



## Determination of tire contact stress and deflection distributions in flexible pavement using 3-D boundary element method

İbrahim Özgür Deneme\*

Department of Civil Engineering, Aksaray University, Aksaray, 68100, Turkey

### Highlights:

- Flexible pavement design
- Stress and deflection distributions on flexible pavements
- 3-D constant boundary element

### Keywords:

- Boundary element method,
- Fourier transform space
- Flexible pavement response
- Constant boundary element

### Article Info:

Research Article  
Received: 15.06.2020  
Accepted: 01.01.2021

### DOI:

10.17341/gazimmfd.753193

### Correspondence:

Author: İbrahim Özgür  
Deneme  
e-mail:  
ideneme@aksaray.edu.tr  
phone: +90 382 288 3568

### Graphical/Tabular Abstract

In this study, the boundary element method (BEM) was employed for the numerical determination of the response of flexible pavements. The material behaviour of the soil was assumed to be linear elastic. The BEM was used in the Fourier transform space. The focus of this paper is to determine the stress and deflection distributions in interior points of the elastic half space. Therefore, in the static analysis, formulation was considered for stress and deflection distributions on flexible pavements, since the purpose of the study is to analyse the influence of the load model on the pavement response, with the BEM formulation adopted for pavement design. The results of stress and deflection distributions on flexible pavements calculated by BEM are compared with the results obtained from Boussinesq equations published in the literature.

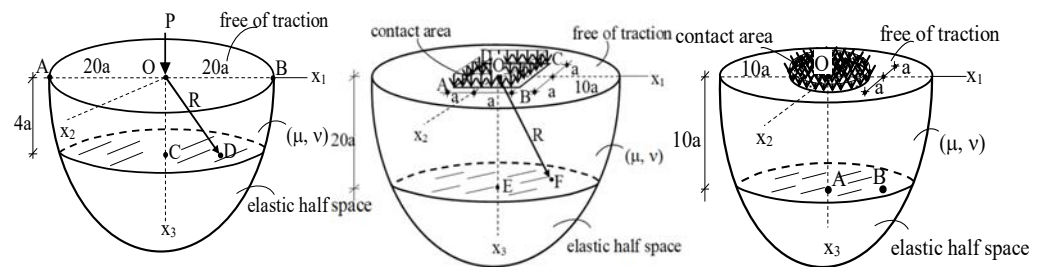


Figure A. Load types on elastic half space

**Purpose:** The focus of this study is to determine the stress and deflection distributions of interior points of the elastic half space. To achieve this aim, a computer program is developed for three-dimensional elastic problems

### Theory and Methods:

The static analysis, formulation was considered for stress and deflection distributions on flexible pavements, since the purpose of the study is to analyse the influence of the load model on the pavement response, with the BEM formulation adopted for pavement design.

### Results:

The results, which were obtained using boundary element formulation, are presented and compared with the results obtained from Boussinesq formula ones. The both results obtained from BEM and Boussinesq formula are in perfect agreement with each

### Conclusion:

Based on the formulation, general purpose computer program is developed, and it is applied to flexible pavement design problems. The formulation proposed in this paper is assessed by applying to the several problems. The results are obtained from BEM formulation and compared with those obtained from Boussinesq formulas. The comparisons showed that the formulation presented in this study can be used with a perfect confidence in calculation of the stresses and deflection distributions at any point of flexible pavement system and flexible pavement design problems.



## Esnek üstyapılarda tekerlek temas gerilmesi ve deplasman dağılımlarının üç boyutlu sınır eleman metodu ile belirlenmesi

İbrahim Özgür Deneme\*

Aksaray Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Aksaray, 68100, Türkiye

### Ö N E Ç I K A N L A R

- Esnek üstyapı tasarımı
- Esnek üstyapılardaki gerilme ve deplasman dağılımları
- Üç boyutlu sabit sınır elemanı

### Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 15.06.2020

Kabul: 01.01.2021

### DOI:

10.17341/gazimmfd.753193

### Anahtar Kelimeler:

Sınır eleman metodu,  
Fourier dönüşüm uzayı,  
esnek üstyapı davranışı,  
sabit sınır eleman

### ÖZ

Bu çalışmada, esnek üstyapıların davranışının sayısal olarak belirlenmesi için Sınır Eleman Metodu (SEM) kullanılmıştır. Zeminin malzeme davranışının doğrusal elastik olduğu varsayılan çalışmada SEM, Fourier dönüşüm uzayında ele alınmıştır. Bu çalışmada, elastik yarım uzaydaki iç noktalarda oluşan gerilme ve deplasman dağılımlarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla çalışmada, üç boyutlu elastik problemler için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Sınır eleman formülasyonu kullanılarak belirlenen esnek üstyapılarda oluşan gerilme ve deplasman dağılımlarının sonuçları, literatürde verilen Boussinesq denklemlerinin kullanılmasıyla elde edilen değerler ile karşılaştırılmıştır. SEM ve Boussinesq formülünden elde edilen sonuçların birbiriyle mükemmel bir uyum içinde olduğu sonucuna varılmıştır.

## Determination of tire contact stress and deflection distributions in flexible pavement using 3-D boundary element method

### H I G H L I G H T S

- Flexible pavement design
- Stress and deflection distributions on flexible pavements
- 3-D constant boundary element

### Article Info

Research Article

Received: 15.06.2020

Accepted: 01.01.2021

### DOI:

10.17341/gazimmfd.753193

### Keywords:

Boundary element method,  
Fourier transform space,  
flexible pavement response,  
constant boundary element

### ABSTRACT

In this study, the Boundary Element Method (BEM) was employed for the numerical determination of the response of flexible pavements. The material behaviour of the soil was assumed to be linear elastic. The BEM was used in the Fourier transform space (FTS). The focus of this paper is to determine the stress and deflection distributions of interior points of the elastic half space. To achieve this aim, in this study, a computer program is developed for three-dimensional elastic problems. The results of stress and deflection distributions on flexible pavements determined using boundary element formulation are compared with Boussinesq equations published in the literature. It was concluded that the results obtained from BEM and Boussinesq formula are in perfect agreement with each other.

## 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Üstyapı tasarımında iki farklı yaklaşım kullanıldığı bilinmektedir. Bunlardan biri rijit üstyapı yaklaşımıdır. Bu yaklaşımda rijit üstyapı alt zemin tabakası üzerinde donatılı veya donatısız olarak yapılabilen beton bir tabakadan oluşur. Rijit beton kaplama, taşıt dingil yüklerini eğilerek alt tabakaya iletir. Alt tabakada oluşan gerilmeler genellikle alt tabakadaki malzemelerinin dayanımından daha düşüktür. Ancak, araç yükleri beton kaplama malzemesinde alt tabaka üzerindeki gerilmelerden çok daha fazla gerilme oluşturur. Böylece, gerilmeler rijit üstyapı ile taşınır ve yeterli çekme dayanımına sahip bir beton kullanmak genellikle rijit üstyapının tasarımı için yeterlidir [1]. Üstyapı tasarımı için kullanılan, diğer yaklaşım ise esnek üstyapı yaklaşımıdır. Esnek üstyapı yaklaşımında, esnek üst yapı araç yüklerini kendi gövdesine dağıtır ve esnek üst yapıda araç yükleri altında deplasmanlar oluşur. Tipik bir esnek üstyapısı esas olarak birkaç malzeme tabakasından oluşur. Üst tabakaların yüzeyinde maksimum gerilme meydana gelir ve malzemelerin alt kısmında gerilme azalır. Alt zemin tabakasında oluşan gerilme ve deplasman dağılımlarının belirlenmesi esnek üstyapı tasarımında önemlidir. Esnek üstyapı içindeki gerilme dağılımına göre, esnek üstyapı tabakalarının kalınlığı belirlenir veya belirli bir kalınlık için, bu tabakada kullanılacak yeterli dayanıma sahip malzeme seçimi yapılır. Esnek üstyapı tepkisinin hesaplanmasında statik veya dinamik yaklaşımlar kullanılabilir. Statik analizde dinamik analizin aksine, yapısal kütle ve sönümlenme oranları gibi atalet etkileri göz ardı edilir. Yol üstyapısının alt tabakaları, yük tipinin etkisi, hareketli yükün hızı ve sıklığı dikkate alınarak elastik veya visko-elastik homojen bir yarım uzay olarak modellenilebilir [2, 3]. Boussinesq teorisine göre, her iki analiz yaklaşımında da alt zemin tabakası ile üstyapının modüllerinin birbirine yakın olması durumunda esnek üstyapı homojen ve elastik bir yarım uzay olarak düşünülebilir ve taşıt yükleri altında oluşan gerilmeler, şekil değiştirmeler ve deplasmanlar doğru bir şekilde hesaplanabilir [4]. Taşıt yükleri yol üstyapısına tekerlekler vasıtası ile iletilmektedir. Deneysel ölçümler ve sonlu elemanlar analizleri gibi sayısal analizler, tekerlek-üstyapı temas yüzeyindeki basınç dağılımının çok karmaşık olduğunu göstermiştir [5, 6]. Bu nedenle, yol üstyapısının gerçek tepkilerini elde etmek için tekerlekler ve yol arasındaki temas gerilmesi için kabul edilebilir bir tanımlama yapılmalıdır [7]. Literatürdeki bazı çalışmalarda tekerlek ve yol üstyapısı arasındaki temas alanı dikdörtgen olarak modellenmiştir [8].

