$ etkisi verilsin. $i=1,2,\ldots,k$ $y_i = g x_i$ olacak şekilde bir $g \in G$ bulunabilirse $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ kümelerine G- denk denir ve $\{x_1, \ldots, x_k\} \overset{G}{\approx} \{y_1, \ldots, y_k\}$ şeklinde gösterilir [6].

Tanım 2.6: G bir grup, $f: X \to R$ fonksiyonu ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer, $x_1 \overset{G}{\approx} x_2$ olduğunda $f(x) = f(y)$ ise ya da $\forall g \in G$ ve $\forall x \in X$ için $f(gx) = f(x)$ ise f fonksiyonuna G- invaryant fonksiyon denir [6].

Tanım 2.7: G bir grup, $H \subset G$ bir altgrup ve f, R^3 de tanımlı bir reel fonksiyon olsun. Bir $\lambda: H \to \mathbb{R}$, reel değerli fonksiyonu için

$$f(hx) = \lambda(h) f(x),\ \forall h \in H, \forall x \in R^3 \qquad (5)$$

ise, f 'ye nispi invaryant fonksiyon denir. λ fonksiyonuna da f nin çarpanı denir.

Tanım 2.8: f , nispi $O(3)$- invaryant polinom olmak üzere $\forall g \in O(3)$ için $\lambda(g) = 1$ ise f 'ye çift (mutlak) invaryant polinom denir.

Örnek: $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$vektörü verilsin. Bu durumda;

$\langle x,x\rangle = {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 = P(x_1,x_2,x_3)=f(x)$

fonksiyonu bir çift invaryant polinomdur. Çünkü $\forall g\in O(3)$ için

$$f(gx)=\langle gx,\mathrm{g}x\rangle=\langle x,x\rangle=f(x)$$

sağlanır. Bu fonksiyon 3 reel değişkenli ikinci dereceden bir polinomdur. Yani $f\in R[x_1,x_2,x_3]$ dir. Ancak bir vektör değişkenli bir fonksiyondur.

Örnek: $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ vektörleri verilsin. Bu durumda;

$\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = P(x_1,x_2,x_3;y_1,y_2,y_3)=$ $f(x,y)$ fonksiyonu bir çift invaryant polinomdur. Çünkü $\forall g\in O(3)$için

$$f(gx,gy)=\langle gx,\mathrm{g}y\rangle=\langle x,y\rangle=f(x,y)$$

sağlanır. Benzer şekilde bu fonksiyon 6 reel değişkenli ikinci dereceden bir polinomdur. Yani $f\in R[x_1,x_2,x_3;y_1,y_2,y_3]$ dir. Ancak iki vektör değişkenli bir fonksiyondur.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında $x_i=(x_{i1},x_{i2},x_{i3})\in R^3$ vektörü, indislerin karıştırılmaması için $x^{(i)}=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},x_3^{(i)})$ biçiminde kullanılacaktır.

Örnek:

$$f\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}\right)=2\langle x^{(1)},x^{(2)}\rangle^3\langle x^{(1)},x^{(3)}\rangle$$
$$-3\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle^2\langle x^{(2)},x^{(2)}\rangle^3$$

fonksiyonu çift *O(3)*- invaryant polinomdur. Bu polinom 9 reel değişkenli 10. dereceden bir polinomdur.

Örnek: Keyfi bir çift *O(3)*- invaryant polinom $x^{(i)},\ x^{(j)}\in\mathbb{R}^3$için;

$$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\right\rangle;\ i,\ j=1,\ 2,\ldots,\ m \tag{6}$$

lerin polinomu olarak ifade edilebilir. Yani,

$$f\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(m)}\right)=\sum_k\prod_{i,j=1}^{m}a_{ijk}\langle x^{(i)},x^{(j)}\rangle^{n_{ijk}}$$

[4].

Tanım 2.9: f , nispi *O(3)*- invaryant polinom olmak üzere $\forall g\in O(3)$ için $\lambda(g)=detg$ ise f 'ye tek invaryant polinom denir.

Örnek:

$x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)}\right)$,

$x^{(2)}=\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)}\right)$,

$x^{(3)}=\left(x_1^{(3)},x_2^{(3)},x_3^{(3)}\right)\in R^3$ olmak üzere

$f\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}\right)=\det\left(x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}\right)=\left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}\right]$

$$=\det\begin{bmatrix}{x_1}^{(1)} & {x_1}^{(2)} & {x_1}^{(3)}\\ {x_2}^{(1)} & {x_2}^{(2)} & {x_2}^{(3)}\\ {x_3}^{(1)} & {x_3}^{(2)} & {x_3}^{(3)}\end{bmatrix}={x_1}^{(1)}\left({x_2}^{(2)}{x_3}^{(3)}-{x_2}^{(3)}{x_3}^{(2)}\right)$$

$$+{x_1}^{(2)}\left({x_2}^{(3)}{x_3}^{(1)}-{x_2}^{(1)}{x_3}^{(3)}\right)+{x_1}^{(3)}\left({x_2}^{(1)}{x_3}^{(2)}-{x_2}^{(2)}{x_3}^{(1)}\right)$$

Fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon 9 reel değişkenli üçüncü dereceden bir polinomdur.

$f\left(g.x^{(1)},g.x^{(2)},g.x^{(3)}\right)=\left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}g.x^{(3)}\right]=detg.\left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}\right]$

olduğundan $\left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}\right]$ polinomu tek invaryant polinomdur.

Önerme 2.4:

1-Çift invaryant polinomların toplamı çift invaryant polinomdur.

2- f , çift invaryant polinom ve $\lambda\in R$ olmak üzere $\lambda.f$ polinomu çift invaryant polinomdur.

3-Çift invaryant polinomların çarpımı çift invaryant polinomdur.

İspat: [12]

Önerme 2.5:

1-Tek invaryant polinomların toplamı tek invaryanttır.

