BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 319-328, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.670846

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

Araştırma Makalesi - Research Article

Genelleştirilmiş Sylvester Transpoz Matris Denkleminin Simetrik – Ters Simetrik Ayrışım Metodu ile Çözümü

Murat SARDUVAN[1*], Esra KAPLAN[2]

Geliş / Received: 06/01/2020 ***Revize / Revised: 20/04/2020*** ***Kabul / Accepted: 24/05/2020***

ÖZ

Bu çalışmada $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ lineer denklem sisteminin çözümü için Simetrik –Ters Simetrik Ayrışım (SSS) metodu tanıtıldı. Daha sonra

$\mathrm{AXB} + \mathrm{CXD} + \mathrm{EX}^{\mathrm{T}}\mathrm{F} = \mathrm{M}$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin çözümü bu metot kullanılarak ortaya konuldu. Son olarak SSS metodunun performansını resmeden sayısal bir örnek verildi.

Anahtar Kelimeler- SSS metodu, Genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi, Kronecker çarpım, Matris normu, Spektral yarıçap.

[1]*Sorumlu yazar iletişim: msarduvan@sakarya.edu.tr (https://orcid.org/0000-0001-7049-8922)
Matematik Bölümü, Sakarya Üniversitesi, Esentepe Kampüsü, Serdivan, Sakarya
[2]İletişim: esra.kaplan2@ogr.sakarya.edu.tr (https://orcid.org/0000-0002-1872-1987)
Matematik EABD Lisansüstü Öğrencisi, Sakarya Üniversitesi, Esentepe Kampüsü, Serdivan, Sakarya

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 319-328, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.670846

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

On Solution of Generalized Sylvester Transpose Matrix Equation Using Symmetric – Skew Symmetric Splitting Method

ABSTRACT

In this study, Symmetric-Skew Symmetric Splitting (SSS) method is introduced to solve the system of linear equations $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Then, the solution of
$\mathrm{AXB} + \mathrm{CXD} + \mathrm{EX^TF} = \mathrm{M}$
generalized Sylvester transpose matrix equation is established by using this method. Lastly, an example is given to illustrate the performance of the SSS method.

Keywords*- SSS method, Generalized Sylvester transpose matrix equation, Kronecker product, Matrix norm, Spectral radius.*

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.670846
e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

I. GİRİŞ

m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbb{R}^{n}$ ve $\mathbb{C}^{n}$, sırası ile, $m\times n$ boyutlu reel matrisler, $m\times n$ boyutlu kompleks matrisler, $n\times 1$ boyutlu reel vektörler ve $n\times 1$ boyutlu kompleks vektörler kümelerini göstermektedir. A^T ve A^* notasyonları ile herhangi bir $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ matrisinin, sırasıyla, transpozu ve eşlenik transpozu gösterilmektedir. $A\otimes B$ ile herhangi iki $A,B\in\mathbb{C}^{m\times n}$ matrislerinin Kronecker çarpımı gösterilmektedir.

Bir $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için; eğer $A=A^*$ oluyorsa matrise hermityen, eğer $A=-A^*$ oluyorsa matrise ters hermityen matris denir. Bir $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için eğer $A=A^T$ sağlanıyorsa A matrisine simetrik matris denir. Bir simetrik $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi, eğer her $x\in\mathbb{R}^n$ sıfırdan farklı vektörü için $x^TAx>0$ koşulunu sağlıyorsa A matrisine pozitif tanımlıdır denir. Bir $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için eğer M tersinir ise $A=M-N$ ifadesine, A matrisinin bir ayrışımı denir. $A=M-N$ ayrışımı kullanılarak $Mx^{(k+1)}=Nx^{(k)}+b,\ k=0,1,2,\dots$, şeklinde iteratif metotlar kullanılabilir. Böylece, $C=I-M^{-1}A=M^{-1}N$ matrisi bu yapıdaki $x^{(k)}$ için katsayılar matrisi olup iterasyon matrisi adını alır. Bir $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi çok büyük boyutlu ve elemanlarının çoğu '0' ise A matrisine büyük seyrek matris denir. $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ özdeğerlerine sahip herhangi bir $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için $\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ değerine A matrisinin spektral yarıçapı denir.

$|||.|||:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, eğer $\forall A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ için aşağıdaki beş aksiyomu sağlıyorsa matris normu olarak adlandırılır.

