

## BERTRAND E R Ç FT N N KÜRESEL GÖSTERGELER N N GEODEZİK E R L KLER VE TABİİ LİFTLER

Süleyman ENYURT \*\*, Zeynep ÖZGÜNER

Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ordu

### ÖZET

Bu çalışmada  $(\gamma, \gamma^*)$  Bertrand e ri çifti olarak alındı. İnda  $\gamma^*$  e risinin  $\gamma^*(s)$  noktasındaki  $\{T^*, N^*, B^*\}$  Frenet vektörlerinin ve bu vektörlere ba lı  $C^*$  birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde olu turdukları  $(T^*), (N^*), (B^*)$  küresel gösterge e rileri ve  $(C^*)$  sabit pol e risinin yay uzunlukları,  $E^3$  ve  $S^2$  ye göre geodezik e rilikleri hesaplandı. Ayrıca bu küresel gösterge e rileri ve sabit pol e risinin tabii lift e rileri geodezik sprayın integral e risi olması için  $\Gamma$  e risinin nasıl bir e ri oldu una dair sonuçlar verildi.

**Anahtar Kelimeler:** Bertrand e ri çifti, tabii lift, geodezik spray

### THE NATURAL LIFT CURVES AND GEODESIC CURVATURES OF THE SPHERICAL INDICATRICES OF THE BERTRAND CURVE COUPLE

#### ABSTRACT

In this study, the arclenghts and the geodesic curves of the curvatures,  $(T^*), (N^*), (B^*)$  and fixed pole curve,  $(C^*)$  have been obtained according to  $E^3$  and  $S^2$  when  $(a, a^*)$  is considered to be a Bertrand curve couple. Here  $(T^*), (N^*), (B^*)$  are spherical indicatrix curve drawn by  $\{T^*, N^*, B^*\}$  Frenet vectors of  $a^*$  at point  $a^*(s)$  and  $(C^*)$  is the fixed pole curve of the corresponding unit Darboux vector  $(C^*)$ . In addition, what type curve  $a$  should be has been examined under the condition that the natural lifts of these curvatures and  $(C^*)$  is the integral curve of geodesic spray.

**Keywords:** Bertrand Curve Couple, Neatural Lift, Geodisic Spray

\* senyurtsuleyman@hotmail.com

## 1. G R

3-Boyutlu Öklid uzayında e rilerin diferansiyel geometrisi üzerinde birçok çalı malar yapılmı tır. Özellikle iki e rinin kar ılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında ba ıntılar kurularak, yeni açılımlar yapılmı tır. nvolüt - Evolüt e riler, Bertrand e ri çiftleri veManheim e rileri birer örnek olarak gösterilebilir.Bir  $\gamma : I \rightarrow M$  e risinin  $\bar{\gamma} : I \rightarrow TM = \bigcup_P T_M(P)$  tabii lift e risi geodezik sprayın bir integral e risi olması için gerek ve yeter art  $M$  üzerinde bir geodezik e ri olmasıdır,[4,11]. Öklid ve Lorentz uzaylarında nvolüt e rilerin küresel gösterge e rilerinin tabii liftleri geodezik spray için integral e risi olma artları evolüt e risine ba lı olarak ifade edilmi tir,[1,2,3,8]. Lorentz uzayında Bertrand e ri çiftleri arasındaki uzaklık ve te et vektörleri arasındaki açının sabit oldu unu gösterilmi tir,[7].  $(\gamma, \gamma^*)$  Bertrand veya Manheim e ri çifti olmak üzere,  $\gamma^*$  e risinin küresel göstergelerinin tabii liftleri geodezik sprayın integral e risi olma artı  $\gamma$  e risine ba lı olarak ifade edilmi tir,[6,12,13,14].

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$   $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$  diferansiyellenebilir birim hızlı bir e ri olsun.

$$(2.1) \quad \|\gamma'\| : I \rightarrow \mathbb{R} \ , \ \|\gamma'\|(s) = \|\gamma'(s)\|$$

eklinde tanımlı fonksiyonuna skaler hız fonksiyonu,

$$(2.2) \quad \gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} \Big|_s = \left( \frac{d\gamma_1(s)}{ds}, \frac{d\gamma_2(s)}{ds}, \frac{d\gamma_3(s)}{ds} \right)$$

vektörüne e rinin hız vektörü ,  $a, b \in I$  olmak üzere

$$(2.3) \quad s = \int_a^b \|\gamma'(t)\| ds$$

reel sayısına da  $\gamma(a)$  ile  $\gamma(b)$  noktaları arasındaki yay uzunluğunu denir.  $\gamma = \gamma(s)$  e risinin Frenet 3-ayaklısı  $\{T(s), N(s), B(s)\}$ , e rili  $\kappa(s)$  ve burulması (torsiyonu)  $\tau(s)$  olmak üzere Frenet formülleri

$$(2.4) \quad \begin{cases} T'(s) = -\kappa(s)N(s), \\ N'(s) = \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

dir. Buna bağlı olarak Darboux vektörü

$$(2.5) \quad W = \tau T + \kappa B$$

olur.  $W$  ile  $B$  arasındaki açı  $\phi$  ile gösterilirse birim Darboux vektörü

$$(2.6) \quad C = \sin \phi T + \cos \phi B$$

eklinde bulunur.  $\gamma: I \rightarrow M$  birim hızlı bir e ri ve  $M$  yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanı  $X$  olsun.