2- f , tek invaryant polinom ve $\lambda\in R$ olmak üzere $\lambda.f$ polinomu tek invaryant polinomdur.

3-Tek invaryant polinomların çarpımı çift invaryant polinomdur.

4-Tek ve çift invaryant polinomların çarpımı tek invaryant polinomdur .

İspat: [12]

Örnek:

$\varphi_1\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}\right)=2\langle x^{(1)},x^{(3)}\rangle^2\langle x^{(2)},x^{(4)}\rangle$ ve

$$\varphi_2\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}\right)=3\langle x^{(1)},x^{(4)}\rangle^3\langle x^{(2)},x^{(3)}\rangle$$

çift *O(3)*- invaryant polinomları göz önüne alınsın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}&f\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}\right)\\&=\left[x^{(1)}x^{(2)}x^{(4)}\right]\varphi_1\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}\right)\\&+\left[x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)}\right]\varphi_2\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}\right)\end{aligned}$$

fonksiyonu tek *O(3)*- invaryant polinomdur.

Önerme 2.6: Keyfi bir tek *O(3)*- invaryant polinom; $\varphi\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(m)}\right)$ çift invaryant polinom olmak üzere;

$$\left[x^{(i_1)}x^{(i_2)}x^{(i_3)}\right].\varphi\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(m)}\right);$$
$$i_1,\ i_2,\ i_3=1,\ldots,m\ ;\ i_1<i_2<i_3$$

şeklindeki tek invaryant polinomların toplamı olarak ifade edilebilir. Yani,

$$\begin{aligned}&f\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(m)}\right)\\&=\sum_k\left[x^{(i_1)}x^{(i_2)}x^{(i_3)}\right]\prod_{i,j=1}^{m}a_{ijk}\langle x^{(i)},x^{(j)}\rangle^{n_{ijk}}\end{aligned}$$

İspat: [4,12].

G bir grup ve $G:X$ etkisi verilmiş olsun. k-bilinmeyenli reel kaysayılı tüm G- invaryant rasyonel fonksiyonların kümesi $R\left(x_1,x_2,\ldots,x_k\right)^G$ ile gösterilir.

Önerme 2.7:

$R\left(x_1,x_2,\ldots,x_k\right)^G$ bir cisimdir.

İspat: $f,g,h\in R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ olsun. Bu durumda $f,g,h: X\to R$ fonksiyonlardır öyleki $\forall r\in G$ ve için $\forall x_1,x_2,\ldots,x_k\in X$ için

$$f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=f(x_1,x_2,\ldots,x_k),$$
$$g(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

ve

$$h(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

olur. Şimdi, öncelikle f ve g, G-invaryant olduğundan

i) $(f+g)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)+g(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$

$$=f(x_1,x_2,\ldots,x_k)+g(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

$$=(f+g)(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

ii) $(cf)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=cf(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=c\,f(x_1,x_2,\ldots,x_k)=(c\,f)(x_1,x_2,\ldots,x_k)$

sağlandığından toplama ve skaler ile çarpma işlemine göre kapalıdır.

iii) $(f.g)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k).g(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$

$$=f(x_1,x_2,\ldots,x_k).g(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

$$=(f.g)(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

sağlandığından çarpma işlemine göre de kapalıdır.

Toplama işlemine göre abelyen grup olduğunu gösterelim.

$f,g,h: X\to R$ olduğundan ve reel sayılar cisim olduğundan

i) $[f+(g+h)](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=f(x_1,x_2,\ldots,x_k)+(g+h)(x_1,x_2,\ldots,x_k)=f(x_1,x_2,\ldots,x_k)+[g(x_1,x_2,\ldots,x_k)+h(x_1,x_2,\ldots,x_k)]$

$$\begin{aligned}=[f(x_1,x_2,\ldots,x_k)&+g(x_1,x_2,\ldots,x_k)]\\&+h(x_1,x_2,\ldots,x_k)\end{aligned}$$

$$=[(f+g)+h](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$$

elde edilir ve bu da toplama işlemine göre $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ nin asosyatif olduğunu gösterir.

ii) $\forall x_1,x_2,\ldots,x_k\in X$ için $f=0$ fonksiyonu G-invaryant fonksiyondur ve toplamaya göre birimdir.

iii) $\forall f\in R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ için $-f\in R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ dir ve $f+(-f)=0=e$ dir.

iv) $(f+g)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)+g(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$

$$=f(x_1,x_2,\ldots,x_k)+g(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

$$=g(x_1,x_2,\ldots,x_k)+f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

$$\begin{aligned}=g(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)&+f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)\\&=(g+f)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)\end{aligned}$$

elde edilir ve bu da toplama işlemine göre $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ nin komütatif olduğunu gösterir. Bunun sonucu $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ abelyen gruptur.

v) $[f.(g.h)](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)=f(x_1,x_2,\ldots,x_k).(g.h)(x_1,x_2,\ldots,x_k)$

$$=f(x_1,x_2,\ldots,x_k).[g(x_1,x_2,\ldots,x_k).h(x_1,x_2,\ldots,x_k)]$$

$= [f(x_1,x_2,\ldots,x_k).g(x_1,x_2,\ldots,x_k)].h(x_1,x_2,\ldots,x_k)$

$= [(f.g).h](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$

elde edilir ve bu da çarpma işlemine göre $R(x_1,x_2,\ldots,x_m)^G$ nin asosyatif olduğunu gösterir.

vi) $[f.(g+h)](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k) = f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k).(g+h)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$

$$= f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k).[g(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k) + h(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)]$$

$$= f(x_1,x_2,\ldots,x_k).g(x_1,x_2,\ldots,x_k) + f(x_1,x_2,\ldots,x_k).h(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

$$= [f.g](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k) + [f.h](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$$

elde edilir benzer şekilde

$$[(f+g).h](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$$

$$= [f.h](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k) + [g.h](rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$$

elde edilir ve bu da toplama işleminin çarpma işlemi üzerine dağılma özelliğinin olduğunu gösterir. Böylece $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ bir halkadır.