(1) $|||A|||\ge 0$,
(1a) Eğer $|||A|||=0$ ise $A=0$'dır,

(2) $c\epsilon\,\mathbb{C}$ için, $|||cA|||=|c|\,|||A|||$,
(3) $|||A+B|||\le|||A|||+|||B|||$,
(4) $|||AB|||\le|||A|||.\,|||B|||$.

Eğer $\forall A,B\epsilon\mathbb{C}^{n\times n}$ için (4) özelliği hariç diğer özellikler sağlanıyorsa bu durumda $|||.|||$ fonksiyonu genelleştirilmiş matris normu ya da vektör normu adını alır. Özel olarak bir $A\epsilon\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için $\|A\|_2=\left(\sum_{\mathrm{i,j}=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlı norma Frobenius norm denir. Bir $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için $K(A)=\|A\|_2.\|A^{-1}\|_2$ ifadesi spektral koşul sayısı olarak tanımlanır.

Literatürdeki birçok çalışmada

$$Ax=b \tag{1}$$

lineer denklem sisteminin ve bu sisteme dönüştürülebilen Lyapunov denklemleri ya da Sylvester matris denklemlerinin çözümlerini elde etmek için HSS, IHSS, MHSS, GMHSS vb. iteratif metotlar kullanılmıştır [örneğin, bakınız, 1,2,3]. M. Hajarian, genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklem ikilisinin çözümünde BCR algoritması kullanmıştır[4]. Bu makalede [1] makalesinde verilen HSS metodundan esinlenerek Simetrik – Ters Simetrik Ayrışım (SSS) metodunu ortaya koyacağız ve bu metot ile genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi olan

$$AXB+CXD+EX^TF=M \tag{2}$$

matris denkleminin $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ çözümünü vereceğiz. Burada $A,B,C,D,E,F,M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen matrislerdir.

II. ÖNBİLGİLER

Bu kısımda [1] çalışmasında ortaya konulan HSS iterasyonu tanıtılacaktır. Ayrıca, genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin kronecker çarpım yardımıyla (1) matris denklemi şeklinde nasıl yazılabileceği verilecektir.

HSS iterasyon metodu.

Verilen bir $x^{(0)}$ başlangıç vektörü için $\{x^{(k)}\}$, $k = 0,1,2,\cdots$, dizisi

$$\begin{cases} (\alpha I + H)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - S)x^{(k)} + b \\ (\alpha I + S)x^{(k+1)} = (\alpha I - H)x^{(k+\frac{1}{2})} + b \end{cases}$$

hesaplamaları ile oluşsun. Bu işlemler $x^{(k)}$ aranan çözüme yeterince yaklaşıncaya kadar yapılsın. α burada pozitif bir sabittir [1]. *Burada H ve S matrisleri Teorem 1'deki gibidir.*

Bu metodun yakınsaklığını gösteren ve [1]'de verilen teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 1. $A \in C^{n\times n}$ bir pozitif tanımlı matris olsun. Ayrıca $H = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ve $S = \frac{1}{2}(A - A^*)$ onun hermityen ve ters hermityen kısımları ve α pozitif bir sabit olsun. Bu durumda HSS iterasyonunun $M(\alpha)$ iterasyon matrisi

$$M(\alpha) = (\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - H)(\alpha I + H)^{-1}(\alpha I - S)$$

ile verilir. $M(\alpha)$'nın spektral yarıçapı $\rho(M(\alpha))$,

$$\sigma(\alpha) \equiv \max_{\lambda_i \in \lambda(H)} \left|\frac{\alpha - \lambda_i}{\alpha + \lambda_i}\right|$$

ile sınırlıdır. Burada, $\lambda(H)$, H matrisinin spektral kümesidir. Böylece $\forall\alpha > 0$ için

$$\rho(M(\alpha)) \leq \sigma(\alpha) < 1$$

sağlanır. Yani HSS iterasyonu $Ax = b$ matris denkleminin $x^* \in \mathbb{C}^n$ yegane çözümüne yakınsar [1].

Şimdi de genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemini $Ax = b$ matris denklemi ile ilişkilendireceğiz. (2) genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi ele alınsın. Bu matris denklemi kronecker çarpım kullanılarak

$$(B^T \otimes A + D^T \otimes \mathrm{C} + (F^T \otimes \mathrm{E})P)\ vec(x) = \big(vec(M)\big)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece,

$$\mathcal{A} \coloneqq B^T \otimes A + D^T \otimes \mathrm{C} + (F^T \otimes \mathrm{E})P \text{ ve } \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2},$$

$$x \coloneqq vec(X) \text{ ve } x \in \mathbb{R}^{n^2},$$

$$b \coloneqq \big(vec(M)\big) \text{ ve } b \in \mathbb{R}^{n^2}$$

olmak üzere genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi $\mathcal{A}x = b$ biçiminde yazılabilir. Buradaki P matrisinin tanımı için aşağıdaki lemma gereklidir [7].

