TARTIŞMA (DISCUSSION)

Matematiğin Deneysel Gelişimi ve Öğretimindeki Uzantısı: Analiz Dersi Örneği

Tolga Kabaca*

Modern matematik tarihinin ilk zamanlarında "Sonsuz Küçükler Hesabı" olarak bilinen matematik disiplini kabaca limit, türev ve integral kavramlarından oluşmaktadır. Günümüzde lise düzeyinde son sınıf matematik dersi olarak, üniversitelerde ise Calculus, Analiz, Genel Matematik ya da Temel Matematik isimleri ile okutulmaktadır. Calculus kelimesi ile kalsiyum (calcium) kelimesi Latince aynı kökten gelmektedir. Eski Romalılar özel olarak hazırlanmış bir tahtanın üzerinde hesaplama yapmak için çakıl taşları ya da kireç taşları kullanırlardı. Orta çağda her türlü hesaplama ve problem çözme metoduna, kireçtaşlarından adını alan "Calculus" denirdi (Sertöz, 2000). Sonraları, ileri matematiğin özel bir uğraşı alanı olan sonsuz küçükler hesabı "*Calculus of infinitesimals*" olarak anılmaya başlandı. Günümüzde ise bu isimlendirme kısaca "Calculus" olarak yerleşmiştir. Calculus, matematiğin fonksiyonların analizi ile ilgilenen alanıdır. İncelenen fonksiyonun bağımsız değişken sayısına göre tek değişkenli ya da çok değişkenli analiz olarak karşımıza çıkmaktadır. Calculusun, fonksiyonların analizi ile ilgilenmesi dilimizde kısaca "Analiz" adıyla anılmasına sebep olmuştur. "*Sonsuz küçükler hesabı*" tamlaması Analiz dersinin içeriğini de açıklamaktadır. Yazının devamında, bahsi geçen matematik disiplini ve ilgili ders "Analiz" ismi ile anılacaktır.

Analiz dersleri bir fonksiyonun bağımsız değişkeninin sonsuz küçük olması durumunda görüntüsünün davranışını incelemeye odaklanmıştır. Bu bağlamda öğrenciler öncelikle limit kavramı ile tanıştırılmakta ve limit alma işleminde daha yetkin hale getirilmeleri için çeşitli alıştırmalar üzerinde çalışılmaktadır. Daha sonra kavramsal alt yapısı limit kavramına dayandırılan türev kavramı öğretilmekte bu süreçte de bir fonksiyonun türevi olan fonksiyonu bulma işlemine ağırlık verilmektedir. Son olarak integral kavramı sahne almaktadır ki aslında bu kavramın da alt yapısı limite dayanmaktadır. İntegral kavramı ile öğrencilerin tanıştırılması ise öncelikle bir fonksiyonun ters türevini bulma işlemi ile olmaktadır. Belirsiz integral olarak isimlendirilen ters türev bulma işleminden sonra integral kavramının aslında limit işlemi altında uygulanan bir toplama anlamına geldiği ile öğrencilerimiz tanışmaktadır. Bu noktaya gelinceye kadar da belirsiz integral başlığı altında uzun bir süre bir fonksiyonun ters türevini bulma işlemi ile ilgilenildiğini de unutmamak gerekir.

Yukarıda kısaca özetlenen Analiz dersi içeriği öğrencilerin kavramı kendilerinin yapılandırmalarına yardımcı olma felsefesi ışığında işlenen derslerde de fazla değişmemektedir. Yine aynı sırada işlenen derslerde limit kavramının yapılandırılması için bağımsız değişkene yaklaşma durumu tablo ve grafik temsilleri ile zenginleştirilmekte, türev kavramı için değişim oranı kavramına ulaşılacak bir gerçek hayat probleminden giriş yapılmakta, integral kavramı için ise öncelikle integralin bir ters türev olma durumu belirsiz integral adı altında ele alındıktan sonra asıl kavramsal görünümü olan Riemann toplamı kavramına geçilmekte ve analizin temel teoremi yardımı ile aslında daha önce suni olarak verilen türev ile integral arasındaki ilişki ortaya konmaktadır. Etkinliklerle de desteklenerek oldukça zenginleştirilen bir analiz dersinde dahi limit, türev ve integral kavramları arasındaki ilişkileri büyük bir resim olarak zihnimizde oluşturmamıza yardımcı olacak bir durumun ihmal edildiği söylenebilir. Bu da kavramların tarihsel süreç içinde birbirleri ile etkileşimli olarak nasıl yapılandırıldıklarıdır.