$$(2.7) \quad \frac{d}{ds}(\gamma(s)) = X(\gamma(s))$$

ise  $\gamma$  e risine  $X$  in bir integral e risi denir.  $M$  yüzeyinin  $P$  noktasındaki tanjant uzayı  $T_M(P)$  ve bütün tanjant uzayların cümlesi  $TM = \bigcup_{P \in M} T_M(P)$  ile gösterilsin.

$$(2.8) \quad \bar{\gamma}: I \rightarrow TM, \quad \bar{\gamma}(s) = (\gamma(s), \gamma'(s))$$

e risine  $\gamma: I \rightarrow M$  e risinin tabii lifti denir, [4].  $M$  yüzeyinin birim normal vektör alanı  $N$  ile gösterilirse  $\forall X \in TM$  için

$$(2.9) \quad S(X) = D_X N$$

dönü ümüne ekil operatörü (weingarten dönü ümü),  $v \in TM$  için

$$(2.10) \quad X(v) = -\langle v, S(v) \rangle N|_p$$

eklinde tanımlanan  $X$  vektör alanına geodezik spray, [16]

$$(2.11) \quad \bar{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N$$

denkleminde  $M$  üzerinde Gauss denklemi denir. Burada  $\bar{D}$  Gauss anlamında kovaryant türev operatörüdür.  $\Gamma : I \rightarrow M$  e risinin birim te et vektörü  $T$  olmak üzere

$$(2.12) \quad D_T T = 0$$

ise  $\Gamma$  e risine  $E^3$  de bir geodezik e ri ,

$$(2.13) \quad \bar{D}_T T = 0$$

ise  $\Gamma$  e risine  $M$  yüzeyi üzerinde bir geodezik e ri denir.

$$(2.14) \quad k_g = \|D_T T\|$$

ifadesine  $\Gamma$  e risinin  $E^3$ 'e göre geodezik e rili i,

$$(2.15) \quad \chi_g = \|\bar{D}_T T\|$$

fadesine de  $\Gamma$  e risinin  $M$  'ye göre geodezik e rili i denir.

$\Gamma$  e risinin  $\{T, N, B\}$  Frenet vektörlerinin birim küre üzerinde çizdi i  $(T), (N), (B)$  küresel gösterge e rileri ve  $C$  birim Darboux vektörünün birim küre üzerinde çizdi i  $(C)$  sabit pol e risinin  $E^3$  e göre yay uzunlukları ve geodezik e rilikleri, sırasıyla,

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_T = \int_0^s | \dot{\gamma} | ds \\ s_N = \int_0^s \|W\| ds \\ s_B = \int_0^s \dot{\zeta} ds \\ s_C = \int_0^s \zeta' ds \end{array} \right. ,$$

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_T = \frac{1}{\cos \zeta} \\ k_N = \sqrt{1 + \left( \frac{\zeta'}{\|W\|} \right)^2} \\ k_B = \frac{1}{\sin \zeta} \\ k_C = \sqrt{1 + \left( \frac{\|W\|}{\zeta'} \right)^2} \end{array} \right. ,$$

ve  $S^2$  ye göre geodezik e rilikleri

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_T = \tan \zeta \\ x_N = \frac{\zeta'}{\|W\|} \\ x_B = \cot \zeta \\ x_C = \frac{\|W\|}{\zeta'} \end{array} \right.$$

eklinde verilir, [9].

**Teorem 2.1.**

$\Gamma : I \rightarrow M$  e risinin  $\bar{\Gamma} : I \rightarrow TM$  tabii lift e risi  $X$  geodezik sprayın bir integral e risi olması için gerek ve yeter art  $M$  üzerinde bir geodezik e ri olmasıdır, [4].

**Tanım 2.1.**

$\Gamma : I \rightarrow E^3$  ve  $\Gamma^* : I \rightarrow E^3$  diferensiyellenebilir iki e ri,  $\Gamma$  e risinin Frenet 3-ayaklısı  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  ve  $\Gamma^*$  e risinin Frenet 3-ayaklısı  $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$  olsun.  $\Gamma$  ile  $\Gamma^*$  e risinin asli normal vektörleri lineer ba ımlı ise  $(\Gamma, \Gamma^*)$  ikilisine Bertrand e ri çifti denir. Bu e rilerin Frenet çatıları arasında

$$(2.19) \quad \begin{cases} T^* = \cos \theta T - \sin \theta B \\ N^* = N \\ B^* = \sin \theta T + \cos \theta B \end{cases}$$

ba ıntısı vardır, [10]. Burada  $\theta$  açısı  $T$  ile  $T^*$  arasındaki açıdır.