Lemma 1. $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ herhangi bir matris olsun. Bu durumda

$$vec(X^T) = Pvec(X)$$

olup burada P matrisi, n tamsayısı ile belirli, tek türlü tanımlı matristir. Ayrıca P aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. Herhangi n tamsayısı için $P \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ matrisi

$$\begin{bmatrix} E_{11}^T & E_{12}^T & \cdots & E_{1n}^T \\ E_{21}^T & E_{22}^T & \cdots & E_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1}^T & E_{n2}^T & \cdots & E_{nn}^T \end{bmatrix}$$

biçimine sahiptir. Burada $E_{ij}, i, j = 1,2, \ldots, n$ için (i, j) elemanı 1 ve diğer elemanları 0 olan $n \times n$ boyutlu reel matristir.

ii. Herhangi n tamsayısı için P bir ortogonal matristir. Yani,

$$PP^T = P^T P = I.$$

III. ANA SONUÇLAR

Bu kısımda A matrisinin simetrik – ters simetrik ayrışımı kullanılarak oluşturulan SSS metodu ortaya konulacaktır. Bu metodun yakınsaklığı gösterilip (2) denkleminin çözümü bu metot kullanılarak verilecektir.

Lemma 2. $A = M_i - N_i$, $i = 1,2$, ifadeleri $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin iki ayrışımı olsun ve $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ bir verilmiş başlangıç vektörü olsun. Eğer $\{x^{(k)}\}$ iki kademeli iterasyon dizisi

$$\begin{cases} M_1 x^{(k+\frac{1}{2})} = N_1 x^{(k)} + b, \\ M_2 x^{(k+1)} = N_2 x^{(k+\frac{1}{2})} + b, \end{cases}$$

$k = 0,1,2, \cdots$, ile tanımlanırsa bu durumda,

$$x^{(k+1)} = M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1 x^{(k)} + M_2^{-1}(I + N_2 M_1^{-1})b \tag{3}$$

elde edilir. Ayrıca $M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1$ iterasyon matrisinin $\rho(M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1)$ değeri, 1'den küçükse bu durumda tüm $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ başlangıç vektörleri için $\{x^{(k)}\}$ dizisi $Ax = b$ sisteminin $x^* \in \mathbb{R}^n$ yegane çözümüne yakınsar.

İspat.

$$M_1 x^{(k+\frac{1}{2})} = N_1 x^{(k)} + b \tag{4}$$

$$M_2 x^{(k+1)} = N_2 x^{(k+\frac{1}{2})} + b \tag{5}$$

olsun. Bu durumda M_1 tersinir olduğundan (4) ifadesinden

$$x^{(k+\frac{1}{2})} = M_1^{-1} N_1 x^{(k)} + M_1^{-1} b \tag{6}$$

olur. (6) ifadesi (5) ifadesinde yerine yazılır ve M_2 matrisinin tersinir olduğu kullanılırsa

$$x^{(k+1)} = M_2^{-1} N_2 M_1^{-1} N_1 x^{(k)} + M_2^{-1}(\mathrm{I} + N_2 M_1^{-1})b$$

elde edilir.■

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 319-328, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.670846

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

$A = S + R$ olacak şekilde yazılsın. Burada S simetrik, R ters simetrik matrisleri $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ve $R = \frac{1}{2}(A - A^T)$ şeklinde belirtilsin. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A = (\alpha I + S) + (R - \alpha I)$ veya $A = (\alpha I + R) + (S - \alpha I)$ yazılabilir. Bu ifadeler $Ax = b$ matris denkleminde yerine yazılırsa

$$(\alpha I + S)x = (\alpha I - R)x + b \tag{7}$$

$$(\alpha I + R)x = (\alpha I - S)x + b \tag{8}$$

elde edilir. Yani (1) denklemi (7) veya (8) şeklinde de yazılabilir. Bu çalışma boyunca S ve R matrisleri yukarıdaki gibi olacaktır. Bu durumda SSS iterasyonu şu şekilde yazılır.

SSS iterasyon metodu.