vii) $\forall x_1,x_2,\ldots,x_k \in X$ için $f = 1$ fonksiyonu G-invaryant fonksiyondur ve çarpmaya göre birimdir. Buna göre $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ birimli halkadır.

viii) $(f.g)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k) = f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k).g(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$

$$= f(x_1,x_2,\ldots,x_k).g(x_1,x_2,\ldots,x_k) = g(x_1,x_2,\ldots,x_k).f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

$$= g(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k).f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k) = (g.f)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$$

olduğundan çarpma işlemine göre komütatif olduğunu gösterir. Dolayısıyla $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ birimli komütatif bir halkadır.

ix) $\forall f \in R(x_1,x_2,\ldots,x_m)^G$ ve $f \neq 0$ için $f^{-1} = \frac{1}{f}$ fonksiyonu da G- invaryanttır ve

$$(f^{-1})(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k) = \frac{1}{f}(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)$$

$$= \frac{1}{f(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k)} = \frac{1}{f(x_1,x_2,\ldots,x_k)}$$

olduğundan

$$\big(f.(f^{-1})\big)(rx_1,rx_2,\ldots,rx_k) = \big(f.(f^{-1})\big)(x_1,x_2,\ldots,x_k) = 1$$

sağlanır. Yani sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersi vardır. Buna göre $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ bir cisimdir.

Tanım 2.10: *F* bir cisim olsun. *X*, *F*'nin herhangi bir alt kümesi olsun. *F*'nin *X*'i kapsayan tüm alt cisimlerinin arakesiti yine *F*'ye eşit oluyorsa *F*, *X* tarafından üretilir denir. *X* kümesine de *F*'nin üreteç kümesi denir. Üreteç küme, bir anlamda span kümedir. Cismin keyfi elemanı, üreteç kümenin elemanlarının cisimde tanımlanan toplama, çarpma, skaler ile çarpma işlemleri kullanılmasıyla elde edilebilir.

Teorem 2.1 [12]**:** $G = O(3)$ olsun. Bu takdirde;

i) $k \leq 3$ ise,

$$\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle; \quad i, j = 1, 2, \ldots, m; \quad i \leq j$$

sistemi $R\big(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)}\big)^{O(3)}$ cisminin üreteç sistemidir.

ii) $k > 3$ ise,

$$\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle; \ i, j = 1, 2, 3; \ i \leq j$$

$$\langle x^{(i)}, x^{(p)} \rangle; \ i = 1,2,3; \ p = 4, 5, \ldots, k$$

sistemi $R\big(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)}\big)^{O(3)}$ cisminin üreteç sistemidir.

3. $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^{S(3)}$ CİSMİ VE ÜRETEÇLERİ

Tüm bir bilinmeyenli reel katsayılı G- invaryant polinomların kümesi $R[x]^G$ ile, tüm bir bilinmeyenli reel katsayılı G- invaryant rasyonel fonksiyonların kümesi de $R(x)^G$ ile gösterilir. $x_1,x_2,\ldots,x_k$ bilinmeyenler olmak üzere k- bilinmeyenli reel kaysayılı tüm G- invaryant polinomların kümesi $R[x_1,x_2,\ldots,x_k]^G$ ile ve k- bilinmeyenli reel kaysayılı tüm G- invaryant rasyonel fonksiyonların kümesi de $R(x_1,x_2,\ldots,x_k)^G$ ile gösterilir.

Tanım 3.1: f, nispi LS(3)-invaryant polinom olmak üzere eğer $f(x) = \lambda g x$ yazılımında $g \in O(3)$ çift invaryant ise f'ye çift (mutlak) LS(3)-invaryant polinom denir.

Tanım 3.2: f, nispi LS(3)-invaryant polinom olmak üzere eğer $f(x) = \lambda g x$ yazılımında $g \in O(3)$ tek invaryant ise f'ye tek LS(3)- invaryant polinom denir.

Önerme 3.1: $x = x_1, x_2, x_3 \in R^3$ olmak üzere bir tane vektör için derecesi n olan

1. O(3)- invaryant polinom

$$P(x) = P(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \langle x,x\rangle^i$$

2. Keyfi nispi O(3)- invaryant polinom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \langle x,x\rangle^i$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 2.1 de verilen ifadeler invaryant fonksiyonların üreteçleri olduğundan bu durum (6) ve Teorem 2.1. in bir sonucudur. Yani tek vektör değişkenli durumda nispi O(3)- invaryant polinom ile O(3)-invaryant polinom aynıdır.

Önerme 3.2: $k > 1$ olmak üzere

$$x^{(1)} = (x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(1)}, x_3{}^{(1)})\ ;$$
$$x^{(2)} = (x_1{}^{(2)}, x_2{}^{(2)}, x_3{}^{(2)})\ ;\ldots;$$
$$x^{(k)} = (x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)}, x_3{}^{(k)})$$ k tane vektör için

1. nispi **tek** O(3)- invaryant polinom

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right) = \sum_{\substack{i,j,r=1\\ i<j<r}}^{k} \left[x^{(i)}\quad x^{(j)}\quad x^{(r)}\right].\,\mathrm{L}$$

dir. Burada

$$L = \sum_{i^1{}_1\ldots i^1{}_k i^2{}_2\ldots i^2{}_k\ldots i^{k-1}{}_k i^k{}_k} a^{(i)(j)(r)}{}_{i^1{}_1\ldots i^1{}_k i^2{}_2\ldots i^2{}_k\ldots i^{k-1}{}_k i^k{}_k}\, B$$

ve

$$B = A_{i(1)} A_{i(2)} \ldots A_{i(k-1)} A_{i(k)}$$

olmak üzere

$$A_{i(1)} = \left(\prod_{s=1}^{k} \left\langle x^{(1)}, x^{(s)}\right\rangle^{i^1{}_s}\right),$$

$$A_{i(2)} = \left(\prod_{t=2}^{k} \left\langle x^{(2)}, x^{(t)}\right\rangle^{i^2{}_t}\right), \ldots,$$

$$A_{i(k-1)} = \left(\prod_{p=k-1}^{k} \left\langle x^{(k-1)}, x^{(p)}\right\rangle^{i^{(k-1)}{}_p}\right),$$

$$A_{i(k)} = \left\langle x^{(k)}, x^{(k)}\right\rangle^{i^k{}_k}$$

dir.