**Teorem 2.2.**

Bertrand e ri çifti arasındaki uzaklık sabittir, [9,10].

**Teorem 2.3.**

Bertrand e ri çiftinin kar ılıklı noktalarındaki birim te et vektörleri arasındaki açı sabittir, [10].

**Teorem 2.4.**

$(\Gamma, \Gamma^*)$  Bertrand e ri çifti olsun.  $\Gamma$  e risinin e rilik  $\rho$ , torsiyonu  $\tau$  ise bu e rilikler arasında

$$(2.20) \quad \rho \tau + \rho^* \tau^* = 1, \quad \rho^* = -\rho \cot \theta$$
 ba ıntısı vardır, [9].

**Teorem 2.5.**

$(\Gamma, \Gamma^*)$  Bertrand e ri çifti olsun.  $\Gamma$  e risinin e rilik ve torsiyonu  $\rho$  ve  $\tau$ ,  $\Gamma^*$  e risinin e rilik ve torsiyonu  $\rho^*$  ve  $\tau^*$  ile gösterilirse bu e rilikler arasında

$$(2.21) \quad \begin{cases} |^* = \frac{\} | - \sin^2 \_}{\} (1 - \} | ) , \\ \ddagger^* = \frac{\sin^2 \_}{\}^2 \ddagger} \end{cases}$$

ba ntısı vardır,[10]. Burada (2.20) ba ntısı dikkate alınırsa  $|^*$  e rili inin bir ba ka ifadesi

$$(2.22) \quad |^* = \frac{\sin^2 \_ - \} |}{\}^2 \ddagger} \tan \_$$

olur.

### 3.BERTRAND E R Ç FT N N KÜRESEL GÖSTERGELER N N E R L KLER VE TAB L FTLER

#### Teorem 3.1.

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çifti ve bu e rilerin Darboux vektörleri sırasıyla  $W$  ve  $W^*$  olsun. Bu vektörler arasında

$$(3.1) \quad W^* = -\frac{\sin \_}{\} \ddagger} \cdot W \quad \text{ba ntısı vardır.}$$

**spat:**

$r^*$  vektörünün Darboux vektörü

$$W^* = \ddagger^* T^* + |^* B^*$$

eklinde yazılır. Burada  $T^*, B^*, |^*$  ve  $\ddagger^*$  'in yerine (2.19),(2.21) ve (2.22) ba ntısından kar ılıkları yazılır ve gerekli i lemler yapılırsa

$$W^* = \frac{\sin \_}{\} \ddagger} \cdot \left[ \left( \frac{1 - \} |}{\} \right) \tan \_ \cdot T - | B \right]$$

bulunur. Burada  $|B|$  nin yerine (2.5) den karılıklı yazılır ve sonra da

$$1 - \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \cot \theta$$

ifadesi dikkate alınır

$$(3.2) \quad W^* = -\frac{\sin \theta}{\cot \theta} W$$

olur,

### Sonuç 3.1.

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çiftinin birim Darboux vektörleri sırasıyla  $C$  ve  $C^*$  olsun.

Bu vektörler arasında

$$(3.3) \quad C^* = -C$$

bağıntısı vardır.

**spat :**

$r^*$  e risinin birim Darboux vektörü  $C^*$  ile gösterilirse

$$C^* = \frac{W^*}{\|W^*\|}$$

dır. Burada  $W^*$  in yerine (3.2) den karılıklı yazılırsa

$$C^* = -C$$

bulunur.

$(T^*)$  te etler göstergesinin yay uzunluğu  $s_{T^*}$  ile gösterilirse (2.3) bağıntısından

$$s_{T^*} = \int_0^s \left\| \frac{dT^*}{ds} \right\| ds$$

olur.  $T^*$  in yerine (2.19) ve sonra da (2.16) daki karılıklı yazılırsa



$$(3.4) \quad s_{T^*} = \cos \theta s_T + \sin \theta s_B$$

bulunur. Benzer şekilde  $(N^*)$  aslinormaller göstergesinin yay uzunlu u

$$(3.5) \quad s_{N^*} = s_N$$

ve  $(B^*)$  binormaller göstergesinin yay uzunlu u (2.19) ve (2.16) ba ntılarında

$$(3.6) \quad s_{B^*} = \sin \theta s_T - \cos \theta s_B$$

olur.