* Yrd. Doç. Dr. Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Denizli.
e-posta: tkabaca@pau.edu.tr

Teknoloji ve dinamik yazılımların da matematik öğretimine daha fazla entegre olması ile matematiğin deneysel gelişimi tekrar gün yüzüne çıkmaya başlamıştır. Yazılımlar sayesinde üretilen çeşitli matematik deneyleri formel matematik için pek de kabul görmezler. Örneğin bir serinin yakınsak olması durumunu tablo veya grafik temsilleri ile incelediğimizde ve buradan yola çıkarak bir yargıya vardığımızda formel matematik açısından pek de kabul görecek bir sebep ortaya konulmamıştır. Ancak, matematiksel kavramların en mükemmel görünümlerinin zembille inmediği ve daha ilkel versiyonlarının olduğu unutulmamalıdır.

Hintli matematikçi Raju (2001) bilgisayar teknolojisi ile kazanılan hesaplama ve deneme-yanılma tabanlı matematiğin ispat eksenli matematiği kullanışsız bulması, deneme-yanılmaya dayanan matematiğin ise epistemolojik açıdan güvensiz görülmesi arasındaki ikilemin bir benzerinin hesaplamalı ve pratik Hint matematiği ile formel ve zihinsel Batı matematiği arasında da olduğunu belirtmektedir. Raju, Plato'nun da savunduğu gibi matematiğin deneysel tabanlı, hataya düşülebilen ve düzeltilebilen doğal bir karakteri olduğunu kabul etmenin bu ikilemi çözeceğini vurgulamaktadır.

Analiz kavramları özelinde matematiğin deneysel yapısına itibar etmeyen Batı dünyasının formel matematiğinin durumunu tartıştığı yazısında Raju, sonsuz küçükler kavramlarının ilkel görünümleri üzerindeki ilk fikirlerin deneme yanılmalara bağlı bir şekilde Hintli matematikçiler tarafından çok eski zamanlarda ortaya atıldığını, misyonerlik faaliyetleri ya da ticaret gibi farklı sebeplerle Batı dünyası ile etkileşime geçildiğinde Batı dillerine tercüme edilen Hint eserleri ile bu çalışmaların transfer edildiğini aktararak, Batılı matematikçilerin deneysel süreci yaşamadan formel matematiği yapılandırdıklarını tartışmaktadır.

Analiz kavramlarının öğretiminde çoğunlukla uygulanan ve önceki paragraflarda tasvir edilen sıralama göz önüne alındığında Raju'ya hak vermemek elde değil! En mükemmele ulaşmış formel bir matematiğin anlatılmaya çalışılmadığını kim söyleyebilir? Yapılandırmacı bir yaklaşımın bile geleneksel sıralamanın etkisi altında uygulanmaya çalışıldığı söylenebilir. Bir fonksiyonun tablo temsilini kullanarak yaklaşım mantığı verilmeye çalışıldığında dahi hala "*niçin limit alırız?*" sorusuna cevap verilememektedir. İntegral kavramına belirsiz integralden giriş yapıldığında "*değişim oranı anlamına gelen türev niçin sürekli toplama ya da daha kaba tabirle alan anlamına gelen integralin tersidir?*" sorusuna verilecek cevabın yanından bile geçilmemektedir.

> *Bilimsel akla göre, her bilgi bir soruya cevaptır. Eğer herhangi bir soru olmasaydı, bilimsel bilgiye sahip olmak mümkün olmayacaktı. Hiçbir şey kendiliğinden var olmaz. Hiçbir şey verilmez. Her şey yapılandırılır.* - Gaston Bachelard

Barbin, Gaston Bachelard'dan yaptığı yukarıdaki alıntı ile bilimin bir soruya cevap niteliğinde geliştiğini vurgulamaktadır (1996). Analiz kavramlarının hangi problemlere cevap niteliğinde olduğu elbette açıktır. Ancak bu durum kavramların sıralamasını yansıtmamaktadır. Kavramların tarihsel gelişimine göz atıldığında (şekil-1) analiz kavramlarının iki ana problem etrafında geliştiği görülmektedir. Bu problemler "*düzgün kenarlara sahip olmayan şekil ve cisimlerin alan ve hacimlerini hesaplama*" ve "*eğriye teğet çizilerek eğrinin değişiminin incelenmesi*" olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu problemlerden birincisi milattan önce 1800'lü yıllara kadar uzanırken, ikincisinin geçmişi daha yenidir. Daha da önemlisi exhaustion olarak isimlendirilen şekli ya da cismi, alanı ya da hacmi hesaplanabilen düzgün parçalara bölerek bu parçalanma miktarlarının sonsuz küçük yapılarak toplam alana ya da hacme ulaşılması fikrinin sonraki yıllarda anlık değişim oranını bulmak için kullanılmasıdır.