Verilen bir $x^{(0)}$ başlangıç vektörü için $\{x^{(k)}\}$, $k = 0,1,2,\cdots$, dizisi

$$\begin{cases} (\alpha I + S)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - R)x^{(k)} + b \\ (\alpha I + R)x^{(k+1)} = (\alpha I - S)x^{(k+\frac{1}{2})} + b \end{cases}$$

hesaplamaları ile oluşsun. Bu işlemler $x^{(k)}$ aranan çözüme yeterince yaklaşıncaya kadar yapılsın. α burada pozitif bir sabittir.

Teorem 2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitif tanımlı bir matris ve α pozitif bir sabit olsun. Ayrıca $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ve $R = \frac{1}{2}(A - A^T)$ onun simetrik ve ters simetrik kısımları olsun. Bu durumda SSS iterasyonunun $M(\alpha)$ iterasyon matrisi;

$$M(\alpha) = (\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)$$

ile verilir. $M(\alpha)$'nın spektral yarıçapı $\rho(M(\alpha))$,

$$\sigma(\alpha) \equiv \max_{\lambda_i \in \lambda(S)} \left|\frac{\alpha - \lambda_i}{\alpha + \lambda_i}\right|$$

ile sınırlıdır. Burada $\lambda(S)$, S matrisinin spektral kümesidir. Böylece, $\forall \alpha > 0$ için

$$\rho(M(\alpha)) \leq \sigma(\alpha) < 1$$

olur. Yani SSS iterasyonu $Ax = b$ denklem sisteminin $x^* \in \mathbb{R}^n$ yegane çözümüne yakınsar.

İspat. Lemma 2' de verilen (3) ifadesinde

$$M_1 = (\alpha I + S),\ M_2 = (\alpha I + R),\ N_1 = (\alpha I - R),\ N_2 = (\alpha I - S)$$

alınırsa SSS metodunun iterasyon matrisi

$$M(\alpha) = (\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)$$

şeklinde bulunur. Burada $(\alpha I + S)$ ve $(\alpha I + R)$ yani M_1 ve M_2 tersinir kabul edilmiştir. Herhangi A ve B matrisleri için $\rho(AB) = \rho(BA)$ eşitliğinin varlığı bilindiğinden [6]

$$\rho\big(M(\alpha)\big) = \rho((\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1})$$

yazılır. Ayrıca,

$$\rho\big(M(\alpha)\big) \leq \|M(\alpha)\|_2$$

eşitsizliği bilindiğinden,

$$\rho\big(M(\alpha)\big) \leq \|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\|_2$$
$$\leq \|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}\|_2 . \|(\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\|_2$$

yazılabilir. Burada

$$Q(\alpha) = (\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}$$

alınırsa

$$Q(\alpha). Q^T(\alpha) = (\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\big((\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\big)^T$$
$$= (\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - R)^{-1}(\alpha I + R)$$
$$= (\alpha I - R)\big((\alpha I - R)(\alpha I + R)\big)^{-1}(\alpha I + R)$$
$$= (\alpha I - R)(\alpha^2 I - R^2)^{-1}(\alpha I + R)$$
$$= (\alpha I - R)(\alpha I - R)^{-1}(\alpha I + R)^{-1}(\alpha I + R) = I$$

olur. Yani $Q(\alpha)$'nın ortogonal matris olduğu görülür. Böylece $\|Q(\alpha)\|_2 = 1$ dir. Buradan,

$$\rho\big(M(\alpha)\big) \leq \|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}\|_2 = \sigma(\alpha)$$

olur. α bir pozitif sabit ve $\lambda_i > 0\, , i = 1,2, \cdots, n$, olduğundan

$$\sigma(\alpha) = \max_{\lambda_i \in \lambda(S)} \left|\frac{\alpha - \lambda_i}{\alpha + \lambda_i}\right|$$

$$\rho\big(M(\alpha)\big) \leq \sigma(\alpha) < 1$$

yazılabilir.

Bu teorem SSS iterasyonunun yakınsama hızının yalnızca S kısmının spektrumuna bağlı olduğunu gösterir. R kısmının spektrumuna, A ya, ya da S, R, A matrislerinin özvektörlerine bağlı değildir.