2. nispi **çift** O(3)- invaryant polinom

$$f\ \ x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\ \ =$$
$$= \sum_{i^{(1)}{}_1\ldots i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_2\ldots i^{(2)}{}_k\ldots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k} a^{(i)(j)(r)}{}_{i^{(1)}{}_1\ldots i^{(1)}{}_k i^{(2)}{}_2\ldots i^{(2)}{}_k\ldots i^{(k-1)}{}_k i^{(k)}{}_k}\, B$$

biçimindedir. Burada *B* yukarıdaki gibidir.

İspat: Önerme 2.6 ve Teorem 2.1 in bir sonucudur.

Teorem 3.1: 1. k tane vektör için LH(3)- invaryant polinom sabit polinomdur.

2. k tane vektör için **nispi** LH(3)- invaryant polinom $x^{(1)} = (x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(1)}, x_3{}^{(1)})$;

$$x^{(2)} = (x_1{}^{(2)}, x_2{}^{(2)}, x_3{}^{(2)})\ ;\ldots;$$
$$x^{(k)} = (x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)}, x_3{}^{(k)})$$ olmak üzere

$$f\ \ x^{(1)}, x^{(2)},\ldots,x^{(k)}$$
$$= \sum_{i_1{}^{(1)}+i_2{}^{(1)}+i_3{}^{(1)}\ldots+i_1{}^{(k)}+i_2{}^{(k)}+i_3{}^{(k)}=m} a_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}i_3{}^{(1)}\ldots i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}i_3{}^{(k)}} M$$

dır. Burada

$$M = (x_1{}^{(1)})^{i^{(1)}{}_1}(x_2{}^{(1)})^{i^{(1)}{}_2}(x_3{}^{(1)})^{i^{(1)}{}_3} \ldots .\,(x_1{}^{(k)})^{i^{(k)}{}_1}(x_2{}^{(k)})^{i^{(k)}{}_2}(x_3{}^{(k)})^{i^{(k)}{}_3}$$

dir.

İspat: 1. $x^{(1)} = (x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(1)}, x_3{}^{(1)})$;

$$x^{(2)} = (x_1{}^{(2)}, x_2{}^{(2)}, x_3{}^{(2)})\ ;\ldots;$$
$$x^{(k)} = (x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)}, x_3{}^{(k)})$$

olmak üzere

$$f\ \ \lambda x^{(1)}, \lambda x^{(2)},\ldots,\lambda x^{(k)}$$
$$= f\ \ (\lambda x_1{}^{(1)}, \lambda x_2{}^{(1)}, \lambda x_3{}^{(1)}),\ \lambda x_1{}^{(2)}, \lambda x_2{}^{(2)}, \lambda x_3{}^{(2)}\ ,\ldots,\ \lambda x_1{}^{(k)}, \lambda x_2{}^{(k)}, \lambda x_3{}^{(k)}$$
$$= f\ \ \lambda x_1{}^{(1)}, \lambda x_2{}^{(1)}, \lambda x_3{}^{(1)}, \lambda x_1{}^{(2)}, \lambda x_2{}^{(2)}, \lambda x_3{}^{(2)},\ldots, \lambda x_1{}^{(k)}, \lambda x_2{}^{(k)}, \lambda x_3{}^{(k)}$$

olduğundan R^3 de k tane vektör için LH(3)-invaryant polinom Sonuç 2.2 den

$$f\ \ \lambda x_1{}^{(1)}, \lambda x_2{}^{(1)}, \lambda x_3{}^{(1)}, \lambda x_1{}^{(2)}, \lambda x_2{}^{(2)}, \lambda x_3{}^{(2)},\ldots, \lambda x_1{}^{(k)}, \lambda x_2{}^{(k)}, \lambda x_3{}^{(k)}$$
$$= f\ \ x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(1)}, x_3{}^{(1)}, x_1{}^{(2)}, x_2{}^{(2)}, x_3{}^{(2)},\ldots, x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)}, x_3{}^{(k)}$$

sağlamalıdır. O halde

$$\sum_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}i_3{}^{(1)}\ldots i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}i_3{}^{(k)}} a_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}i_3{}^{(1)}\ldots i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}i_3{}^{(k)}} \lambda^{i_1{}^{(1)}+i_2{}^{(1)}+i_3{}^{(1)}+\ldots+i_1{}^{(k)}+i_2{}^{(k)}+i_3{}^{(k)}} M$$
$$= \sum_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}i_3{}^{(1)}\ldots i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}i_3{}^{(k)}} a_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}i_3{}^{(1)}\ldots i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}i_3{}^{(k)}} M$$

olur. Her $i_1^{(1)} i_2^{(1)} i_3^{(1)} \ldots i_1^{(k)} i_2^{(k)} i_3^{(k)}$ için

$$a_{i_1{}^{(1)}i_2{}^{(1)}i_3{}^{(1)}\ldots i_1{}^{(k)}i_2{}^{(k)}i_3{}^{(k)}}\quad \lambda^{i_1{}^{(1)}+i_2{}^{(1)}+i_3{}^{(1)}+\ldots+i_1{}^{(k)}+i_2{}^{(k)}+i_3{}^{(k)}} - 1\ = 0$$

bulunur.

