Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg.,Cilt:2,Sayı:2,2012,32-40/Ordu Univ. J. Sci. Tech.,Vol:2,No:2,2012,32-40

İKİNCİ TÜREVİ PREQUASİİNVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

İmdat İŞCAN[1*], Selim NUMAN[1], Kerim BEKAR[1]

[1]*Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Giresun - TÜRKİYE*

ÖZET

Bu makalede, Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sağ tarafı ile ilgili bazı tahminleri ikinci türevlerinin mutlak değerleri prequasiinveks olan fonksiyonlar için C koşulu altında genişlettik.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, inveks küme, C koşulu, prequasiinveks fonksiyonlar.

HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR FUNCTIONS WHOSE SECOND DERIVATIVE ARE PREQUASICONVEX

ABSTRACT

In this paper, we extend some estimates of the right hand side of a Hermite-Hadamard type inequality under the condition C for functions whose second derivatives absolute values are prequasiinvex.

Keywords: Hermite-Hadamard's inequality, invex set, condition C, prequasiinvex functions.

1. GİRİŞ

$a,b \in \mathbb{R},\ a<b,\ I=[a,b]$ ve $f:I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizliğin son yıllarda birçok genelleştirilmesi yapılmıştır, örnek olarak [1], [3], [4] ve onların kaynakları verilebilir.

Aşağıdaki lemma ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için ispatlandı [4]:

* *Sorumlu Yazar:* imdat.iscan@giresun.edu.tr

Lemma 1 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° (I nın içi) üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, $[a,b] \subset I^{\circ}$, $a<b$ olmak üzere $f'' \in L_1[a,b]$ ise,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(ta+(1-t)b)dt, \tag{2}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 1'i kullanarak [1]'de quasikonveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerle ilgili aşağıdaki teoremleri ispatladı:

Teorem 1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^{o}$, $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ üzerinde quasikonveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{12}\max\{|f''(a)|, |f''(b)|\} \tag{3}$$

dir.

Teorem 2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^{o}$, $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve $q>1$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ üzerinde quasikonveks ise $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ &\le \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\max\left\{|f''(a)|^{q}, |f''(b)|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{4}$$

dir.

Teorem 3. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^{o}$, $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve $q \ge 1$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ üzerinde quasikonveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{12}\max\left\{|f''(a)|^{q}, |f''(b)|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

dir.

Bu makalede, giriş kısmında bahsedilen (3), (4) ve (5) numaralı eşitsizlikler prequasiinveks fonksiyonlar için elde edildi.

2. MATERYAL VE METOD

Öncelikle inveks küme tanımını verelim:

Tanım 1. $K \subset \mathbb{R}^n$ ve $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için $x + t\eta(y,x) \in K$ ise K ya η ya göre inveks bir küme denir [8].

Her konveks kümenin $\eta(y,x) = y - x$ fonksiyonuna göre invex olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani konveks olmayan inveks kümeler mevcuttur [2].

Preinveks fonksiyonlar ilk kez Pini tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı [7]:

Tanım 2. $K \subset \mathbb{R}^n$ inveks bir küme, $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(x + t\eta(y,x)\right) \le \max\left\{ f(x), f(y) \right\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye η ya göre prequasiinveks fonksiyon denir. Her quasikonveks fonksiyonun $\eta(y,x) = y - x$ fonksiyonuna göre prequasiinveks olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani quasikonveks olmayan prequasiinveks fonksiyonlar mevcuttur [9].

η fonksiyonu üzerine aşağıdaki koşul Mohan ve Neogy tarafından konulmuştur [5].

C Koşulu: $K \subset \mathbb{R}^n$, $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$' ya göre inveks bir küme olsun. $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} \eta\left(y, y + t\eta(x,y)\right) &= -t\eta(x,y) \\ \eta\left(x, y + t\eta(x,y)\right) &= (1-t)\eta(x,y) \end{aligned} \tag{6}$$

C koşulundan $\forall x, y \in K$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\eta\left(y + t_2\eta(x,y), y + t_1\eta(x,y)\right) = \left(t_2 - t_1\right)\eta(x,y)$$

eşitliği elde edilir.