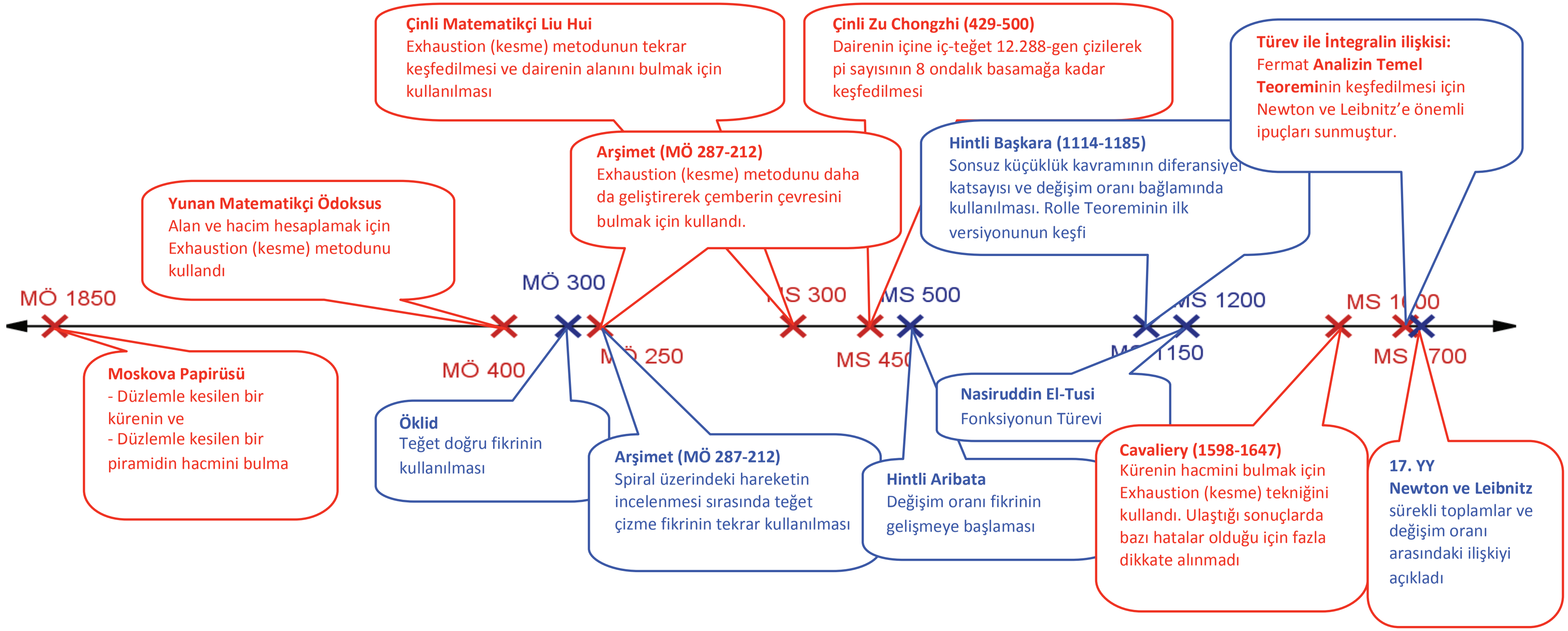
Özetle, analiz derslerinin ana temasını oluşturan sonsuz küçükler kavramlarının gelişiminde ateşleyici güç olan problemler aslında bu dersin son konusu olarak görülen integral kavramı ile çözülebilen problemlerdir. İnsanoğlu alan ve hacim problemlerine çözüm bulmak amacı ile sonsuz küçük parçalara bölme (modern tabiri ile bağımsız değişkeni sıfıra yaklaştırarak limit alma) işlemi uygulamaya başlamıştır. Türev kavramı aynı fikrin başka bir amaç için kullanılması ile gelişmiştir. Türev ile integral arasındaki ilişkinin keşfedilerek fonksiyonların ters türevlerini bulma macerası ise bu yolculuğun son demleridir denebilir. Buna rağmen, analiz derslerinden öğrencilerimizin aklında kalan en baskın kavram görünümlerinden birinin integral ve türevin birbirlerinin ters işlemleri olması düşündürücüdür.