$(C^*)$  sabit pol e risinin yay uzunlu u  $s_{C^*}$  ile gösterilirse (2.3) ba ntısından

$$s_{C^*} = \int_0^s \left\| \frac{dC^*}{ds} \right\| ds$$

yazılır.  $C^* = \sin \theta T^* + \cos \theta B^*$  ifadesinin türevi alınır ve  $s_{C^*}$  ifadesinde yerine yazılırsa

$$(3.7) \quad s_{C^*} = \int_0^s (\theta') ds$$

bulunur. Diğer yandan

$$\sin \theta = \frac{\theta'}{\|W^*\|} \quad \text{ve} \quad \cos \theta = \frac{\theta''}{\|W^*\|} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\theta'}{\theta''}$$

olur. Burada  $\theta'$  ve  $\theta''$  in yerine (2.21) ve (2.22) deki kar ılıkları yazılır ve sonra da türev alınır

$$(3.8) \quad (\theta')' = \frac{\theta'' \theta' \sin \theta \cos \theta}{\theta'^2 + (1 - 2\theta' \theta'') \sin^2 \theta}$$

bulunur. Bu ifade (3.7) de yerine yazılırsa

$$(3.9) \quad s_{C^*} = \int_0^s \frac{|\gamma'| \cdot \sin \theta \cos \theta}{|\gamma|^2 + (1-2|\gamma|) \sin^2 \theta} ds$$

olur.

### Sonuç3.2.

$(\gamma, \gamma^*)$  Bertrand e ri çifti olsun.  $\gamma^*$  e risinin  $\{T^*, N^*, B^*\}$  Frenet vektörlerinin birim küre üzerinde meydana getirdikleri  $(T^*), (N^*)$  ve  $(B^*)$  küresel göstergeleri ile  $(C^*)$  sabit pol e risinin  $E^3$  e göre yay uzunlukları, sırasıyla,

$$s_{T^*} = \cos \theta s_T + \sin \theta s_B,$$

$$s_{N^*} = s_N,$$

$$s_{B^*} = \sin \theta s_T - \cos \theta s_B,$$

$$s_{C^*} = \int_0^s \frac{|\gamma'| \cdot \sin \theta \cos \theta}{|\gamma|^2 + (1-2|\gamma|) \sin^2 \theta} ds.$$

$(T^*)$  te etler göstergesinin  $E^3$  e göre geodezik e rili i  $k_{T^*}$  ile gösterilirse

$$(3.10) \quad k_{T^*} = \left\| D_{T_{T^*}} T_{T^*} \right\|$$

yazılır.  $\gamma_{T^*}(s_{T^*}) = T^*(s)$  ifadesinin  $s_{T^*}$  ye göre türevi alınırsa,

$$T_{T^*} = N$$

olur. Bu ifadenin tekrar türev alınır ve gerekli i lemler yapılırsa,

$$(3.11) \quad D_{T_{T^*}} T_{T^*} = \frac{-|T + \dagger B}{|\cos \theta + \dagger \sin \theta}$$

bulunur. Bu ifade (3.10) da yerine yazılırsa

$$k_{T^*} = \frac{1}{\cos \{ \cdot \cos \prime + \sin \{ \cdot \sin \prime$$

olur. (2.17) ba ntısından da

$$(3.12) \quad k_{T^*} = \frac{k_T \cdot k_B}{k_B \cdot \cos \prime + k_T \cdot \sin \prime$$

bulunur.

( $N^*$ ) asli normaller göstergesinin  $E^3$  e göre geodezik e rili i  $k_{N^*}$  ile gösterilirse

$$(3.13) \quad k_{N^*} = \|D_{T_{N^*}} T_{N^*}\|$$

yazılır.  $\Gamma_{N^*}(s_{N^*}) = N^*(s)$  ifadesinin  $s_{N^*}$  ye göre türevi alınırsa

$$T_{N^*} = -\cos \{ T + \sin \{ B$$

olur. Tekrar türev alınırsa

$$(3.14) \quad D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{\{ '(\sin \{ T + \cos \{ B)}{\|W\|} - N$$

bulunur. Bu ifade (3.13) de yerine yazılırsa

$$(3.15) \quad k_{N^*} = k_N = \sqrt{\left(\frac{\{ '}{\|W\|}\right)^2 + 1}$$

olur. Di er yandan

$$\sin \{ = \frac{\ddagger}{\|W\|} \text{ ve } \cos \{ = \frac{|}{\|W\|} \Rightarrow \tan \{ = \frac{\ddagger}{|}.$$

Türev alınır

$$(3.16) \quad \{ ' = \frac{\ddagger ' | - | \ddagger}{\|W\|^2}$$

olur. Bu de er (3.15) de yerine yazılırsa

$$(3.17) \quad k_{N^*} = \sqrt{\left(\frac{\ddagger ' | - | \ddagger}{\|W\|^3}\right)^2 + 1}$$

elde edilir.