Sonlu elemanlar metodu, SEM ve sonlu elemanlar ile sınır elemanlar metodlarının beraber kullanılması gibi sayısal yöntemler esnek üstyapı problemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Son yıllardaki bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler ile gerilme ve şekil değiştirmelerin belirlenmesinde sonlu elemanlar metodu en popüler sayısal çözümleme yöntemi olmuştur. Literatürde yer alan esnek üstyapıların analizinde ilk sonlu eleman uygulaması [9] numaralı referansta görülebilir. O zamandan sonra esnek

üstyapı analizi için birçok sonlu elemanlar metodu ile işlem yapan birçok bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu programlarda esnek üstyapı problemleri statik [10, 11] veya dinamik sabit [12-14] veya hareketli yükler [15-17] altında elastik [18-20] veya visko-elastik [21, 22] yarım uzay olarak modellenmiştir. Sonlu elemanlar ile sınır elemanlar metodlarının birlikte kullanıldığı esnek üstyapı problemleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar [23, 24] numaralı referanslarda görülebilir.

Sonlu elemanlar yönteminde yarı sonsuz zemin bölgesi modellenirken tüm hacmin üç boyutlu küçük elemanlara bölünmesi gerektiği için sistemde çok fazla serbestlik derecesi oluşmakta ve denklemlerdeki bilinmeyen sayısı da artmaktadır. Buna karşılık SEM’de, ele alınan cismin davranışını idare eden diferansiyel denklem, cismin sınırları üzerinde tanımlanan integral denkleme dönüştürülerek, yalnızca çözüm bölgesi sınırının elemanlara bölünmesi yeterli olmakta ve problemin boyutu bir boyut azaltılabilmektedir [25-28]. Böylece SEM’de sonlu elemanlar metoduna göre (özellikle üç boyutlu problemlerde) bulunması gereken bilinmeyenler için çok daha az sayıda dataya ihtiyaç duyulmakta ve veri üretme işlemi daha kolay gerçekleşmektedir. İlave olarak SEM’in, sonlu eleman yöntemine göre bazı önemli üstünlükleri ise, yarı analitik bir yöntem olmasından dolayı diğer sayısal yöntemlerle elde edilen sonuçlara göre daha iyi sonuçlar elde edilebilmesi ve sonsuza uzanan çözüm bölgelerindeki dalga yayılma şartlarının, otomatik olarak göz önüne alınması olarak sayılabilir. Ayrıca problemde hacim kuvvetlerinin bulunması durumunda hacim integralleri karşılık teoremi yardımı ile sınır integrallerine dönüştürülebilmektedir [29]. İntegral eşitliklerinde bulunan temel çözümler, sonsuz ortamda birim yükleme yöntemi yardımı ile analitik olarak belirlenebilir [30]. Bundan sonra oluşturulan integral denklemleri kullanılarak sınır büyüklükleri (gerilme ve deplasman) ve iç noktadaki tepki büyüklükleri (gerilme ve deplasman) sayısal olarak hesaplanabilir. Literatürde bulunan elastik/tabakalı yarım uzayın serbest veya yüzeyindeki hareketli yükler altındaki tepkisinin SEM ile hesaplanması [31-35] numaralı referanslarda verilmiştir. Literatürde, esnek yol üstyapılarında oluşan gerilme ve deplasman dağılımlarının SEM kullanılarak belirlenmesi ile ilgili çalışma bulunmamaktadır.

Bu çalışmada, esnek yol üstyapısında tekerlek temasından oluşan tepkilerin sayısal olarak belirlenmesi için SEM kullanılmıştır. Modellemede zeminin lineer elastik davranış gösterdiği varsayımı kullanılarak SEM formülasyonu Fourier dönüşüm uzayında gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın ana hedefi elastik yarım uzayın iç noktalarındaki gerilme ve deplasman dağılımlarının belirlenebilmesi olduğu için statik analizde formülasyon yapılmıştır. Çalışmada önerilen SEM formülasyonu kullanılarak geliştirilen bilgisayar programı ile esnek üstyapı üzerine farklı yük tiplerinin uygulandığı durumlar için gerilme ve deplasman dağılımları belirlenmiştir. SEM formülasyonu ile elde edilen esnek üstyapılardaki gerilme ve deplasman dağılımlarının

sonuçları, literatürde bulunan Boussinesq denklemlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

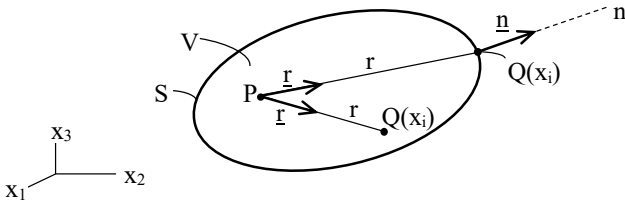
## 2. SINIR ELEMAN DENKLEMİ (BOUNDARY INTEGRAL EQUATION)

Elastodinamik problemler için sınır eleman denkleminin elde edilmesi, literatürde detaylı olarak verilmektedir [27, 28, 30]. Şekil 1’de görülen üç boyutlu bir cismin elastodinamik analizi için sınır eleman denklemi Fourier dönüşüm uzayında ve indisli notasyonda Eş. 1 şeklinde yazılabilmektedir.

$$c_{lk}u_k(P) = \int_S G_{lk}(P, Q)t_k(Q)dS - \int_S H_{lk}(P, Q)u_k(Q)dS + \int_V G_{lk}(P, Q)f_k(Q)dV \quad (1)$$

Burada görülen terimler sırasıyla,  $G_{lk}$  ve  $H_{lk}$  ifadeleri birinci ve ikinci temel çözümleri,  $u_k$ ,  $t_k$  ve  $f_k$  ifadeleri ise deplasman, gerilme ve hacim kuvveti vektörlerini temsil etmektedir.  $c_{lk}$  ifadesinin değeri P sabit noktasının konumuna göre değişmektedir. Eşitlikte görülen indislerin değerleri ise üç boyutlu hal için 1 ile 3 arasında değişmektedir. Eş. 1’de verilen sınır eleman denklemi matris formunda Eş. 2 şeklinde yazılır.

$$\underline{c} \underline{u}(P) = \int_S \underline{G}(P, Q)\underline{t}(Q)dS - \int_S \underline{H}(P, Q)\underline{u}(Q)dS + \int_V \underline{G}(P, Q)\underline{f}(Q)dV \quad (2)$$



Şekil 1. Üç boyutlu cisim (Three dimensional body)

Eş. 2’de görülen  $\underline{c}$  matrisinin tanımı Eş. 3’de yapılmaktadır.

$$\underline{c} = \begin{cases} \underline{I} & \text{P noktası cismin içinde ise} \\ \underline{0} & \text{P noktası cismin dışında ise} \\ \frac{1}{2}\underline{I} & \text{P noktası cismin S sınırı üzerinde ise} \end{cases} \quad (3)$$

Elastostatik problemler için birinci ve ikinci temel çözümler ( $\underline{G}$  ve  $\underline{H}$ ), referans sisteminin sonsuz ortam olarak seçilmesi halinde analitik olarak elde edilmektedir [30].