[6] da Noor preinveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini ispatladı:

Teorem 4. $f:[a,a+\eta(b,a)]\to(0,\infty)$, $a,b\in K^{\circ}$, $a<a+\eta(b,a)$, K° deki reel sayıların bir aralığı üzerinde preinveks fonsiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\le\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\le\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

3. BULGULAR VE SONUÇLAR

Lemma 2. $K\subset\mathbb{R}$, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$'ya göre inveks ve açık bir küme, $a,b\in K$, $a<a+\eta(b,a)$, $f:K\to\mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve f'', $[a,a+\eta(b,a)]$ aralığı üzerinde integrallenebilir ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\\&=\frac{\eta^2(b,a)}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(a+t\eta(b,a))dt\end{aligned}\tag{7}$$

İspat. $a,b\in K$ ve $K\subset\mathbb{R}$, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$'ya göre inveks olduğundan $\forall t\in[0,1]$ için $a+t\eta(b,a)\in K$ dir. İspat lemma1 deki gibi olup, (7) eşitliğinin sağ tarafındaki integrale iki kez kısmi integrasyon uygulandığında eşitlik kolayca görülür.

Teorem 5. $K\subset\mathbb{R}$, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$'ya göre inveks ve açık bir küme, $a,b\in K$, $a<a+\eta(b,a)$, $f:K\to\mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, f'', $[a,a+\eta(b,a)]$ aralığında integrallenebilir olsun. $|f''|$, $[a,a+\eta(b,a)]$ üzerinde prequasiinveks ve $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu C koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|\\&\le\frac{\eta^2(b,a)}{12}\max\left\{|f''(a)|,|f''(a+\eta(b,a))|\right\}\end{aligned}\tag{8}$$

İspat. $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun C koşulunu sağlaması durumunda (6) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} &\left| f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right| = \left| f''\left(a+\eta(b,a)+(1-t)\eta(a,a+\eta(b,a))\right)\right| \\ &\leq \max\left\{\left| f''\left(a\right)\right|, \left| f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (7) eşitliği ve $\left| f''\right|$ nin prequasiinveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right| \\ &= \frac{\eta^2(b,a)}{2} \int_0^1 \left| t(1-t)\right| \left| f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right| dt \\ &\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2} \int_0^1 t(1-t) \max\left\{\left| f''\left(a\right)\right|, \left| f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|\right\} dt \\ &\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2} \left\{ \max\left\{\left| f''\left(a\right)\right|, \left| f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|\right\} \int_0^1 t(1-t)dt \right\} \\ &= \frac{\eta^2(b,a)}{12} \max\left\{\left| f''\left(a\right)\right|, \left| f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 1. a) (8) eşitsizliğinde $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa (3) eşitsizliği elde edilir.

b) (8) eşitsizliğinde $\left| f''\right|$ nin prequasiinveksliği kullanılırsa

$$\left| f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right| \leq \left| f''\left(b\right)\right|$$

olduğundan (8) eşitsizliğinden aynı zamanda

$$\left| \frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right| \leq \frac{\eta^2(b,a)}{12} \max\left\{\left| f''\left(a\right)\right|, \left| f''\left(b\right)\right| \right\} \tag{10}$$

eşitsizliği elde edilir.

c) Teorem 5 de, $\eta: K\times K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu üzerine C koşulu konulmadığı takdirde, $\left| f''\right|$ nin prequasiinveksliği kullanılarak benzer ispat yöntemiyle yine (10) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 6. $K\subset\mathbb{R}$, $\eta: K\times K \to \mathbb{R}$'ya göre inveks ve açık bir küme, $a,b\in K$, $a<a+\eta(b,a)$, $f: K\to\mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, f'', $\left[a, a+\eta(b,a)\right]$ aralığında integrallenebilir ve $q>1$ olsun. $\left| f''\right|^q$, $\left[a, a+\eta(b,a)\right]$

üzerinde prequasiinveks ve $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu C koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right| \leq \frac{\eta^2(b,a)}{12}\left[\max\left\{\left|f''(a)\right|^q, \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{11}$$