Konu sıralamasındaki bu sorun sadece integral kavramı bağlamında bile alındığında belirsiz integral kavramı ile yapılan girişin öğrencilerin daha çok işlemsel kavram imajları üretmelerine sebep olacağı, integralin kavramsal alt yapısına yönelik kavram imajlarının baskı altına alınacağı deneysel bir çalışma ile de tespit edilmiştir (Sevimli ve Delice, 2010).

Bir kavramın tarihsel gelişiminin bir problemden başlaması, birbirini takip eden çağlarda çeşitli bilim adamlarının katkıları ile olgunlaşması ve en sonunda bilimsel dil ile ifade edilebilen en olgun haline ulaşması süreçlerinden geçtiği düşünülebilir. Analiz kavramları için bu sürecin nasıl ilerlediği şekil-1'de özetlenmiştir.

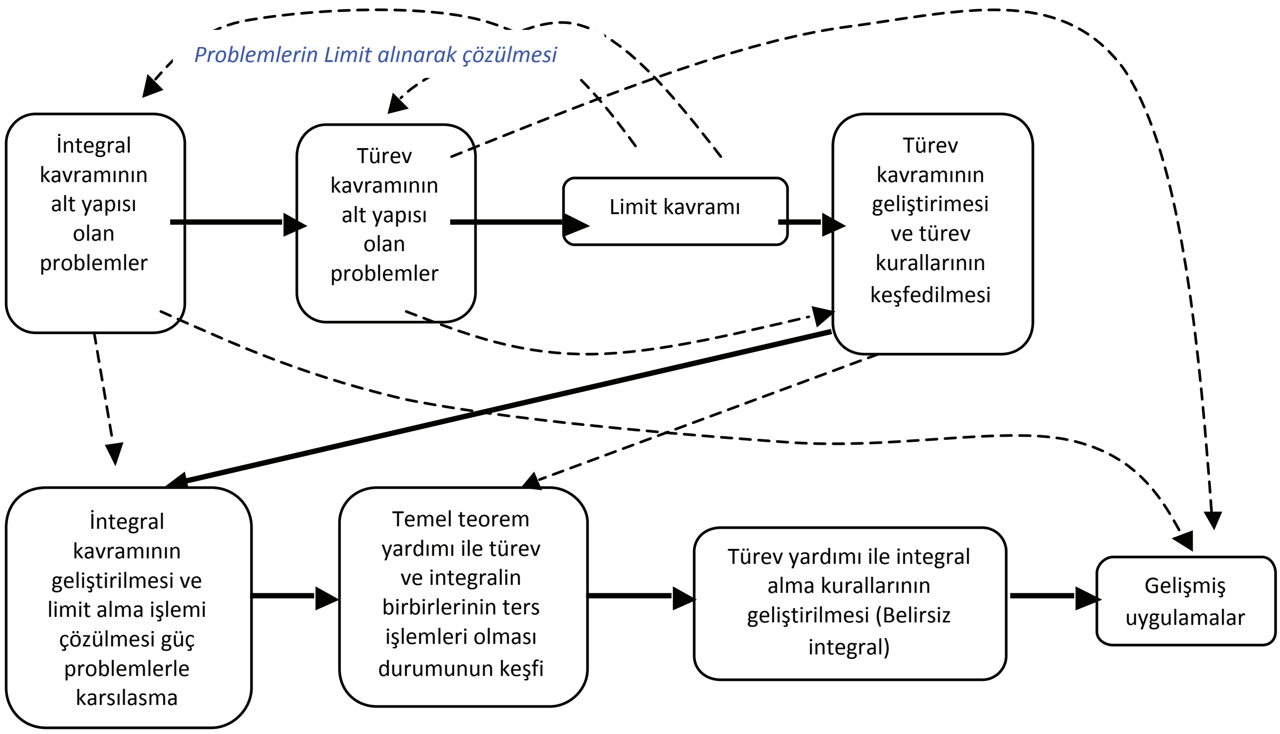
Bir kavramın tarihsel gelişim sürecinin bilginin gerçek anlamda yapılandırılması anlamına geldiği, bir öğrenme teorisi olarak ele alınan yapılandırmacı yaklaşımın ise bilginin yapılanmasındaki gerçek sürecin bazı senaryolar eşliğinde mikro planda tekrarlanmasından başka bir şey olmadığı düşünülebilir