( $B^*$ ) binormaller göstergesinin  $E^3$  e göre geodezik e rili i  $k_{B^*}$  ile gösterilirse

$$(3.18) \quad k_{B^*} = \|D_{T_{B^*}} T_{B^*}\|$$

yazılır.  $\Gamma_{B^*}(s_{B^*}) = B^*(s)$  ifadesinin  $s_{B^*}$  ye göre türevi alınır

$$T_{B^*} = N$$

bulunur. Tekrar türev alınır

$$(3.19) \quad D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{-|T + \ddagger B}{|\sin_{\ddagger} - \ddagger \cos_{\ddagger}}$$

olur. Bu ifade (3.18) da yerine yazılırsa gerekli i lemler yapılır

$$k_{B^*} = \frac{1}{\cos \{ \cdot \sin_{\ddagger} - \sin \{ \cdot \cos_{\ddagger}}$$

bulunur. (2.17) ba ntısından

$$(3.20) \quad k_{B^*} = \frac{k_T \cdot k_B}{k_B \cdot \sin \theta - k_T \cdot \cos \theta}$$

elde edilir.

( $C^*$ ) pol e risinin  $E^3$  e göre geodezik e rili i  $k_{C^*}$  ile gösterilirse

$$(3.21) \quad k_{C^*} = \left\| D_{T_{C^*}} T_{C^*} \right\|$$

dır.  $\gamma_{C^*}(s_{C^*}) = C^*(s)$  ifadesinin  $s_{C^*}$  ye göre türevi alınırsa

$$T_{C^*} = \cos \{ \theta^* T^* - \sin \{ \theta^* B^*$$

bulunur. Bu ifadenin tekrar türev alınırsa

$$(3.22) \quad D_{T_{C^*}} T_{C^*} = -(\sin \theta^* T^* + \cos \theta^* B^*) + \frac{\|W^*\|}{(\theta^*)'} N$$

olur. Norm alınırsa

$$(3.23) \quad k_{C^*} = \sqrt{1 + \left( \frac{\|W^*\|}{(\theta^*)'} \right)^2}$$

bulunur. Burada  $W^*$  ve  $(\theta^*)'$  'in yerine sırasıyla (3.2) ve (3.8) dan kar ılıkları yazılırsa

$$(3.24) \quad k_{C^*} = \sqrt{\frac{(|^2 + \dagger^2) [\}^2 |^2 + (1-2\} |) \sin^2 \_n ]^2}{(\}^2 \dagger |')^2} + 1$$

elde edilir.

### Sonuç 3.3.

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çiftinin küresel göstergeleri ile sabit pol e risinin  $E^3$  e göre geodezik e rilikleri arasında a a rdaki ba ntılar vardır:

$$k_{T^*} = \frac{k_T \cdot k_B}{k_B \cdot \cos \_n + k_T \cdot \sin \_n},$$

$$k_{N^*} = k_N = \sqrt{\left( \frac{\dagger' | - | \dagger}{\|W\|^3} \right)^2} + 1,$$

$$k_{B^*} = \frac{k_T \cdot k_B}{k_B \cdot \sin \_n - k_T \cdot \cos \_n},$$

$$k_{C^*} = \sqrt{\frac{(|^2 + \dagger^2) (\}^2 |^2 + (1-2\} |) \sin^2 \_n )^2}{(\}^2 \dagger |')^2} + 1.$$

$(T^*)$  te etler göstergesinin  $S^2$  birim küreye göre geodezik e rili i  $\chi_{T^*}$  ile gösterilirse

$$\chi_{T^*} = \left\| \overline{D}_{T^*} T_{T^*} \right\|$$

yazılır. (2.11) ve (3.11) ba ntılarından

$$(3.25) \quad \overline{D}_{T^*} T_{T^*} = \left( \frac{-|}{| \cos \_n + \dagger \sin \_n} + \cos \_n \right) T + \left( \frac{\dagger}{| \cos \_n + \dagger \sin \_n} - \sin \_n \right) B$$

bulunur. Bu ifade  $\chi_{T^*}$  ifadesinde yerine yazılırsa

$$\chi_{T^*} = \sqrt{\frac{|\dot{\theta}|^2 + \ddot{\theta}^2}{(|\cos \theta + \dot{\theta} \sin \theta|)^2}} - 1$$

olur. (2.17) ba ntısından da

$$(3.26) \quad \chi_{T^*} = \sqrt{\left(\frac{k_T k_B}{k_B \cos \theta + k_T \sin \theta}\right)^2} - 1$$

elde edilir.

$(N^*)$  asli normaller göstergesinin  $S^2$  ye göre geodezik e rili i  $\chi_{N^*}$  ile gösterilirse

$$\chi_{N^*} = \|\overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*}\|$$

yazılır. (2.11) ve (3.14) ba ntılarından

$$(3.27) \quad \overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{\{\}'(\sin \{ T + \cos \{ B)}{\|W\|}$$

bulunur. Bu ifade  $\chi_{N^*}$  da yerine yazılırsa

$$\chi_{N^*} = \frac{\{\}'}{\|W\|}$$

olur. (3.16) ba ntısından

$$(3.28) \quad \chi_{N^*} = \frac{\dot{\theta}' - |\ddot{\theta}|}{\|W\|^3}$$

elde edilir.