## 3. SINIR ELEMAN DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ (SOLUTION OF BOUNDARY ELEMENT EQUATION)

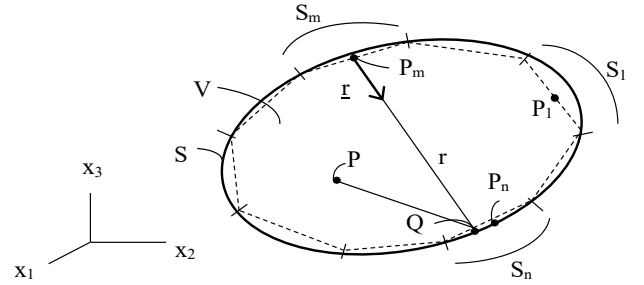
Bu çalışmada, sınır eleman denkleminin sayısal çözümü için üç boyutlu sabit sınır eleman formülasyonu kullanılmıştır. Sabit sınır eleman formülasyonunda, her bir eleman üzerindeki sınır büyüklüklerinin sabit olduğu ve üç boyutlu analizde eleman geometrisinin düzlem parçası şeklinde olduğu kabul edilmektedir. Bu kabullere göre eleman üzerinde seçilecek olan düğüm noktasının eleman ağırlık

merkezinde seçilmesi uygun olacaktır. Sınır üzerindeki gerilme ve deplasman vektörleri, cisim sınırının Şekil 2’de gösterildiği gibi N adet sınır elemanına bölünerek sınır eleman denkleminin sayısal olarak çözülmesi ile elde edilir. Cisim sınırının N adet sınır elemanına bölünmesinden sonra Eş. 2’de verilen sınır eleman denklemi m inci sınır elemanın  $P_m$  düğüm noktası için, hacim kuvvetlerinin bulunmaması durumunda Eş. 4 ve Eş. 5 şeklinde yazılabilir.

$$\frac{1}{2}\underline{u}^m = \sum_{n=1}^N \underline{G}^{mn}\underline{t}^n - \sum_{n=1}^N \underline{H}^{mn}\underline{u}^n \quad (m=1, \dots, N) \quad (4)$$

$$\underline{G}^{mn} = \int_{S_n} \underline{G}(P_m, Q)dS; \underline{H}^{mn} = \int_{S_n} \underline{H}(P_m, Q)dS \quad (5)$$

Burada  $S_n$  ifadesi n inci elemanın sınırını göstermektedir (Şekil 2). Eş. 4’de görülen,  $\underline{u}^n$  ve  $\underline{t}^n$  ifadeleri n inci sınır elemanına ait deplasman ve gerilme vektörleridir.  $P_m$  noktası köşe olamayacağından  $\underline{c} = \frac{1}{2}\underline{I}$  ifadesi kullanılmıştır.



Şekil 2. Cisim sınırının sınır elemanlarına bölünmesi (Boundary element discretization of the body)

Düğüm noktasındaki deplasman ve gerilme vektörü bileşenleri Eş. 6 ve Eş. 7’de tarif edilmektedir

$$\underline{u}^n = \underline{u}(P_n) \quad (6)$$

$$\underline{t}^n = \underline{t}(P_n) \quad (7)$$

Eş. 4 ifadesi N adet sınır elemanı için yazılır ve elde edilen denklemler bir araya toplanırsa SEM’in sistem denklemi matris formunda Eş. 8 şeklinde elde edilir.

$$\underline{\tilde{H}} \underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{G}} \underline{\tilde{t}} \quad (8)$$

Eş. 8’de görülen ifadeler elde edilirken Eş. 9’da verilen tanımlamalar kullanılmıştır.

$$\underline{\tilde{G}} = (\underline{G}^{mn}); \underline{\tilde{H}} = (\underline{H}^{mn} + \frac{1}{2}\underline{I}\delta_{mn}); \underline{\tilde{u}} = (\underline{u}^n); \underline{\tilde{t}} = (\underline{t}^n), \quad (m=1, \dots, N) \quad (9)$$

Burada, Eş. 9’da görülen  $\delta_{mn}$  Kronecker delta’yı temsil etmektedir.  $\underline{G}^{mn}$  ve  $\underline{H}^{mn}$  matrislerinin elemanları Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanabilir. Bilinen sınır şartları, sistem denklemi olan Eş. 8’de yerine yazılarak bilinmeyen sınır büyüklükleri elde edilir. Bilinmeyen sınır büyüklükleri belirlendikten sonra, istenirse

iç noktalardaki gerilme ve deplasman vektörlerinin bileşenleri de sayısal olarak hesaplanır.

### 3.1. İç Noktalardaki Deplasmanların Belirlenmesi (Determination of Displacements at Interior Points)

Eş. 1 kullanılarak cismin içindeki herhangi bir P noktası (Şekil 1) için deplasman değerleri hesaplanabilir. P noktası cisim içinde olduğu için formülasyonda  $\underline{c} = \underline{I}$  kullanılmıştır. Bu amaçla Eş. 1 ifadesi hacim kuvvetlerinin bulunmaması durumunda Eş. 10 şeklinde yazılır.

$$u_i(P) = \int_S G_{ik}(P, Q) t_k(Q) dS - \int_S H_{ik}(P, Q) u_k(Q) dS \quad (10)$$

Eş. 10 ifadesinin sayısal olarak çözümü için cisim sınırı N adet sınır elemana bölünür ve sabit sınır elemanı formülasyonu kullanılırsa Eş. 11 ifadesi elde edilir. Eş. 11'de görülen,  $G_{ik}^n$  ve  $H_{ik}^n$  ifadeleri Eş. 12'de açıklanmıştır.

$$u_i(P) = \sum_{n=1}^N G_{ik}^n t_k^n - \sum_{n=1}^N H_{ik}^n u_k^n \quad (11)$$

$$G_{ik}^n = \int_{S_n} G_{ik}(P, Q) dS; H_{ik}^n = \int_{S_n} H_{ik}(P, Q) dS \quad (12)$$

Ayrıca,  $u_k^n$  ve  $t_k^n$  ifadeleri sırasıyla, n inci elemana ait deplasman ve gerilme vektörlerinin bileşenlerini temsil etmektedir. Böylece, Eş. 11 yardımı ile P iç noktasının deplasman vektörü bileşenleri sınır büyüklüklerine bağlı olarak hesaplanabilir. Eş. 12'de görülen integraller Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanabilir. İndisli notasyonda yazılmış olan Eş. 11 ve Eş. 12 ifadelerindeki indisler üç boyutlu hal için 1 ile 3 arasında değişmektedir.

### 3.2. İç Noktalardaki Gerilmelerin Belirlenmesi (Stresses Determination at Interior Points)

P iç noktasında oluşan gerilmeleri hesaplayabilmek için Eş. 1 ile birlikte Eş. 13'de görülen bünye denkleminin de yazılması gerekmektedir.

$$\tau_{ij}(P) = c_{ijsl} \frac{\partial u_l}{\partial p_s}(P) \quad (13)$$

Burada,  $p_s$ , P iç noktasının koordinatlarını,  $\tau_{ij}$  (i, j = 1, 2, 3) gerilme bileşenlerini ve  $c_{ijsl}$  ise malzeme katsayılarını göstermektedir. İzotropik malzemeler için  $c_{ijsl}$  katsayıları Eş. 14'de verilmektedir. Burada  $\lambda$ , Lamé sabitidir.

$$c_{ijsl} = \mu(\delta_{is}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{js}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{sl} \quad (14)$$

Eş. 13'de görülen  $\tau_{ij}$ , gerilme bileşenlerini hesaplayabilmek için Eş. 10 ifadesinin P noktasının koordinatlarına göre kısmi türevi  $\left(\frac{\partial u_l}{\partial p_s}\right)$  alınıp elde edilen ifadeler Eş. 13'de yerine yazılırsa Eş. 15 ifadesi elde edilir. Eş. 15'de görülen,  $D_{kij}(P, Q)$  ve  $S_{kij}(P, Q)$  ifadeleri Eş. 16'da verilmektedir.

$$\tau_{ij}(P) = \int_S D_{kij}(P, Q) t_k(Q) dS - \int_S S_{kij}(P, Q) u_k(Q) dS \quad (15)$$

$$D_{kij}(P, Q) = c_{ijsl} \frac{\partial G_{lk}(P, Q)}{\partial p_s}; S_{kij}(P, Q) = c_{ijsl} \frac{\partial H_{lk}(P, Q)}{\partial p_s} \quad (16)$$

Burada,  $G_{ik}$  ve  $H_{ik}$  birinci ve ikinci temel çözümleri göstermektedir. İndisler ise üç boyutlu analiz için 1 ile 3 arasında değişmektedir. Üç boyutlu hal için  $G_{ik}$  ve  $H_{ik}$  birinci ve ikinci temel çözümleri Eş. 17'de verilmektedir.

$$G_{ik} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ik} + r_i r_k];$$

$$H_{ik} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_i r_k \} + (1-2\nu)(n_i r_k - n_k r_i) \right] \quad (17)$$

Burada,  $\delta_{ik}$ ,  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $n_i$  ve  $r_i$  ifadeleri sırasıyla, Kronecker delta'yı, Poisson oranını, kayma modülünü,  $\underline{P}_m \underline{Q}$  doğrultusundaki birim dış normal vektörü bileşenlerini ve birim vektör bileşenlerini temsil etmektedir.