Her

$$i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}\neq 0$$

için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}=0$ olur.

$$i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}=0$$

durumunda ise polinom

$$P(x)=a_{0000\ldots00}$$

biçiminde sabit polinom olur.

2- $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})$;
$x^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)})$;…;
$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)})$

olmak üzere k tane vektör için nispi LH(3)- invaryant polinom Sonuç 2.2. den $\forall\lambda\in R^+$ için

$$\begin{aligned}&f\ \ \lambda x_1^{(1)},\lambda x_2^{(1)},\lambda x_3^{(1)},\lambda x_1^{(2)},\lambda x_2^{(2)},\lambda x_3^{(2)},\ldots,\lambda x_1^{(k)},\lambda x_2^{(k)},\lambda x_3^{(k)}\\&=\varphi\ \ \lambda\ \ f\ \ x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)},x_1^{(2)},x_2^{(2)},\ldots,x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}\end{aligned}$$

sağlamalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}} a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}}M\\&=\varphi\ \ \lambda\sum_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}} a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}M\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için

$$\begin{aligned}&a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}}\\&=\varphi\ \ \lambda\ \ a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliği

$$a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}\ \ \lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}}-\varphi\ \ \lambda\ \ =0$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan

$$i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}\neq 0$$

olan her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}=0$ ya da

$$\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}}=\varphi\ \ \lambda$$

elde edilir. Buna göre her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}=0$ ise k tane vektör için nispi LH(3)- invaryant polinom sıfır sabit polinomudur. Eğer $\exists\overline{i_1^{(1)}},\overline{i_2^{(1)}},\overline{i_3^{(1)}},\ldots,\overline{i_1^{(k)}},\overline{i_2^{(k)}},\overline{i_3^{(k)}}$ öyle ki

$$a_{\overline{i_1^{(1)}},\overline{i_2^{(1)}},\overline{i_3^{(1)}},\ldots,\overline{i_1^{(k)}},\overline{i_2^{(k)}},\overline{i_3^{(k)}}}\neq 0 \text{ ise}$$

$$\lambda^{\overline{i_1^{(1)}}+\overline{i_2^{(1)}}+\overline{i_3^{(1)}}+\ldots+\overline{i_1^{(k)}}+\overline{i_2^{(k)}}+\overline{i_3^{(k)}}}=\varphi\ \ \lambda$$

dır. Bunu yukarıdaki nispi invaryant polinom ifadesinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}} a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}}M=\\&=\lambda^{\overline{i_1^{(1)}}+\overline{i_2^{(1)}}+\overline{i_3^{(1)}}+\ldots+\overline{i_1^{(k)}}+\overline{i_2^{(k)}}+\overline{i_3^{(k)}}}\sum_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}} a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}M\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}$ ve $\forall\lambda\in R^+$ için

$$a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}\begin{pmatrix}\lambda^{i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}}\\-\lambda^{\overline{i_1^{(1)}}+\overline{i_2^{(1)}}+\overline{i_3^{(1)}}+\ldots+\overline{i_1^{(k)}}+\overline{i_2^{(k)}}+\overline{i_3^{(k)}}}\end{pmatrix}=0$$

elde edilir. Buna göre

$$\overline{i_1^{(1)}}+\overline{i_2^{(1)}}+\overline{i_3^{(1)}}+\ldots+\overline{i_1^{(k)}}+\overline{i_2^{(k)}}+\overline{i_3^{(k)}}=m$$

dersek

$$i_1^{(1)}+i_2^{(1)}+i_3^{(1)}+\ldots+i_1^{(k)}+i_2^{(k)}+i_3^{(k)}\neq m$$

için $a_{i_1^{(1)}i_2^{(1)}i_3^{(1)}\ldots i_1^{(k)}i_2^{(k)}i_3^{(k)}}=0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.3: k tane vektör için LS(3)- invaryant polinom sabit polinomdur.

İspat: k tane vektör için LS(3)- invaryant polinom aynı zamanda LH(3) invaryant olması gerektiğinden Teorem 3.1 e göre sabit polinomdur.

Önerme 3.4: $H\subset S(3)$ bir altgrup ve *f*, H-invaryant rasyonel fonksiyon olsun. Bu durumda *f*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

olacak şekilde çarpanları eşit iki nispi invaryant polinomun bölümü biçiminde yazılabilir.

İspat: $f(x)$, H- invaryant olduğundan $\forall h \in H$ için $f(hx) = f(x)$ dir. f rasyonel fonksiyon olduğundan, P ve Q aralarında asal polinomlar olmak üzere

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$f(hx) = \frac{P(hx)}{Q(hx)} = \frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

dir. Bu eşitlikten, $P(hx).Q(x) = P(x).Q(hx)$ elde edilir. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları aralarında asal ve $P(hx) = \frac{P(x)Q(hx)}{Q(x)}$ olduğundan $Q(hx)$, $Q(x)$ polinomuna bölünecektir. Yani, bir $\varphi(x,h)$ polinomu mevcut öyleki, $Q(hx) = \phi(x,h)Q(x)$ olacaktır. Polinomların eşitliğinden her iki tarafın derecesi eşit olacaktır. Bu durumda $\phi(x,h)$ polinomu sadece h ye bağlı olmalıdır. O halde

$$Q(hx) = \phi(h)Q(x)$$

dir. Bu eşitliği yukarıda yerine yazarsak,

$$P(hx) = \frac{P(x)\phi(h)Q(x)}{Q(x)}$$

olacağından

$$P(hx) = \phi(h)P(x)$$

dir.

Teorem 3.2: k tane vektör için m. dereceden nispi LS(3)- invaryant polinom

1. $k=1$ ise $P(x) = a_m\langle x,x\rangle^m$ biçimindedir.