İspat. (7) eşitliği, $|f''|^q$ için (9) eşitsizliği, $|f''|^q$ nin prequasiinveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right| \\
&= \frac{\eta^2(b,a)}{2}\int_0^1 \left|t(1-t)\right|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right| dt \\
&\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2}\left(\int_0^1 t(1-t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t(1-t)\max\left\{\left|f''(a)\right|^q, \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2.6^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|^q, \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)\int_0^1 t(1-t)dt\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\eta^2(b,a)}{2.6^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\max\left\{\left|f''(a)\right|^q, \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}}{6}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\eta^2(b,a)}{12}\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|^q, \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 2. a) (11) eşitsizliğinde $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa (5) eşitsizliği elde edilir.

b) (11) eşitsizliğinde $|f''|$ nin prequasiinveksliği kullanılırsa

$$\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right| \leq \left|f''(b)\right|$$

olduğundan (11) eşitsizliğinden aynı zamanda

$$\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta^2(b,a)}{12}\left[\max\left\{\left|f''(a)\right|^q, \left|f''(b)\right|^q\right\}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{12}$$

eşitsizliği elde edilir.

c.) Teorem 6 da, $\eta: K\times K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu üzerine C koşulu konulmadığı taktirde, $|f''|$ nin prequasiinveksliği kullanılarak benzer ispat yöntemiyle yine (12) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 7. $K\subset\mathbb{R}$, $\eta: K\times K\to\mathbb{R}$'ya göre inveks ve açık bir küme, $a,b\in K$, $a<a+\eta(b,a)$, $f:K\to\mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, f'', $[a,a+\eta(b,a)]$ aralığında integrallenebilir ve $q>1$ olsun. $|f''|^q$, $[a,a+\eta(b,a)]$ üzerinde prequasiinveks ve $\eta: K\times K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu C koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta^2(b,a)}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|^q, \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{13}$$

İspat. (7) eşitliği, $|f''|^q$ için (9) eşitsizliği, $|f''|^q$ nin preinveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$=\frac{\eta^2(b,a)}{2}\int_0^1 |t(1-t)|\left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|dt$$
$$\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2}\left(\int_0^1 t^p(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \max\left\{\left|f''(a)\right|^q, \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\max\left\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(a+\eta(b,a))\right|^q\right\}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{\eta^2(b,a)}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(a+\eta(b,a))\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{\eta^2(b,a)}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(a+\eta(b,a))\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (t-t^2)^p\,dt=\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)} \quad \text{ve} \quad \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}du$$

Gamma fonksiyonudur. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3. a) (13) eşitsizliğinde $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa (4) eşitsizliği elde edilir.

b) (13) eşitsizliğinde $\left|f''\right|$ nin prequasiinveksliği kullanılırsa

$$\left|f''(a+\eta(b,a))\right|\leq\left|f''(b)\right|$$

olduğundan (13) eşitsizliğinden aynı zamanda

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$
$$\leq\frac{\eta^2(b,a)}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{14}$$

eşitsizliği elde edilir.

c.) Teorem 7 de, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu üzerine C koşulu konulmadığı takdirde, $\left|f''\right|$ nin prequasiinveksliği kullanılarak benzer ispat yöntemiyle yine (14) eşitsizliği elde edilir.

KAYNAKLAR

[1]Alomari M, Darus M., Dragomir S.S., **(2010)**, *Tamk. J. Math*., 41, p.353-359.

[2]Antczak T., **(2005)**, *Nonlinear Analysis*, 60, p.1471-1484.

[3]Dragomir S.S., Agarwal R.P., **(1998)**, *Appl. Math. Lett.*, 11 (5), p.91-95.

[4]Dragomir S.S., Pearce C.E.M., *Selected Topics and Applications*, **(2000)**, RGMIA Monographs, Victoria University, Australia, p.349.

[5]Mohan S.R., Neogy S.K., **(1995)**, *J. Math. Anal. Appl.*, 189, p.901-908.

[6]Noor M.A., **(2007)**, *J. Math. Anal. Approx. Theory*, 2, p.126-131.

[7]Pini R., **(1991)**, *Optimization*, 22, p.513-525.

[8]Weir T., Mond B., **(1988)**, *Journal of Math. Analysis and Appl,.* 136, p.29-38.

[9]Yang X.M.,Yang X.Q., Teo K.L., **(2001)**, *J. Optim. Theo. Appl.*, 110, p.645-668.