Cisim sınırı Şekil 2'deki gibi N adet sınır elemana bölünür ve sabit eleman formülasyonu kullanılırsa Eş. 15 ifadesi Eş. 18 şeklinde elde edilir.

$$\tau_{ij}(P) = \sum_{n=1}^N D_{kij}^n t_k^n - \sum_{n=1}^N S_{kij}^n u_k^n \quad (18)$$

Burada görülen  $\underline{D}^n$  ve  $\underline{S}^n$  sabitleri Eş. 19'da tanımlanmaktadır.

$$D_{kij}^n = \int_{S_n} D_{kij}(P, Q) dS; S_{kij}^n = \int_{S_n} S_{kij}(P, Q) dS \quad (19)$$

$\underline{D}^n$  ve  $\underline{S}^n$  sabitlerini ifade eden integraller Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanabilir. Bu sabitlerin,  $t^n$  ve  $u^n$  sınır büyüklüklerinin elde edilmesi ile iç noktalardaki gerilme vektörü bileşenleri Eş. 18 kullanılarak hesaplanabilir.

$\underline{D}^n$  ve  $\underline{S}^n$  sabitleri Eş. 16'da tanımlanan  $\underline{D}$  ve  $\underline{S}$  fonksiyonlarını içermektedir. Bu fonksiyonlar elastik sabitlere ve temel çözümlere bağlı olup Eş. 16'da belirtilen işlemler yapılarak elde edilebilir. Elastik cisimlerin statik analizleri için  $D_{kij}$  ve  $S_{kij}$  ifadeleri Eş. 20'de tanımlanmaktadır.

$$D_{kij} = \frac{1}{r^\alpha} \{ (1-2\nu)[\delta_{ki}r_j + \delta_{kj}r_i - \delta_{ij}r_k] + \beta r_i r_j r_k \} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)};$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu}{r^\beta} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_k + \nu(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) - \gamma r_i r_j r_k] + \beta\nu(n_i r_j r_k + n_j r_i r_k) + (1-2\nu)(\beta n_k r_i r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \quad (20)$$

Burada görülen  $\alpha$ ,  $\beta$ , ve  $\gamma$  sabitleri sırasıyla 2, 3 ve 5 değerlerini almaktadır.

### 3.3. Tekil İntegrallerin Hesabı (Calculation of Singular Integrals)

Tekillik problemi P sabit noktası ile Q integrasyon noktasının aynı eleman üzerinde bulunduğu hallerde ortaya çıkmaktadır. Bu özel halden dolayı Eş. 8'de verilen sınır eleman sistem denklemini oluşturan matrislerin köşegen ( $\underline{G}^{mm}$  ve  $\underline{H}^{mm}$ ) elemanlarının hesabında tekillik problemi oluşmaktadır. Sistem denkleminin  $\underline{G}^{mm}$  ve  $\underline{H}^{mm}$  elemanlarının hesabı için Eş. 21 ifadeleri yazılabilmektedir.

$$\underline{G}^{mm} = \int_{S_m} \underline{G}(P_m, Q) dS ; \underline{H}^{mm} = \int_{S_m} \underline{H}(P_m, Q) dS \quad (21)$$

Bu eşitlikler Cauchy kuralına göre yazıldığından P sabit noktası ile Q integrasyon noktasının çakışmadığı kabul edilmektedir [30, 36]. Bununla birlikte P sabit noktası ile Q integrasyon noktasının aynı eleman üzerinde bulunduğu hallerde iki nokta arasındaki uzaklık (r) sıfıra yakın değer alacağından Eş. 17'de verilen temel çözümlerde tekillik problemi ortaya çıkacaktır. Eğer bu integraller analitik olarak hesaplanamıyorsa tekilliğin giderilebilmesi için özel sayısal integrasyon yöntemleri kullanılmalıdır [27, 28].

Seçilen sınır elemanlarının dört kenarlı bir düzlem parçası olması durumunda  $\underline{G}^{mm}$  ve  $\underline{H}^{mm}$  matrislerinin hesaplanabilmesi için Banerjee [27] ve Tanrikulu [36] tarafından analitik ifadeler verilmektedir. Bu analitik ifadeleri açıklamak için Şekil 3a'da gösterilen dört kenarlı düzlemsel eleman göz önüne alınmıştır.  $P_m$  sabit noktasının elemanın ağırlık merkezinde olduğu kabulü yapılarak, eleman  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) eksen takımında  $e_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) birim vektörleri ile dikkate alınmıştır. Elemana ait birim dış normal ise  $\underline{n}$  ile gösterilmiştir. Ele alınan dörtgen eleman ortak tepe noktalarının  $P_m$  noktasında kesiştiği kabul edilen dört adet üçgen elemana ayrılmıştır (Şekil 3a). Bu açıklamalar ışığında üçgen elemanlar kullanılarak  $\underline{G}^{mm}$  ve  $\underline{H}^{mm}$  matrisleri için Eş. 22 ifadeleri yazılabilir.

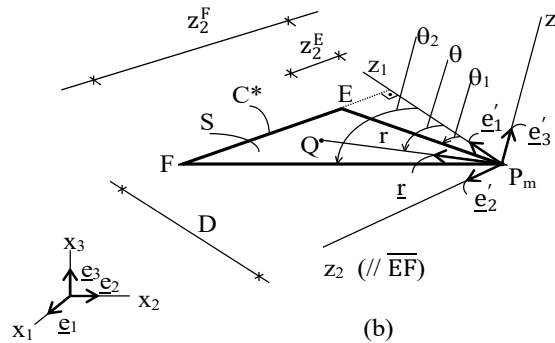
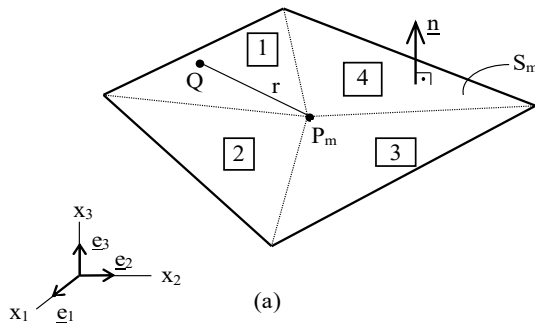
$$\underline{G}^{mm} = \sum_{k=1}^4 \underline{G}^k mm ; \underline{H}^{mm} = \sum_{k=1}^4 \underline{H}^k mm \quad (22)$$

Notasyon basitliği için  $\underline{I}^G$  ve  $\underline{I}^H$  tanımlamaları Eş. 23'deki gibi yapılmaktadır.

$$\underline{I}^G = \underline{G}^k mm = \int_{S_m^k} \underline{G}(P_m, Q) dS ;$$

$$\underline{I}^H = \underline{H}^k mm = \int_{S_m^k} \underline{H}(P_m, Q) dS \quad (23)$$

Burada,  $S_m^k$  inci üçgen elemanın sınır yüzeyini temsil etmektedir. Bundan sonra notasyon basitliği için  $S_m^k$  yerine  $S^*$  ifadesi kullanılacaktır.



Şekil 3. (a) Tipik dört kenarlı düzlemsel eleman (b) Dört kenarlı düzlemsel elemandan çıkarılan tipik üçgen eleman  
(a) A typical flat quadrilateral element (b) Typical triangular element extracted from flat quadrilateral element

Eş. 17'de verilen temel çözümler dikkate alınır,  $\underline{I}_{lk}^G$  ifadesi Eş. 24 şeklinde yazılabilir.

$$\underline{I}_{lk}^G = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{S^*} \frac{1}{r} [(3-4\nu)\delta_{lk} + r_i r_k] dS \quad (24)$$

Burada,  $\delta_{lk}$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  ve  $r_i$  ifadeleri sırasıyla, Kronecker deltası, Poisson oranını, kayma modülünü ve  $\overline{P_m Q}$  doğrultusundaki birim vektör bileşenlerini temsil etmektedir.  $\underline{I}_{lk}^G$  ifadesinin analitik olarak hesaplanabilmesi için Şekil 3b'de görüldüğü gibi orijini  $P_m$  noktasında olan  $z_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) eksen takımı tanımlanmaktadır.  $z_2$  eksenini  $\overline{EF}$  doğrultusunda,  $z_1$  eksenini ise  $z_2$  eksenine dik ve üçgenin  $\overline{EF}$  kenarına doğru seçilmektedir. Üçüncü eksen olan  $z_3$  eksenini ise sağ el kuralına göre belirlenmektedir.  $\underline{r}$  birim vektörünün  $x_i$  eksen takımındaki bileşenleri Eş. 25 şeklinde elde edilir.

$$r_i = a_{1i} \cos\theta + a_{2i} \sin\theta \quad (25)$$

Eş. 24'de görülen sonsuz küçük alan (dS) polar koordinat takımında Eş. 26 şeklinde yazılabilir.

$$dS = r dr d\theta \quad (26)$$

Eş. 25 ve Eş. 26 ifadeleri Eş. 24'de yerine yazılırsa Eş. 27 ifadesi elde edilir.

$$\underline{I}_{lk}^G = \frac{D}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\cos\theta} [(3-4\nu)\delta_{lk} + a_{11}a_{1k} \cos^2\theta + a_{21}a_{2k} \sin^2\theta + (a_{11}a_{2k} + a_{21}a_{1k}) \sin\theta \cos\theta] d\theta \quad (27)$$

Burada D ifadesi  $P_m$  noktasının  $\overline{EF}$  kenarına olan uzaklığını göstermektedir.  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  açıları ise sırasıyla,  $\overline{P_m E}$  ve  $\overline{P_m F}$  vektörlerinin  $z_1$  eksenini ile yapmış olduğu açılardır (Şekil 3b).