2. $k \geq 2$ ve f çift invaryant ise,

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right) = \sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} a_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)} i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)} i_k^{(k)}} B \qquad (7)$$

3. $k \geq 2$ ve f tek invaryant ise,

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right) = \sum_{\substack{i,j,s=1\\ i<j<s}}^{k} \left[x^{(i)} \quad x^{(j)} \quad x^{(s)}\right] \sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} a^{(i)(j)(s)}_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)} i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)} i_k^{(k)}} B$$

(8)

biçimindedir. Burada

$$B = A_{i^{(1)}} A_{i^{(2)}} \ldots A_{i^{(k-1)}} A_{i^{(k)}}$$

ve

$$A_{i^{(1)}} = \left(\prod_{s=1}^{k} \left\langle x^{(1)}, x^{(s)}\right\rangle^{i^{1}_{s}}\right), \; A_{i^{(2)}} = \left(\prod_{t=2}^{k} \left\langle x^{(2)}, x^{(t)}\right\rangle^{i^{2}_{t}}\right), \ldots,$$

$$A_{i^{(k-1)}} = \left(\prod_{p=k-1}^{k} \left\langle x^{(k-1)}, x^{(p)}\right\rangle^{i^{k-1}_{p}}\right), A_{i^{(k)}} = \left\langle x^{(k)}, x^{(k)}\right\rangle^{i^{k}_{k}}$$

dir.

İspat: k tane vektör için m. dereceden nispi LS(3)- invaryant polinom hem nispi O(3)- invaryant ve hem de nispi LH(3)- invaryant olacağından Önerme 3.2 ve Teorem 3.1 den görülebilir.

Teorem 3.3: k tane vektör için LS(3)- invaryant **rasyonel fonksiyonlar** cisminin yani $\boldsymbol{R(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{LS(3)}}$ üreteç kümesi

$$\left\{\frac{\langle x^{(i)},x^{(j)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}, i,j = 1,\ldots,k \;;\; i \leq j\right\} \qquad (9)$$

dir.

İspat: k tane vektör için **çift** LS(3) invaryant rasyonel fonksiyon, Önerme 3.4.' e göre çarpanları eşit olan iki çift nispi LS(3)- polinomun oranı şeklinde yazılabilir. Teorem 3.2' ye göre de çift nispi LS(3)- polinomlar terimlerinin dereceleri toplamı m olan polinomlar olduğundan k tane vektör için çift LS(3) invaryant **rasyonel fonksiyon** dereceleri aynı olan iki nispi invaryant polinomun oranı biçiminde olacaktır. Buna göre

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right) = \frac{\sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} a_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)} i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)} i_k^{(k)}} B}{\sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} b_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)} i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)} i_k^{(k)}} B}$$

biçimindedir. Burada $\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle \neq 0$ olmak üzere pay ve paydayı $\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle^m$ sayısına bölersek,

$$i_1^{(1)} + \cdots + i_k^{(1)} + i_2^{(2)} + \cdots + i_k^{(2)} + \cdots + i_k^{(k-1)} + i_k^{(k)} = m$$

olduğundan daha sade biçimde

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right)=\frac{\sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} a_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)}i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)}i_k^{(k)}}U}{\sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} b_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)}i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)}i_k^{(k)}}U}$$

ile ifade edilebilir. Burada

$$U=N_{i^{(1)}}N_{i^{(2)}}\ldots N_{i^{(k-1)}}N_{i^{(k)}}$$

ve

$$N_{i^{(1)}}=\prod_{s=1}^{k}\left(\frac{\langle x^{(1)},x^{(s)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}\right)^{i_s^{(1)}},\ N_{i^{(2)}}=\prod_{t=2}^{k}\left(\frac{\langle x^{(2)},x^{(t)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}\right)^{i_t^{(2)}},$$

$$\ldots,N_{i^{(k-1)}}=\prod_{p=k-1}^{k}\left(\frac{\langle x^{(k-1)},x^{(p)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}\right)^{i_p^{(k-1)}},\ N_{i^{(k)}}=\left(\frac{\langle x^{(k)},x^{(k)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}\right)^{i_k^{(k)}}$$

dir. Burada $i,j=1,\ldots,k$ ve $i\le j$ için $\frac{\langle x^{(i)},x^{(j)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}$ LS(3)- invaryant rasyonel fonksiyonlardır. İnvaryant bir fonksiyonun keyfi toplamı, çarpımı ve bölünmesi de invaryanttır. Dolayısıyla k tane vektör için LS(3)- invaryant rasyonel fonksiyon $i,j=1,\ldots,k$ ve $i\le j$ için $\frac{\langle x^{(i)},x^{(j)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}$ ile üretilebilir.

Şimdi f tek olsun. Benzer şekilde **tek** LS(3) invaryant rasyonel fonksiyon, Önerme 3.4.' e göre çarpanları eşit olan iki tek nispi LS(3)- polinomun oranı şeklinde yazılabilir. Teorem 3.2' ye göre de tek nispi LS(3)- polinomlar terimlerinin dereceleri toplamı m olan polinomlar ile vektörlerin üçerli determinant değerlerinin çarpımlarından oluştuğundan k tane vektör için tek LS(3) invaryant **rasyonel fonksiyon,**