Analiz kavramlarının şekil-1'de de özetlenen tarihsel gelişimi ile modern matematiğin ihtiyaçları göz önüne alındığında, dersin düzgün kenarlar ile çevrelenmeyen bölgelerin alan ve çevrelerini bulma problemleri ile başlaması uygun olacaktır. Bazı tarihi problemler sınıf ortamına getirilebilir. Çeşitli dinamik yazılımların da yardımı ile bilinen bazı fonksiyonlarla sınırlanan bölgeler yapılandırarak Arşimet'in ortaya attığı ve zamanla olgunlaşan exhaustion (parçaya ayırma) yöntemi hızlı bir şekilde modellenebilir. Bu yolla bir fonksiyonun limitini alma ihtiyacı gün ışığına çıkarılmış olacaktır. Çevre ya da alan bulmada kullanılan yöntemin ortalama hızdan yola çıkarak anlık hızı bulma problemlerinde de kullanılabileceği fikri ile bağımsız değişkenin sabit değere yaklaşması durumundaki bağımlı değişkenin davranışını inceleme yani limit kavramına dair zihinsel ön hazırlık güçlendirilebilir. Bu çalışmanın ardından bir fonksiyonun limitini bulmaya yönelik çalışmalar yapılabilir. Fonksiyonun limitini almayı öğrenen ve teknoloji yardımı ile önceki problemlere sonsuz küçük yaklaşım kavramı ile çözüm bulunabileceğini fark eden öğrenciler limit alma yöntemlerini kullanarak aslında integral ve türev anlamına gelen limitleri alabilirler. Basit fonksiyonlar ile bu limitleri almak mümkün olsa da fonksiyonlar daha karmaşık yapıya geldikçe özellikle integral anlamına gelen limitleri almak güçleşecektir. Bu aşamada türeve öncelik verilerek türev alma kuralları keşfettirilebilir. İntegral kavramına tekrar geri dönüldüğünde doğal olarak integralin bir ters türev işlemi olduğu henüz bilinmiyor olacaktır. Analizin temel teoremi sıradan bir teorem ile öğrencileri tanıştırmanın ötesinde ele alınarak aslında özel bir toplama anlamına gelen integral kavramı ile anlık değişim oranı anlamına gelen türev kavramının birbirlerinin ters işlemleri olduğu ile öğrenciler tanıştırılabilir. Bu aşamadan sonra her türlü fonksiyonun integralinin türev kavramının da yardımı ile nasıl bulunacağı (belirsiz integral) gündeme gelebilir. Son olarak her türlü gelişmiş uygulamaya yer verilebilir. Önerilen sıralama şematik olarak şekil-2'de özetlenmiştir.



Şekil-1: Analiz kavramlarının kabaca kronolojik gelişimi*

* Derleme yapılmıştır (Internet ansiklopedisi Wikipedia ve Dönmez, 2002)



Şekil-2: Analiz dersi için önerilen sıralama

Kavramların tarihsel süreç içindeki gelişimi incelendiğinde yapılandırmacı bir matematik öğretiminin önerdiği gibi bir problem durumundan başlayan ve gelişen süreç göze çarpmaktadır. Bu doğal sürecin aksi olarak, bazı kavramların mükemmele ulaşmış hallerinin öğrenci ile tanıştırılması beklenen kavram imajlarının oluşmasına engel teşkil edebilir. Nitekim analiz kavramlarına ait işlemsel özelliklerin öğrenciler tarafından daha çok hatırlanması bunu göstermektedir.

Analiz derslerinin, integral kavramının altyapısı olan problemler üzerinde tartışarak başlaması ve bunun akabinde yapılan her hamlenin bu problemi çözmeye yönelik yeni adımlar olması ve en sonunda da yine bu probleme geri dönülerek benzer problemleri pratik olarak çözebilecek kavrama ulaşılması yerinde olacaktır. Bu yolla analiz kavramlarının bütüncül, sarmal bir yapı içinde arzu edilen kavram imajına dönüşmesi mümkün olabilir.

KAYNAKÇA

Barbin, E. (1996). The Role of Problems in the History and Teaching of Mathematics, *Vita Mathematica Historical Research and Integration with Teaching*, Ed: R. Calinger, MAA notes No:40, ISBN:0-88385-097-4

Dönmez, A. (2002). Matematiğin Öyküsü ve Serüveni "Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi", Toplumsal Dönüşüm Yayınları, İstanbul, ISBN: 975-8269-92-5

Raju, C.K. (2001). Computers, Mathematics Education and the Alternative Epistemology of The Calculus in the Yuktibhasa, *Philosophy East and West*, 51(3), 325-362.

Sertöz, S. (2000). *Matematiğin Aydınlık Dünyası*, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları Serisi.

Sevimli, E. ve Delice, A. (2010). İntegral Kavram Tanımı ve Kavram İmgesine Yüksek Öğretim Programının Etkisinin İncelenmesi, *IX. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Özet Kitapçığı*, s.79.