Eğer Eş. 27'de verilen integral analitik olarak hesaplanırsa,  $\underline{I}_{lk}^G$  ifadesi Eş. 28 şeklinde elde edilir.

$$\underline{I}_{lk}^G = \frac{D}{16\pi\mu(1-\nu)} [((3-4\nu)\delta_{lk} + a_{21}a_{2k}) \ln(\tan\theta + \sec\theta) + (a_{11}a_{1k} - a_{21}a_{2k}) \sin\theta - (a_{11}a_{2k} + a_{21}a_{1k}) \cos\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (28)$$

Burada görülen  $D$ ,  $\sin\theta_1$  ve  $\cos\theta_1$  ( $i = 1, 2$ ) ifadeleri Eş. 29 şeklinde hesaplanabilmektedir.

$$D = \overline{P_m E} \cdot e_1' ; \sin\theta_1 = \frac{z_2^E}{\overline{P_m E}} ;$$

$$\sin\theta_2 = \frac{z_2^F}{\overline{P_m F}} ; \cos\theta_1 = \frac{D}{\overline{P_m E}} ; \cos\theta_2 = \frac{D}{\overline{P_m F}} \quad (29)$$

Bu tanımlamalardaki  $z_2^E$  ve  $z_2^F$  ifadeleri, E ve F noktalarının  $z_2$  koordinatlarını göstermektedir. Böylece,  $I_{lk}^G$  ifadesi için bulunan ifade dört adet üçgen için hesaplanarak Eş. 22'de yerine yazılırsa  $\underline{G}^{mm}$  matrisi analitik olarak hesaplanmış olur.

Eş. 23'de verilen  $\underline{I}^H$  matrisinin elemanlarının analitik olarak hesaplanabilmesi için Eş. 17'deki ikinci temel çözüm kullanılırsa  $\underline{I}^H$  matrisinin elemanları için Eş. 30 ifadesi yazılabilir.

$$I_{lk}^H = -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \int_{S^*} \frac{1}{r^2} (n_l r_k - n_k r_l) dS \quad (30)$$

Ayrıca  $\underline{r} \perp \underline{n}$  olması nedeni ile  $\frac{\partial r}{\partial n} = 0$  eşitliği de göz önüne alınmalıdır. Stokes integral teoremi yardımıyla Eş. 30'da verilen  $S^*$  alanı üzerinde tanımlanan integral ifadesi, çizgisel integral ifadesine dönüştürülmüş olur. Elde edilen çizgisel integral ifadesi Eş. 31 şeklinde yazılabilir.

$$I_{lk}^H = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \epsilon_{lks} \int_{C^*} \frac{1}{r} dx_s \quad (31)$$

$$dx_s = a_{1s} dz_1 + a_{2s} dz_2 ; r = (D^2 + z_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

Burada Eş. 32'de görülen tanımlama yapılmaktadır. Ayrıca  $C^*$  Şekil 3b'de görülen üçgenin sınırını temsil etmekte ve integrasyon işleminin  $\overline{EF}$  vektörü doğrultusunda gerçekleştirildiği kabul edilmektedir.  $\epsilon_{lks}$  ise permütasyon sembolünü göstermektedir.

Çevresi  $C^*$  ile gösterilen üçgenin  $\overline{P_m E}$  ve  $\overline{P_m F}$  kenarları iki komşu üçgenin kenarlarını oluşturmaktadır. Böylece Eş. 30 ifadesi komşu üçgenler için yazıldığında bu kenarların integrasyon işlemine katkısı eşit ve ters işaretli olacaktır. Bu nedenle tanımlanan Eş. 31 ifadesinde tanımlanan integralin  $\overline{EF}$  kenarı boyunca hesaplanması yeterli olacaktır. Böylece  $I_{lk}^H$  ifadesinin hesaplanabilmesi için bulunan integral analitik olarak hesaplanırsa Eş. 33 ifadesi elde edilir.

$$I_{lk}^H = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \epsilon_{lks} a_{2s} [\ln(r + z_2)]_{z_2^E}^{z_2^F} \quad (33)$$

Böylece,  $I_{lk}^H$  ifadesi için bulunan ifade dört adet üçgen için hesaplanarak Eş. 22'de yerine yazılırsa  $\underline{H}^{mm}$  matrisi analitik olarak hesaplanmış olur.

#### 4. BOUSSINESQ TEORİSİ (BOUSSINESQ THEORY)

Uygulanan gerilmelerin aktarıldığı malzeme, hem yatayda hem de düşeyde sonsuz olarak idealize edilmiş, elastik, homojen ve izotropik bir kütle olarak kabul edilirse, kütle

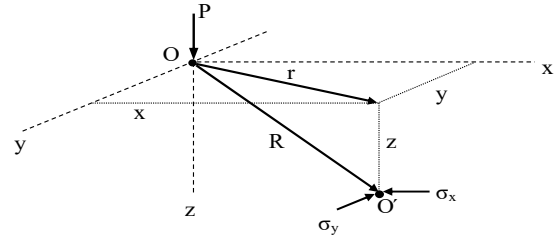
içindeki herhangi bir noktadaki gerilmeleri Boussinesq tarafından geliştirilen teorik denklemler vasıtasıyla belirlemek mümkündür. Boussinesq denklemleri ile elde edilen değerlerin, sınır koşullarının teorik varsayımıyla uyumlu olduğu ve zeminin esneklik modülünün sabit olduğu homojen zeminler için oldukça geçerli olduğu düşünülebilir [37-39].

##### 4.1. Tekil Yük Hali (Concentrated Load Situation)

Boussinesq formülüne göre homojen zeminlerde tekil yük etkisi nedeniyle herhangi bir derinlikte oluşan düşey gerilme değerleri Eş. 34 kullanılarak bulunabilir.

$$\sigma_z = \left(\frac{3}{2\pi}\right) \left(\frac{1}{\left[1+\left(\frac{r}{z}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}}\right) \left(\frac{P}{z^2}\right) \quad (34)$$

Eş. 34 kullanılarak tekil yük etkisi altındaki elastik yarım uzay için gerilme ve deplasman denklemleri Şekil 4 yardımı ile Kartezyen koordinatlarda Eş. 35'deki gibi türetilebilir.



Şekil 4. Kartezyen koordinatlarda elastik sistem üzerindeki tekil yük

(Concentrated load on elastic system in cartesian coordinates)

$$\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi R^5}$$

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi} \left\{ \frac{x^2 z}{R^5} + \frac{(1-2\nu)}{3} \left[ \frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{R^3(R+z)^2} - \frac{z}{R^3} \right] \right\}$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi} \left\{ \frac{y^2 z}{R^5} + \frac{(1-2\nu)}{3} \left[ \frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{R^3(R+z)^2} - \frac{z}{R^3} \right] \right\} \quad (35)$$

$$U_z = \frac{P}{4\pi\mu R} \left[ 2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right]$$

Burada,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ . Ayrıca,  $\sigma_z$  düşey gerilmeyi,  $\sigma_x$  x-ekseni boyunca oluşan normal gerilmeyi,  $\sigma_y$  ise y-ekseni boyunca oluşan normal gerilmeyi,  $U_z$  düşey deplasmanı,  $\nu$  Poisson oranını ve  $\mu$  ise kayma modülünü temsil etmektedir.

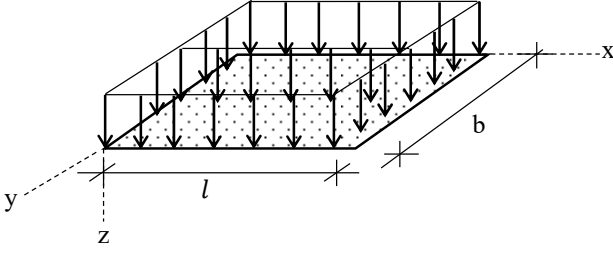
Böylece, Eş. 35'de görülen her bir gerilme ve deplasman ifadeleri, dikkate alınan zemin kütlesi içindeki noktayı tanımlayan mesafeler cinsinden ifade edilebilmektedir.