$(B^*)$  binormaller göstergesinin  $S^2$  ye göre geodezik e rili i  $\chi_{B^*}$  ile gösterilirse

$$\chi_{B^*} = \left\| \overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} \right\|$$

olur. (2.11) ve (3.19) ba ntılarından

(3.29)

$$\overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = \left( \frac{-|\dot{\phantom{a}}|}{|\cos \theta - \dot{\phantom{a}} \sin \theta} + \sin \theta \right) T + \left( \frac{\dot{\phantom{a}}}{|\cos \theta - \dot{\phantom{a}} \sin \theta} + \cos \theta \right) B$$

bulunur. Bu ifade  $\chi_{B^*}$  da yerine yazılırsa

$$\chi_{B^*} = \sqrt{\frac{|\dot{\phantom{a}}|^2 + \dot{\phantom{a}}^2}{(|\cos \theta - \dot{\phantom{a}} \sin \theta|)^2} + 1 - \frac{2(|\sin \theta - \dot{\phantom{a}} \cos \theta|)}{|\cos \theta - \dot{\phantom{a}} \sin \theta|}}$$

olur. Burada (2.17) ba ntısı dikkate alınırsa

$$(3.30) \quad \chi_{B^*} = \sqrt{\left( \frac{k_T k_B}{k_B \cos \theta - k_T \sin \theta} \right)^2 + 1 - \frac{2(|\sin \theta - \dot{\phantom{a}} \cos \theta|)}{|\cos \theta - \dot{\phantom{a}} \sin \theta|}}$$

bulunur.

$(C^*)$  sabit pol e risinin  $S^2$  ye göre geodezik e rili i  $\chi_{C^*}$  ile gösterilirse

$$\chi_{C^*} = \left\| \overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} \right\|$$

yazılır. (2.11) ve (3.22) ba ntılarından



$$(3.31) \quad \bar{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = \frac{\|W^*\|}{(\xi^*)'} N$$

bulunur. Bu ifade  $\chi_{C^*}$  da yerine yazılırsa

$$\chi_{C^*} = \frac{\|W^*\|}{(\xi^*)'}$$

olur. Burada  $W^*$  ve  $(\xi^*)'$  in yerine (3.2) ve (3.8) den kar ılıkları yazılırsa

$$(3.32) \quad \chi_{C^*} = \frac{\|W\| \left[ \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} + (1-2\cos^2 \theta) \right\} \sin^2 \theta \right]}{\left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} + (1-2\cos^2 \theta) \right\}^2 \sin^2 \theta}$$

elde edilir.

#### Sonuç3.4.

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çifti olsun.  $r$  ve  $r^*$  e risinin küresel göstergelerinin  $E^3$  e göre geodezik e rilikleri ile sabit pol e risinin  $S^2$  ye göre geodezik e rilikleri arasında

$$\chi_{T^*} = \sqrt{\left( \frac{k_T k_B}{k_B \cos \theta + k_T \sin \theta} \right)^2 - 1}$$

$$\chi_{N^*} = \chi_N = \frac{|\xi| - |\zeta|}{\|W\|^3}$$

$$\chi_{B^*} = \sqrt{\left( \frac{k_T k_B}{k_B \cos \theta - k_T \sin \theta} \right)^2 + 1 - \frac{2(|\sin \theta - \zeta \cos \theta|)}{|\cos \theta - \zeta \sin \theta|}}$$

$$\chi_{c^*} = \frac{\|W\| \left[ \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 + (1-2) \left( \frac{1}{\cos \theta} \right) \sin^2 \theta \right]}{\left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)'}$$

ba ntıları vardır.

$(\overline{T^*})$  tabii lift e risi geodezik sprayın bir integral e risi ise

$$\overline{D}_{T^*} T_{T^*} = 0$$

dır. Bu durumda (3.25) ba ntısından

$$\begin{cases} \frac{-1}{\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \sin \theta} + \cos \theta = 0 \\ \frac{1}{\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \sin \theta} - \sin \theta = 0 \end{cases}$$

olur. Bu ifade  $\cos \theta \neq 0, \frac{1}{\cos \theta} = 0$  ve  $\sin \theta = 0$  için sa lanır. Böylece u sonuç verilebilir:

**Sonuç 3.5.**

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çifti için  $r$  e risi düzlemsel ve Frenet çatıları birbirlerine denk ise  $r^*$  e risinin  $(T^*)$  te etler göstergesinin  $(\overline{T^*})$  tabii lifti  $T(S^2)$  tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral e risidir.

$(\overline{N^*})$  tabii lift e risi geodezik sprayın bir integral e risi ise

$$\overline{D}_{N^*} T_{N^*} = 0$$

dır. (3.27) ba ntısından

$$\begin{cases} \frac{\{\prime \sin \{}}{\|W\|} = 0 \\ \frac{\{\prime \cos \{}}{\|W\|} = 0, \end{cases}$$

olur. Buradan  $\{\prime = 0$  veya  $\{ = \text{sabit}$  bulunur. Böylece  $u$  sonuç verilebilir:

**Sonuç 3.6.**

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çifti birer helis ise bu durumda  $r^*$  e risinin  $(N^*)$  asli normaller göstergesinin  $(\overline{N^*})$  tabii lifti  $T(S^2)$  tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral e risidir, (Bak. ekil.1 ve ekil.2).