$x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için bir vektör norm

$$|||x||| = \|(\alpha I + R)x\|_2$$

şeklinde ve $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ için bir matris norm $|||X||| = \|(\alpha I + R)X(\alpha I + R)^{-1}\|_2$ şeklinde verilirse teoremin ispatından,

$$|||M(\alpha)||| = \|(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)(\alpha I + R)^{-1}\|_2 \leq \sigma(\alpha)$$

olduğu görülür. Buradan da

$$\left|\left|\left|x^{(k+1)} - x^*\right|\right|\right| \leq \sigma(\alpha)\left|\left|\left|x^{(k)} - x^*\right|\right|\right|, k = 0,1,2, \cdots,$$

elde edilir. Böylece $\sigma(\alpha)$, $|||.|||$ normu anlamında SSS iterasyonunun küçülme katsayısının bir üst sınırıdır. S'nin maksimum ve minimum özdeğerleri biliniyorsa $\sigma(\alpha)$ için en iyi α parametresi $\rho\big(M(\alpha)\big)$ veya $|||M(\alpha)|||$ olur. Bu durum aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.670846

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

Sonuç 1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bir pozitif tanımlı matris, $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ve $R = \frac{1}{2}(A - A^T)$ sırasıyla onun simetrik ve ters simetrik kısımları ve $\gamma_{min}, \gamma_{max}$ sırasıyla S'nin en küçük ve en büyük özdeğerleri olsun. Ayrıca α pozitif bir sabit olsun. Bu durumda

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \left\{\max_{\gamma_{min}\le\lambda\le\gamma_{max}} \left|\frac{\alpha-\lambda}{\alpha+\lambda}\right|\right\} = \sqrt{\gamma_{min}\cdot\gamma_{max}}$$

ve

$$\sigma(\alpha^*) = \frac{\sqrt{\gamma_{max}} - \sqrt{\gamma_{min}}}{\sqrt{\gamma_{max}} + \sqrt{\gamma_{min}}} = \frac{\sqrt{K(S)} - 1}{\sqrt{K(S)} + 1}$$

olur. Burada $K(S)$, S matrisinin spektral koşul sayısıdır.

İspat. $\sigma(\alpha) = \max_{\lambda_i \in \lambda(S)} \left|\frac{\alpha-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|$ olduğu teoremden biliniyor. Buna göre

$$\sigma(\alpha) = \max\left\{\left|\frac{\alpha-\gamma_{min}}{\alpha+\gamma_{min}}\right|, \left|\frac{\alpha-\gamma_{max}}{\alpha+\gamma_{max}}\right|\right\}$$

olur. SSS iterasyonunun $\rho\big(M(\alpha)\big)$ yakınsaklık çarpanını minimum yapacak şekilde bir yaklaşık optimal $\alpha > 0$ değeri hesaplamak için $\rho\big(M(\alpha)\big)$ yerine $\sigma(\alpha)$ üst sınırı minimize edilir. Eğer α^* böyle bir minimum nokta ise bu durumda $\alpha^* - \gamma_{min} > 0$ ve $\alpha^* - \gamma_{max} < 0$ ve

$$\frac{\alpha^*-\gamma_{min}}{\alpha^*+\gamma_{min}} = \frac{\gamma_{max}-\alpha^*}{\gamma_{max}+\alpha^*}$$

sağlamak zorundadır. Böylece,

$$\alpha^* = \sqrt{\gamma_{min}\gamma_{max}}$$

bulunur. α^*'ın bu değeri $\sigma(\alpha) = \max\left\{\left|\frac{\alpha-\gamma_{min}}{\alpha+\gamma_{min}}\right|, \left|\frac{\alpha-\gamma_{max}}{\alpha+\gamma_{max}}\right|\right\}$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\sigma(\alpha^*) = \max\left\{\left|\frac{\alpha^* - \gamma_{min}}{\alpha^* + \gamma_{min}}\right|, \left|\frac{\alpha^* - \gamma_{max}}{\alpha^* + \gamma_{max}}\right|\right\}$$

$$\sigma(\alpha^*) = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{\gamma_{max}} - \sqrt{\gamma_{min}}}{\sqrt{\gamma_{max}} + \sqrt{\gamma_{min}}}\right|, \left|\frac{\sqrt{\gamma_{min}} - \sqrt{\gamma_{max}}}{\sqrt{\gamma_{min}} + \sqrt{\gamma_{max}}}\right|\right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.■