##### 4.2. Dikdörtgen Düzgün Yayılı Yük Hali

(Uniformly Distributed Rectangular Load Situation)

Bu bölümde Şekil 5'de görüldüğü gibi yükün dikdörtgen bir alan üzerinde düzgün yayılı olduğu kabul edilmektedir. Bu tip yükleme durumunda elastik yarım uzay için gerilme ve

deplasman denklemleri kartezyen koordinatlarda Eş. 36'daki gibi türetilebilir.



**Şekil 5.** Kartezyen koordinatlarda elastik sistem üzerindeki dikdörtgen düzgün yayılı yük  
(Uniformly distributed rectangular load on elastic system in cartesian coordinates)

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{P}{2\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{lb}{zR_3} + \frac{lbz}{R_3} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right] \\ \sigma_x &= \frac{P}{2\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{lb}{zR_3} - \frac{lbz}{R_3^2 R_3} \right] \\ \sigma_y &= \frac{P}{2\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{lb}{zR_3} - \frac{lbz}{R_3^2 R_3} \right] \\ U_z &= \frac{Pb[c(1-\nu)-(1-2\nu)d]}{2\mu}\end{aligned}\quad (36)$$

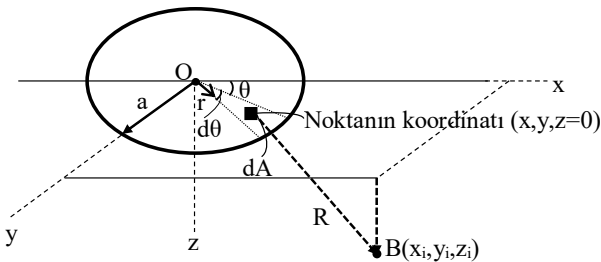
Eş. 36 ifadesinde Eş. 37'de görülen tanımlamalar kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned}R_1 &= \sqrt{l^2 + z^2}; R_2 = \sqrt{b^2 + z^2}; R_3 = \sqrt{l^2 + b^2 + z^2}; \\ d &= \frac{t}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{s}{tu} \right); c = \frac{1}{2\pi} \left[ \text{Log} \left( \frac{u+s}{u-s} \right) + s \text{Log} \left( \frac{u+1}{u-1} \right) \right]; \\ s &= \frac{1}{b}; t = \frac{z}{b}; u = \sqrt{1 + s^2 + t^2}\end{aligned}\quad (37)$$

Böylece, Eş. 37'de görülen her bir gerilme ve deplasman ifadeleri, dikkate alınan zemin kütlesi içindeki noktayı tanımlayan hem derinlik hem de dikdörtgen düzgün yayılı yükün boyutları cinsinden ifade edilebilmektedir.

#### 4.3. Dairesel Düzgün Yayılı Yük Hali (Uniformly Distributed Circular Load Situation)

Bu bölümde Şekil 6'da görüldüğü gibi yükün daireSEL bir alan üzerinde düzgün yayılı olduğu kabul edilmektedir. Bu tip yükleme durumu için elastik yarım uzay için düşey gerilme ifadesi Eş. 38'de verilen Boussinesq denkleminin integre edilmesi ile elde edilebilir.



**Şekil 6.** Dairesel düzgün yayılı yük altındaki herhangi bir nokta (Any point under uniformly distributed circular load)

$$d\sigma_z = \frac{3P}{2\pi z^2} \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2} \right]^{\frac{5}{2}} dA \quad (38)$$

Eş. 38 ifadesine integral işlemi uygulandıktan sonra, küresel koordinatlarda elde edilen gerilme ve deplasman denklemleri Eş. 39'da verilmiştir. Elde edilen gerilme fonksiyonlarının sadece dairesel alanın merkezinden ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) geçen çizgi boyunca geçerli olduğuna dikkat edilmelidir. Eş. 39'da görülen a ifadesi dairesel yükün yarıçapını temsil etmektedir.

$$\begin{aligned}\sigma_z &= P \left[ 1 - \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ \sigma_x = \sigma_y &= \frac{P}{2} \left[ (1 + 2\nu) - \frac{2(1+\nu)z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ U_z &= \frac{P}{2G(1+\nu)} \left[ (2 - 2\nu^2)(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{(1+\nu)z^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + (2\nu^2 + \nu - 1)z \right]\end{aligned}\quad (39)$$

Kartezyen koordinatlarda dairesel düzgün yayılı yük altındaki herhangi bir noktadaki gerilme denklemini türetmek istenirse, Şekil 6 yardımı ile yapılan ve Eş. 40'da verilen tanımlamalar kullanılmalıdır.

$$\begin{aligned}x &= r \cos\theta; y = r \sin\theta; dA = r dr d\theta; ds = r d\theta; \\ dA &= r dr d\theta; Q = PdA; Q = Pdr d\theta; d\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5}; \\ R &= \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z_i^2}; \\ R &= \sqrt{(x_i - r \cos\theta)^2 + (y_i - r \sin\theta)^2 + z_i^2}\end{aligned}\quad (40)$$

Burada, Q eşlenik tekil yükü, dA sonsuz küçük alanı, P düzgün yayılı dairesel yükü, R zemin kütlesi içindeki noktanın mesafesini, r  $\vec{OB}$  doğrultusundaki birim vektör bileşenini,  $\theta$  açısını, d $\theta$  sonsuz küçük açı değişimini ve ds ise sonsuz küçük daire yayını temsil etmektedir.

Eş. 40'da verilen tanımlamalar kullanılırsa Eş. 39'da verilen  $\sigma_z$  ifadesi Eş. 41'de verilen formda elde edilebilir.

$$d\sigma_z = \frac{3Prz^3 dr d\theta}{2\pi [(x_i - r \cos\theta)^2 + (y_i - r \sin\theta)^2 + z_i^2]^{5/2}} \quad (41)$$

Eş. 41 ifadesi için integral sınırları yazılır ve Eş. 42'de verilen tanımlamalar kullanılarak integre edilirse,  $\sigma_z$  ifadesi Eş. 43'de verilen formda elde edilir.

$$R_1 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (42)$$

Eş. 42'de görülen,  $x_i$ ,  $y_i$  ve  $z_i$  zemin kütlesi içindeki iç noktanın koordinatlarını temsil etmektedir.

$$\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \frac{r}{[R_1 - 2r(x_i \cos\theta + y_i \sin\theta) + r^2]^{5/2}} dr d\theta \quad (43)$$

Böylece, düzgün yayılı olarak yüklenmiş dairesel alanın altındaki herhangi bir noktadaki düşey gerilme değerleri, Eş. 43 ifadesi kullanılarak hesaplanabilir.

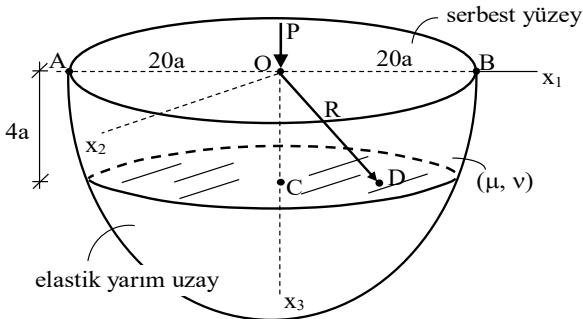


## 5. SAYISAL UYGULAMALAR (NUMERICAL EXAMPLES)

Bu çalışmada, üç boyutlu sabit sınır eleman için önerilen formülasyon kullanılarak, Fortran77 dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Fourier dönüşüm uzayında yapılan formülasyonda, temel çözümlerde yer alan integral denklemlerin çözümü Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile yapılmaktadır. Çalışma kapsamında elastik yarım uzay üzerinde tekil yük, dikdörtgen düzgün yayılı yük ve dairesel düzgün yayılı yük bulunması halinde elastik yarım uzayın iç noktalarındaki gerilme ve deplasman dağılımları elde edilmiştir. Çalışma kapsamında boyutlu ve boyutsuz uzayda ele alınan bu örnekler ile çalışmada önerilen sınır eleman formülasyonunun esnek üstyapılarda elde edilen gerilme ve deplasman dağılımlarının uygunluğu ve doğruluğu literatürde verilen Boussinesq formülleri ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