$(\overline{B^*})$  tabii lift e risi geodezik sprayın bir integral e risi ise

$$\overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = 0$$

dır. (3.29) ba ntısından

$$\begin{cases} \frac{-\dagger}{|\cos \prime - \dagger \sin \prime} + \sin \prime = 0 \\ \frac{\dagger}{|\cos \prime - \dagger \sin \prime} + \cos \prime = 0 \end{cases}$$

olur. Bu ifade hiçbir zaman sa lanmaz. Bu durumda  $u$  sonuç verilebilir:

**Sonuç 3.7.**

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çifti olsun.  $r^*$  e risinin  $(\overline{B^*})$  tabii lift e risi geodezik sprayın integral e risi olamaz.

$(\overline{C^*})$  e risi geodezik sprayın bir integral e risi ise

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = 0$$

dır. (3.31) ba ntısından  $|^* = 0$  ve  $\dagger^* = 0$  olur. Bu de erler (2.21) de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \} | - \sin^2_{\prime\prime} = 0 \\ \} (1 - \} | ) \\ \frac{\sin^2_{\prime\prime}}{\}^2 \dagger} = 0 \end{cases}$$

olur ki bu da  $| = 0$  olması demektir. Buradan u sonuç verilebilir:

**Sonuç 3.8. ,**

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çifti ise sabit pol e risinin tabii lifti yoktur.

**Teorem 3.2.**

$(r, r^*)$  Bertrand e ri çifti olsun.  $r^*$  e risinin  $(T^*)$  te etler göstergesi ve  $(B^*)$  binormaller göstergesi  $(C^*)$  sabit pol e risinin iki tane küresel involütüdür.

**spat:**

$$\begin{aligned} C^*(s) &= \sin \{^* T^* + \cos \{^* B^* & , & T^*(s) = \cos_{\prime\prime} T - \sin_{\prime\prime} B & \text{ve} \\ B^*(s) &= \sin_{\prime\prime} T + \cos_{\prime\prime} B \end{aligned}$$

ifadelerinin türevleri sırasıyla

$$\frac{dC^*}{ds_{C^*}} \frac{ds_{C^*}}{ds} = (\{\ast\})' (\cos \{\ast T^* - \sin \{\ast B^*\}),$$

$$\frac{dT^*}{ds_{T^*}} \frac{ds_{T^*}}{ds} = (|\cos \ast + \dagger \sin \ast) N,$$

$$\frac{dB^*}{ds_{B^*}} \frac{ds_{B^*}}{ds} = (|\sin \ast - \dagger \cos \ast) N$$

olur.  $N$  ile  $N^*$  lineer ba ımlı oldu undan

$$\left\langle \frac{dC^*}{ds_{C^*}} \frac{ds_{C^*}}{ds}, \frac{dT^*}{ds_{T^*}} \frac{ds_{T^*}}{ds} \right\rangle = \left\langle (\{\ast\})' (\cos \{\ast T^* - \sin \{\ast B^*\}), (|\cos \ast + \dagger \sin \ast) N \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \frac{dC^*}{ds_{C^*}} \frac{ds_{C^*}}{ds}, \frac{dB^*}{ds_{B^*}} \frac{ds_{B^*}}{ds} \right\rangle = \left\langle (\{\ast\})' (\cos \{\ast T^* - \sin \{\ast B^*\}), (|\sin \ast - \dagger \cos \ast) N \right\rangle = 0$$

olur bu da ispatı tamamlar.

### Örnek:

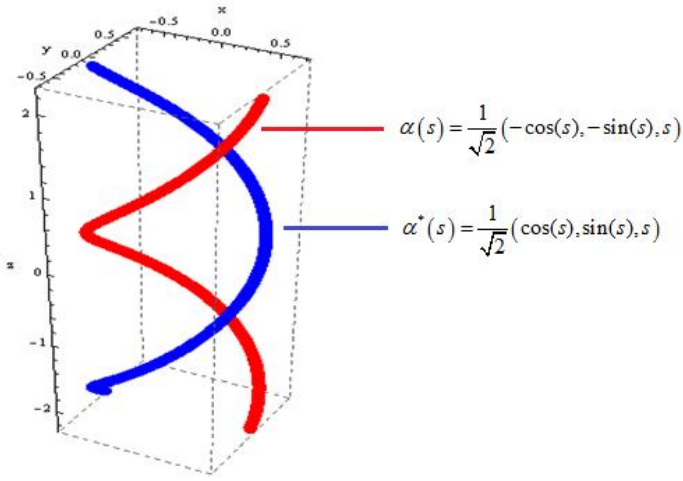
$\Gamma(s) = \frac{1}{2}(-\cos s, -\sin s, s)$  ve  $\Gamma^*(s) = \frac{1}{2}(\cos s, \sin s, s)$  helis e rileri Bertrand e ri çifti olarak alındı nda ( ekil.1),  $\Gamma^*$  e risinin  $\Gamma^*(s)$  noktasındaki tabii lift e rilerinin denklemleri sırasıyla,