Tüm bu yapılanlara göre artık aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3. $A, B, C, D, E, F, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, bilinen matrisler, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinmeyenler matrisi olmak üzere,

$$AXB + CXD + EX^T F = M$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denklemi

$$\mathcal{A} := B^T \otimes A + D^T \otimes C + (F^T \otimes E)P \text{ ve } \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{nn\times nn},$$

$$x := vec(X) \text{ ve } x \in \mathbb{R}^{n^2},$$

$$b := \big(vec(M)\big) \text{ ve } b \in \mathbb{R}^{n^2}$$

BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi
7(1), 319-328, 2020

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.670846

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

şeklinde düzenleme ile $\mathbb{A}x = b$ biçiminde yazılır. Bu durumda $\alpha^* = \sqrt{\gamma_{min}.\gamma_{max}}$, $S = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T)$ ve $R = \frac{1}{2}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^T)$ olmak üzere

$$x^{(k+1)} = (\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)x^{(k)} + (\alpha I + R)^{-1}\big((\alpha I - S)(\alpha I + S)^{-1} + I\big)b$$

ile bulunan x vektörü gerçek çözüm x^* iken, $vec(x^*) \in \mathbb{R}^{n^2}$ vektörüne yakınsar.

Bu teoreme göre

$$AXB + CXD + EX^TF = M$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ çözümünü bulan algoritma aşağıdaki gibi yazılabilir.

Algoritma.

Adım 1. n ve d gir. Burada n, matrislerin boyutu ve d, $AXB + CXD + EX^TF - M$ matrisinin normu için istenen üst sınırdır.

Adım 2. $A, B, C, D, E, F, M, X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gir. $k = 0$ olsun.

Adım 3. $P = [E_{ij}]_{n^2\times n^2}$ matrisini oluştur,

Adım 4. $\mathbb{A} \coloneqq B^T \otimes A + D^T \otimes C + (F^T \otimes E)P$ matrisini ve $b := vec(M)\ ve\ x^{(k)} = vec(X_0)$ vektörlerini oluştur,

Adım 5. $\mathbb{A}$ matrisinin öz değerlerinde negatif veya kompleks eleman varsa 'Adım 1.' e git.

Adım 6. $S = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T)$, $R = \frac{1}{2}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^T)$ olarak hesapla,

Adım 7. $\alpha = \sqrt{\gamma_{min}.\gamma_{max}}$ olarak hesapla,

Adım 8. $x^{(k+1/2)} = (\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - R)x^{(k)} + (\alpha I + S)^{-1}b$ ve

$x^{(k+1)} = (\alpha I + R)^{-1}(\alpha I - S)x^{(k+1/2)} + (\alpha I + R)^{-1}b$ olarak hesapla,

Adım 9. $x^{(k+1)} = vec(X)$ olacak şekilde X matrisini oluştur,

Adım 10. $\|AXB + CXD + EX^TF - M\|_2 < d$ ise dur, değilse 'Adım 8.' e git.

Şimdi bu teoremin etkinliğini gösteren bir örnek verilecektir.

Örnek.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

verilen matrisleri ve

BSEU Journal of Science
DOI: 10.35193/bseufbd.670846

e-ISSN: 2458-7575 (http://dergipark.gov.tr/bseufbd)

$$X_0 = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 10 \\ 11 & 6 & 9 \\ 10 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

seçilen matrisi için

$$AXB + CXD + EX^T F = M$$

genelleştirilmiş Sylvester transpoz matris denkleminin $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ çözümü SSS metodu ile 28 adımda

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}0707 & -0{,}1841 & 0{,}1481 \\ -0{,}1120 & 0{,}2456 & -0{,}1630 \\ 0{,}0702 & -0{,}0774 & 0{,}0658 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada $\|AXB + CXD + EX^T F - M\| = 0{,}0854$ olur.

KAYNAKLAR

[1] Z.Z. Bai, G.H. Golub and M.K. Ng (2003). Hermitian and Skew Hermitian Splitting Methods for Non-Hermitian Positive Definitive Linear Systems, SIAM J. *Appl. Math*. 24(3), 603-626.

[2] Z.Z. Bai, M. Benzi, F. Chen (2011). On preconditioned MHSS iteration methods for complex symmetric linear systems, Numer. *Algorithms*, 56, 297-317.

[3] M. Dehghan, A. Shirilord (2019). A generalized modified Hermitian and Skew Hermitian splitting (GMHSS) method for solving complex Sylvester matrix equation, *Appl. Math. Comput*. 348, 632-651.

[4] M. Hajarian (2018). Biconjugate residual algorithm for solving General Sylvester-transpose matrix equations, *Filomat*, 32:15, 5307-5318.

[5] J.W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra (first edition), Siam, Berkeley (1997).

[6] R.A. Horn, C.R. Johnson, Matrix Analysis (second edition), Cambridge University Press, New York (2012).

[7] B. Zhou, J. Lam, G.R. Duan (2011). Toward solution of matrix equation X = Af(X)B + C, *Linear Algebra Appl*. 435, 1370–1398.