### 5.1. Elastik Yarım Uzay Üzerinde Tekil Yük Olması Durumu (Concentrated Load on Elastic Half-Space)

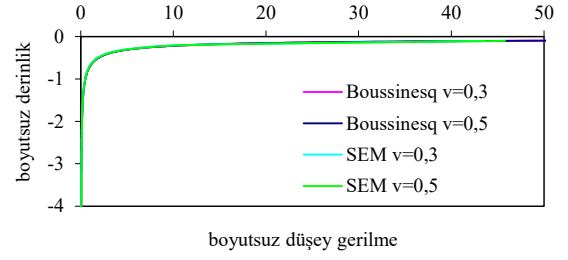
Bu örnekte, Şekil 7’de görülen elastik yarım uzay içinde bulunan C ve D noktalarında oluşan gerilme ve deplasman dağılımlarının belirlenmesi için O noktasına etki eden statik P tekil yükü dikkate alınmıştır. Analizde kullanılan boyutsuz değişkenler, Poisson oranı, boyutsuz kayma modülü, boyutsuz tekil yük, boyutsuz eleman alanı ve boyutsuz gerilme değerleri sırasıyla;  $\nu = 0,3$  veya  $0,5$ ;  $\bar{\mu} = 1$ ,  $\bar{p} = 1$ ,  $A = 8 \times 10^{-4}$  ve  $\bar{t}_i = 1250$  şeklinde kullanılmıştır. Elastik yarım uzay olarak  $r = 20a$  yarıçapında bir dairesel model kullanılmıştır. Modellemede elastik yarım uzayın üst yüzeyi 564 adet düğüm noktasından oluşan 533 adet eşit büyüklükte elemana bölünmüştür. İlave olarak elastik yarım uzay içerisinde  $x_3$  eksenini boyunca 80 adet eşit mesafeli düğüm noktası tanımlanarak C(0,0,4a) ve D(2a,0,4a) noktalarındaki gerilme ve deplasman dağılımları belirlenmiştir. Boyutsuz uzayda yapılan analizde kullanılan boyutsuz değişkenler;  $\bar{\mu} = \mu/\mu = 1$  ;  $\bar{a} = a/a = 1$  ;  $\bar{x}_i = x_i/a$  ;  $\bar{u}_i = u_i/a$  ;  $\bar{t}_i = t_i/\mu$  ;  $\bar{p} = p/\mu = 1$  şeklinde tanımlanmaktadır.



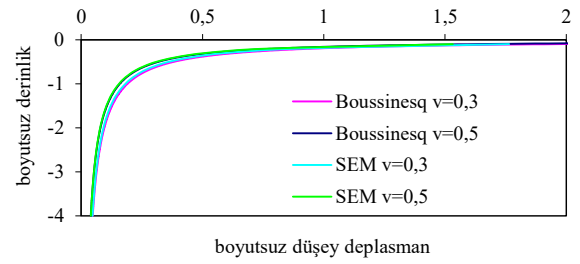
**Şekil 7.** Tekil yük altında elastik yarım uzay  
(Elastic half space under concentrated load)

Elastik yarım uzayın merkez çizgisi üzerinde tanımlanan C(0,0,4a) iç noktası için önerilen sınır eleman formülasyonu ve Boussinesq eşitliklerinden elde edilen sonuçlar Şekil 8-

Şekil 9’da verilmiştir. Şekil 8-Şekil 9 incelendiğinde elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.

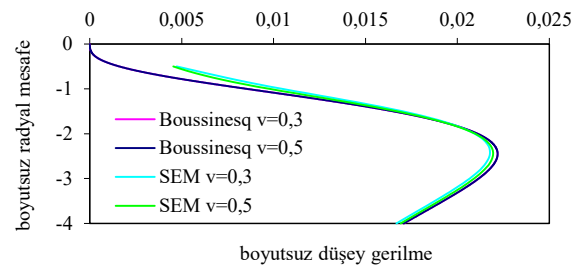


**Şekil 8.** Merkez çizgisindeki düşey gerilmenin derinlik ile değişimi (Variation of vertical stress with depth on centreline)

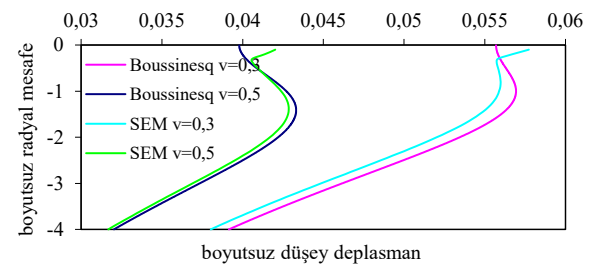


**Şekil 9.** Merkez çizgisindeki düşey deplasmanın derinlik ile değişimi (Variation of vertical displacement with depth on centreline)

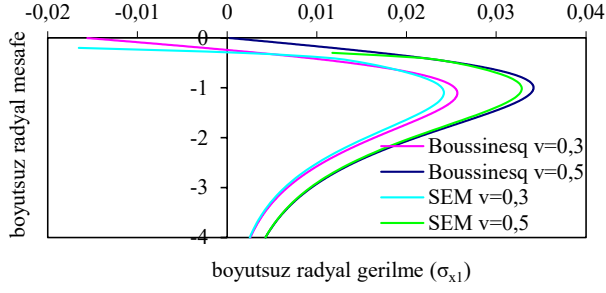
Elastik yarım uzay içerisinde tanımlanan herhangi bir D(2a,0,4a) iç noktası için önerilen sınır eleman formülasyonu ve Boussinesq eşitliklerinden elde edilen sonuçlar Şekil 10-Şekil 12’de verilmiştir. Şekil 10-Şekil 12 incelendiğinde elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



**Şekil 10.** D noktasındaki düşey gerilmenin radyal mesafe ile değişimi (Variation of vertical stress with radial distance at point D)



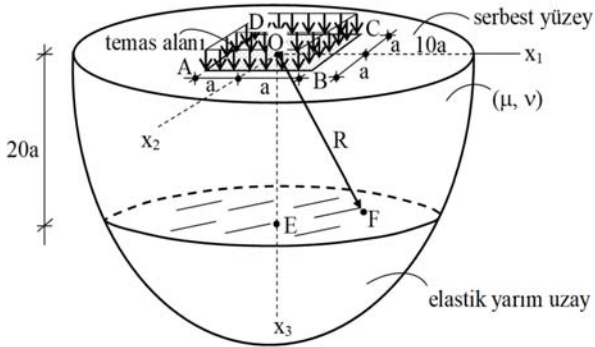
**Şekil 11.** D noktasındaki düşey deplasmanın radyal mesafe ile değişimi  
(Variation of vertical displacement with radial distance at point D)



**Şekil 12.** D noktasındaki ( $\sigma_{x1}$ ) radyal gerilmesinin radyal mesafe ile değişimi  
(Variation of radial stress ( $\sigma_{x1}$ ) with radial distance at point D)

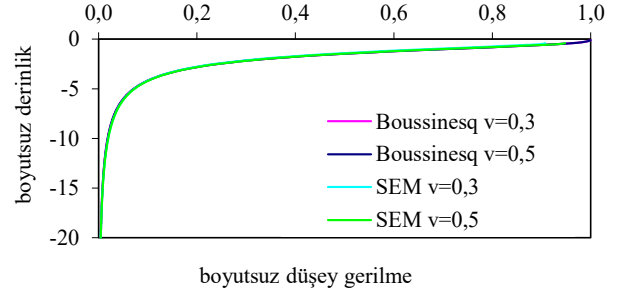
### 5.2. Elastik Yarım Uzay Üzerinde Düzgün Yayılı Dikdörtgen Yük Olması Durumu (Uniformly Distributed Rectangular Load on Elastic Half Space)

Bu örnekte, Şekil 13'de görülen elastik yarım uzay içinde bulunan E ve F noktalarında oluşan gerilme ve deplasman dağılımlarının belirlenmesi için ABCD dikdörtgen alanına etki eden düzgün yayılı statik yük dikkate alınmıştır. Analizde kullanılan boyutsuz değişkenler, Poisson oranı, boyutsuz kayma modülü ve elemanların üzerine etki eden boyutsuz düzgün yayılı yük değerleri sırasıyla;  $\nu = 0,3$  veya  $0,5$ ;  $\bar{\mu} = 1$  ve  $\bar{p} = 1$  şeklinde kullanılmıştır. Elastik yarım uzay olarak  $r = 10a$  yarıçapında bir dairesel model kullanılmıştır. Modellemede elastik yarım uzayın üst yüzeyi 784 adet düğüm noktasından oluşan 729 adet eşit büyüklükte elemana bölünmüştür. İlave olarak elastik yarım uzay içerisinde  $x_3$  eksenini boyunca 50 adet eşit mesafeli düğüm noktası tanımlanarak E(0,0,20a) ve F(a,a,20a) noktalarındaki gerilme ve deplasman dağılımları belirlenmiştir.