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right)=\frac{\sum_{\substack{i,j,s=1\\ i<j<s}}^{k}[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]\sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} a^{(i)(j)(s)}_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)}i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)}i_k^{(k)}}B}{\sum_{\substack{i,j,s=1\\ i<j<s}}^{k}[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]\sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} b^{(i)(j)(s)}_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)}i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)}i_k^{(k)}}B}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]\neq 0$ ve $\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle\neq 0$ olmak üzere pay ve paydayı $[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]$ ve $\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle^m$ sayılarına ayrı ayrı bölersek,

$$i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\cdots+i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m$$

olduğundan daha sade biçimde

$$f\left(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}\right)=$$

$$=\frac{\sum_{\substack{i,j,s=1\\ i<j<s}}^{k}\frac{[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]}{[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]}\sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} a^{(i)(j)(s)}_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)}i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)}i_k^{(k)}}U}{\sum_{\substack{i,j,s=1\\ i<j<s}}^{k}\frac{[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]}{[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]}\sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+\\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+\\ +\cdots+\\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} b^{(i)(j)(s)}_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)}i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)}i_k^{(k)}}U}$$

ile ifade edilebilir. Burada,

$$\frac{[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]}{[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]};\ i,j,s=1,\ldots,k;\quad i<j<s$$

ve

$$i,j=1,\ldots,k\ \text{ ve }\ i\le j\ \text{ için }\ \frac{\langle x^{(i)},x^{(j)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}$$

fonksiyonları LS(3)- invaryant rasyonel fonksiyonlardır. İnvaryant bir fonksiyonun keyfi toplamı, çarpımı ve bölünmesi de invaryanttır. Dolayısıyla k tane vektör için LS(3)- invaryant rasyonel fonksiyon

$$\frac{[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]}{[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]},\ i,j,s=1,\ldots,k;\quad i<j<s$$

ve

$$\frac{\langle x^{(i)},x^{(j)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle}\ \ i,j=1,\ldots,k\ \text{ ve }\ i\le j$$

ile üretilebilir. Burada

$$\frac{[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]}{[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]},\ i,j,s=1,\ldots,k;\quad i<j<s$$

ifadesini incelediğimizde $i,j,s=1,\ldots,k;\ i<j<s$ için

$$\frac{[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]}{[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]}=\frac{[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]}{[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]}.1$$

$$=\frac{[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}].[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]}{[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]^2}$$

olur. Böylece, $[x^{(i)}\ \ x^{(j)}\ \ x^{(s)}]$ ve $[x^{(1)}\ \ x^{(2)}\ \ x^{(3)}]$ determinantları tek invaryant polinom ve iki tek invaryant polinomun çarpımı çift invaryant polinom olduğundan bu ifade iki çift invaryant polinomun oranı biçiminde olur ki bu da

$$\frac{[x^{(i)} \quad x^{(j)} \quad x^{(s)}]}{[x^{(1)} \quad x^{(2)} \quad x^{(3)}]} \quad , i,j,s = 1,\ldots,k; \quad i<j<s$$

ifadesinin de

$$\frac{\langle x^{(i)},x^{(j)}\rangle}{\langle x^{(1)},x^{(1)}\rangle} \quad i,j=1,\ldots,k \text{ ve } \quad i \le j$$

ile üretilebilir olduğunu gösterir.

Teorem 3.4: k tane vektör için tanımlı bir $f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})$ rasyonel fonksiyonu S(3)- invaryant ise

$$g(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}) = f(0,x^{(2)}-x^{(1)},\ldots,x^{(k)}-x^{(1)})$$

rasyonel fonksiyonu LS(3)- invaryanttır. Tersine,

$$f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}) = h(x^{(2)}-x^{(1)},\ldots,x^{(k)}-x^{(1)})$$

biçiminde yazılsın. h , LS(3)- invaryant ise, $f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})$ S(3)- invaryanttır.

İspat: k tane vektör için tanımlı bir fonksiyon f, S(3)- invaryant olsun.

$$g(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}) = f(0,x^{(2)}-x^{(1)},\ldots,x^{(k)}-x^{(1)})$$

fonksiyonunun LS(3) invaryant olduğunu gösterelim. f, S(3)- invaryant olduğundan her $\lambda w \in LS(3)$ ve her $b \in R^3$ için

$$f(\lambda w x^{(1)}+b,\ldots,\lambda w x^{(k)}+b) = f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})$$

dir. Özel olarak $b=0$ için de doğrudur. Dolayısıyla

$$f(\lambda w x^{(1)},\ldots,\lambda w x^{(k)}) = f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})$$

sağlanır. g nin tanımından dolayı her $\lambda w \in LS(3)$ için

$$g(\lambda w x^{(1)},\ldots,\lambda w x^{(k)}) =$$

$$= f\left(0,\lambda w(x^{(2)}-x^{(1)}),\ldots,\lambda w(x^{(k)}-x^{(1)})\right)$$

$$= f(0,x^{(2)}-x^{(1)},\ldots,x^{(k)}-x^{(1)}) = g(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})$$

olur ki bu durum g' nin LS(3) invaryant olduğunu gösterir.

Tersine, k tane vektör için tanımlı bir fonksiyon $f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}) = h(x^{(2)}-x^{(1)},\ldots,x^{(k)}-x^{(1)})$ biçiminde yazılsın ve h , LS(3) invaryant olsun. f nin S(3)- invaryant olduğunu gösterelim. Burada f nin tanımından ve h , LS(3) invaryant olduğundan her $\lambda w \in LS(3)$ ve her $b \in R^3$ için

$$f(\lambda w x^{(1)}+b,\ldots,\lambda w x^{(k)}+b) =$$

$$= h\left((\lambda w x^{(2)}+b)-(\lambda w x^{(1)}+b),\ldots,(\lambda w x^{(k)}+b)-(\lambda w x^{(1)}+b)\right)$$

$$= h\left(\lambda w(x^{(2)}-x^{(1)}),\ldots,\lambda w(x^{(k)}-x^{(1)})\right)$$

$$= h(x^{(2)}-x^{(1)},\ldots,x^{(k)}-x^{(1)})$$

$$= f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})$$

olduğu görülür. Dolayısıyla f , S(3)- invaryanttır.