$$\overline{T^*}(s) = \frac{1}{2}(-\sin s, \cos s, 1)$$

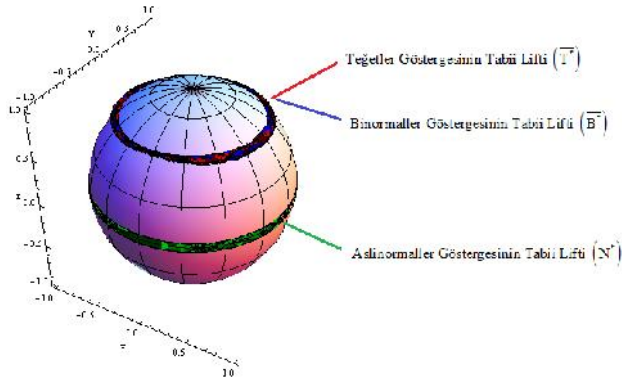
$$\overline{N}^*(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\overline{B}^*(s) = \frac{1}{2}(\sin s, -\cos s, 1)$$

olur. Burada  $(\overline{N}^*)$  tabii lifti e risi geodezik sprayın integral e risidir. ( ekil.2)



ekil.1 Bertrand e ri çiftleri birer helis e risi



ekil.2  $(\overline{N}^*)$  tabii lifti geodezik sprayın integral e risi

## **KAYNAKLAR**

- [1] Bilici,M. , Involute-evolute Curvatures of Curves and Natural Lifts Spherical Indicators, Master's Thesis, Ondokuz Mayıs Univ., Institute of Sci.,1999.
- [2] Bilici, M., Çalı kan, M. and Aydemir, ., The Natural Lift Curves and the Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Pair of Evolute-Involute Curves, International Journal of App. Math. vol.11, pp.415-420, 2002.
- [3] Bilici,M., On the Timelike or Spacelike Involute-Evolute Curve Couples, PhD Thesis, Ondokuz Mayıs Univ., Institute of Sci., 2009.
- [4] Çalı kan, M., Sivrida , A. ., Hacısaliho lu, H. H., Some Characterizations For The Natural Lift Curves and The Geodesic Sprays, Ankara Univ., Faculty of Sci., Communications, 33, 235-242,1984
- [5] Çalı kan,Ö.F., The Natural Lift Curves and Geodesic Curvatures of the Spherical Indicatrices of the Timelike Bertrand Curve Couple, Master's Degree, Ordu Univ., Institute of Sci., 2013.
- [6] Demet,S., Natural Lift Curves and Geodesic Curvatures of the Spherical Indicatrices of the Timelike- Spacelike Mannheim Curve Couple, Master's Degree, Ordu Univ., Institute of Sci., 2012.
- [7] Ekmekçi,N. and Ilarslan, K., On Bertrand Curves and Their Characterization, Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol.3, No.2, pp. 17-24, 2001.
- [8] Ergun, E. and Çalı kan, M., On Geodesic Sprays In Minkowski 3-Space, Int.J.Contemp. Math. Sci., 6(39), 1935-1939, 2011.
- [9] Hacısaliho lu,H.H., Differential Geometry, nönü Univ. Fac. of Arts and Sci., Publ., Math. no.7,1983.
- [10] Sabuncuo lu,A., Differential Geometry, Nobel publ.,2006.
- [11] Sivrida ,A. ., Çalı kan, M., On The M-Integral Curves and M-Geodesic Sprays, Erciyes Univ., journal of Sci., v.7, no 1-2, pp.1283-1287,1991.
- [12] Senyurt, S., Natural Lifts and The Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Mannheim Partner Curves in  $E^3$ , International Journal of the Physical Sciences, vol. (7), no.16, pp. 2414-2421, 2012.

- [13] Senyurt, S. and Çalı kan,Ö.F., The Natural lift Curves and Geodesic Curvatures of the Sphercal Indicatrices of the Timelike Bertrand Curve Couple, International Electronic Journal of Geometry, vol.6,no.2, pp.88-99,2013
- [14] Senyurt, S. and Çalı kan,Ö.F., The Natural lift Curves and Geodesic Curvatures of the Sphercal Indicatrices of the Spacelike-Timelike Bertrand Curve Couple, 2<sup>nd</sup> International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2013),Sarajevo/ Bosnia and Herzegovina, 26-29/08/2013.
- [15] Thorpe, J.A., Elementary Topics In Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, Heidelberg-Berlin ,1979.