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.5: k tane vektör için S(3) invaryant rasyonel fonksiyon

f çift ise,

$$f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}) = \frac{\sum\limits_{\substack{+i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+ \\ +\cdots+ \\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} a_{i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)} i_k^{(k)}} Y}{\sum\limits_{\substack{+i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+ \\ +\cdots+ \\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} b_{i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)} i_k^{(k)}} Y}$$

f tek ise,

$$f(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}) =$$

$$= \frac{\sum_{\substack{i,j,s=1 \\ i<j<s}}^{k} [x^{(i)}-x^{(1)} \quad x^{(j)}-x^{(1)} \quad x^{(s)}-x^{(1)}]\, D}{\sum_{\substack{i,j,s=1 \\ i<j<s}}^{k} [x^{(i)}-x^{(1)} \quad x^{(j)}-x^{(1)} \quad x^{(s)}-x^{(1)}]\, E}$$

biçimindedir. Burada

$$D = \sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+ \\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+ \\ +\cdots+ \\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} a^{(i)(j)(s)}_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)} i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)} i_k^{(k)}} Y$$

$$E = \sum_{\substack{i_1^{(1)}+\cdots+i_k^{(1)}+ \\ +i_2^{(2)}+\cdots+i_k^{(2)}+ \\ +\cdots+ \\ +i_k^{(k-1)}+i_k^{(k)}=m}} b^{(i)(j)(s)}_{i_1^{(1)}\ldots i_k^{(1)} i_2^{(2)}\ldots i_k^{(2)}\ldots i_k^{(k-1)} i_k^{(k)}} Y$$

dir.

Ayrıca

$$Y = L_{i^{(2)}} L_{i^{(3)}} \ldots . L_{i^{(k-1)}} L_{i^{(k)}}$$

ve

$$L_{i^{(2)}} = \prod_{s=2}^{k} \left(\langle x^{(2)} - x^{(1)}, x^{(s)} - x^{(1)} \rangle \right)^{i_s^{(2)}}$$

$$L_{i^{(3)}} = \prod_{t=3}^{k} \left(\langle x^{(3)} - x^{(1)}, x^{(t)} - x^{(1)} \rangle \right)^{i_t^{(3)}}, \ldots,$$

$$L_{i^{(k)}} = \left(\langle x^{(k)} - x^{(1)}, x^{(k)} - x^{(1)} \rangle \right)^{i_k^{(k)}}$$

dir.

İspat: Bu durum Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 ün bir sonucudur.

Teorem 3.6: k tane vektör için S(3) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteç kümesi

1. $k \leq 2$ ise 1 dir.

2. $k \geq 3$ ise

$$\left\{ \frac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} \right\}$$

$$i = 2, \ldots, k \ , \ j = 2, \ldots, k \quad \text{ve} \quad i \leq j \tag{10}$$

dir.

İspat: Teorem 3.3 ün ispatında olduğu gibi tek LS(3)-invaryant polinomlarda iki determinant değerinin oranı biçimindeki fonksiyon çift LS(3)-invaryant olacağından ispat kolayca görülebilir.

KAYNAKLAR

[1] Khadjiev Dj. (1967), Some Questions in the Theory of Vector Invariants, *Math. USSR- Sbornic*, 1 (3): 383-396.

[2] Grosshans F. (1973), Obsevable Groups and Hilbert's Problem, *American Journal of Math.*, 95:229-253.

[3] Klein F. (1893), A comperative review of recent researches in geometry (Dr. M.W. Haskell, trans.) *Bulletin of the New York Mathematical Society*, 2 : 215-249.

[4] Weyl H. (1946), The Classical Groups, Their Invariants and Representations, 2nd ed., with suppl., *Princeton University Press*, Princeton.

[5] Khadjiev Dj. (1988), An Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry of Curves, Fan, Tashkent (in Russian).

[6] Incesu M. (2008), The Complete System of Point Invariants in the Similarity Geometry, *Phd. Thesis, Karadeniz Technical University*, Trabzon.

[7] Sagiroglu Y. (2011), "The Equivalence Problem For Parametric Curves In One-Dimensional Affine Space", *International Mathematical Forum*, 6: 177-184.

[8] Sagiroglu Y. (2015), "Equi-affine differential invariants of a pair of curves", *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6 : 238-245.

[9] Sagiroglu Y., Peksen O. (2010), "The Equivalence Of Centro-Equiaffine Curves", *Turkish Journal of Mathematics*, 34: 95-104.

[10] Oren İ. (2016), "Complete System of Invariants of Subspaces of Lorentzian Space", *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A-Science*, 40(3): 1-8.

[11] Khadjiev D., Oren İ., Peksen O. (2013) , "Generating systems of differential invariants and the theorem on existence for curves in the pseudo-Euclidean geometry", *Turkish Journal of Mathematics*, 37: 80-94.

[12] Karataş M. (2005), Noktalar Sisteminin Öklid İnvaryantları, Y. Lisans Tezi, *Karadeniz Teknik Üniversitesi*, Trabzon.

[13] Incesu M., Gürsoy O. (2017**)**, "LS(2)-Equivalence Conditions of Control Points and Application to Planar Bezier Curves" *New Trends in Mathematical Science*, 5 (3), 70-84.

[14] Incesu M., Gürsoy O. (2017) "Düzlemsel Bezier Eğrilerinin S(2)- Denklik Şartları", *Muş Alparslan University Journal of Science*, 5 (2), 471-477.

[15] İncesu M., (2017) , "THE SIMILARITY ORBITS IN R^3" *Modelling and Application & Theory*, 2 (1), 28-37.

[16] Nikulin V. And Shafarevich I.R. (1994),Geometries and Groups,Springer, NewYork.

[17] Ören, İ.(2018) On the control invariants of planar Bezier curves for the groups M (2) and SM (2). Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 10, 74-81.

[18] Ören İ.(2018), "Equivalence conditions of two Bézier curves in the Euclidean geometry", Iranian Journal of Science and Technology Transaction A-Science, 42(3),1563-1567.

[19] Çoban H.A.(2019), "Complete System of Invariants of Vectors for Isometry Group in n-dimensional Unitary Space", Communications Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1. Mathematics and Statistics, 68, 362-370.

[20] Ören İ, Çoban H.A. (2014), "Some Invariant Properties of Curves in the Taxicab Geometry", Missouri Journal of Mathematical Sciences, 26(2), 107-114.