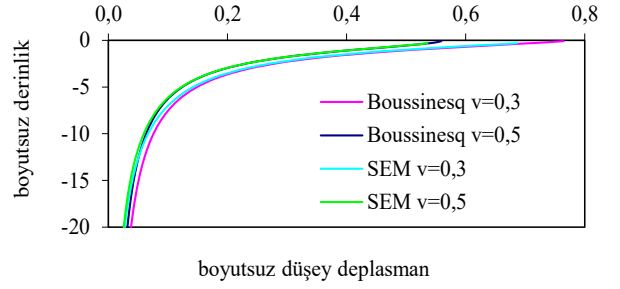


**Şekil 13.** Düzgün yayılı dikdörtgen yük altında elastik yarım uzay (Elastic half space under uniformly distributed rectangular load)

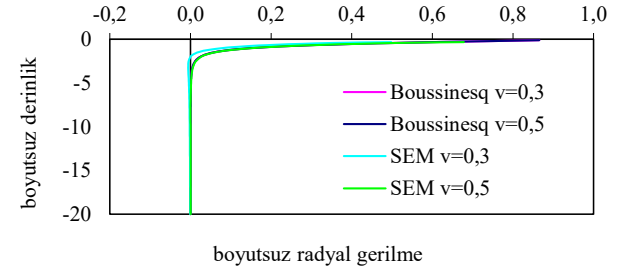
Boyutsuz uzayda yapılan analizde kullanılan boyutsuz değişkenler;  $\bar{\mu} = \mu/\mu = 1$ ;  $\bar{a} = a/a = 1$ ;  $\bar{x}_i = x_i/a$ ;  $\bar{u}_i = u_i/a$ ;  $\bar{t}_i = t_i/\mu$ ;  $\bar{p} = p/\mu = 1$  şeklinde tanımlanmaktadır. Elastik yarım uzayın merkez çizgisi üzerinde tanımlanan E(0,0,20a) iç noktası için önerilen sınır eleman formülasyonu ve Boussinesq eşitliklerinden elde edilen sonuçlar Şekil 14-Şekil 16'da verilmiştir. Şekil 14-Şekil 16 incelendiğinde elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



**Şekil 14.** Merkez çizgisindeki düşey gerilmenin derinlik ile değişimi (Variation of vertical stress with depth on centreline)

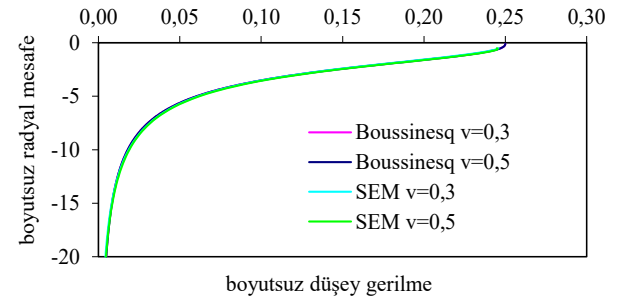


**Şekil 15.** Merkez çizgisindeki düşey deplasmanın derinlik ile değişimi (Variation of vertical displacement with depth on centreline)

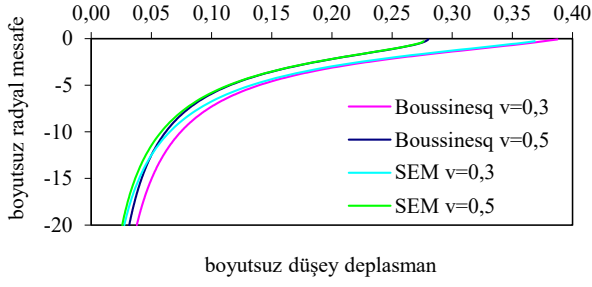


**Şekil 16.** Merkez çizgisindeki radyal gerilmenin derinlik ile değişimi (Variation of radial stress with depth on centreline)

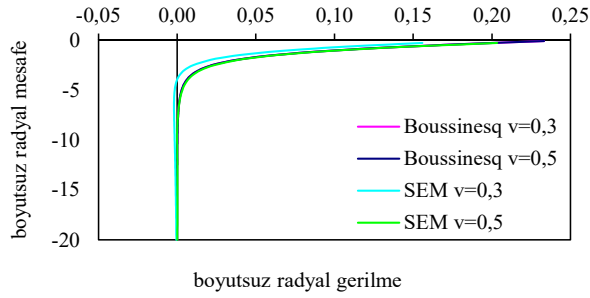
Elastik yarım uzay içerisinde tanımlanan herhangi bir F(a,a,20a) iç noktası için önerilen sınır eleman formülasyonu ve Boussinesq eşitliklerinden elde edilen sonuçlar Şekil 17-Şekil 19'da verilmiştir. Şekil 17-Şekil 19 incelendiğinde elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



**Şekil 17.** F noktasındaki düşey gerilmenin radyal mesafe ile değişimi (Variation of vertical stress with radial distance at point F)



**Şekil 18.** F noktasındaki düşey deplasmanın radyal mesafe ile değişimi  
(Variation of vertical displacement with radial distance at point F)



**Şekil 19.** F noktasındaki radyal gerilmenin radyal mesafe ile değişimi  
(Variation of radial stress with radial distance at point F)

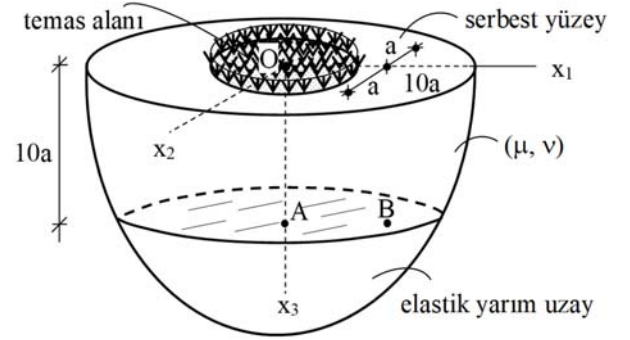
### 5.3. Elastik Yarım Uzay Üzerinde Düzgün Yayılı Dairesel Yük Olması Durumu (Uniformly Distributed Circular Load on Half Space)

Bu örnekte, Şekil 20'de görülen elastik yarım uzay içinde bulunan A, B noktalarında oluşan gerilme ve deplasman dağılımlarının belirlenmesi için dairesel alana etki eden düzgün yayılı statik yük dikkate alınmıştır. Analizde kullanılan boyutlu değişkenler, Poisson oranı, kayma modülü ve elemanların üzerine etki eden düzgün yayılı yük değerleri sırasıyla;  $\nu = 0,3$  veya  $0,5$ ;  $\mu = 98100\text{N/cm}^2$  ve  $p = 49,05\text{N/cm}^2$  şeklinde kullanılmıştır. Elastik yarım uzay olarak seçilen  $r = 10a$  yarıçapındaki dairesel modelde  $a = 10\text{ cm}$  değeri kullanılmıştır. Modellemede elastik yarım uzayın üst yüzeyi 1017 adet düğüm noktasından oluşan 992 adet eşit büyüklükte elemana bölünmüştür. İlave olarak elastik yarım uzay içerisinde  $x_3$  eksenini boyunca 80 adet eşit mesafeli düğüm noktası tanımlanarak A(0,0,10a) ve B(2a,0,10a) noktalarındaki gerilme ve deplasman dağılımları belirlenmiştir.

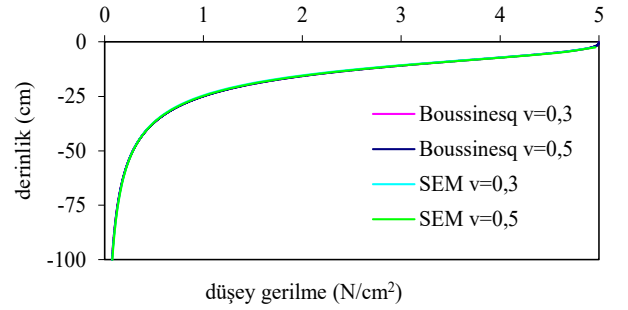
Elastik yarım uzayın merkez çizgisi üzerinde tanımlanan A(0,0,10a) iç noktası için önerilen sınır eleman formülasyonu ve Boussinesq eşitliklerinden elde edilen sonuçlar Şekil 21-Şekil 23'de verilmiştir. Şekil 21-Şekil 23 incelendiğinde elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.

Elastik yarım uzay içerisinde tanımlanan herhangi bir B(2a,0,10a) iç noktası için önerilen sınır eleman formülasyonu ve Boussinesq eşitliklerinden elde edilen sonuçlar Şekil 24-Şekil 27'de verilmiştir. Şekil 24-Şekil 27

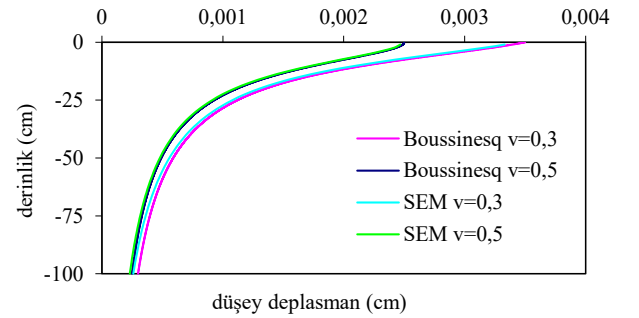
incelendiğinde elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



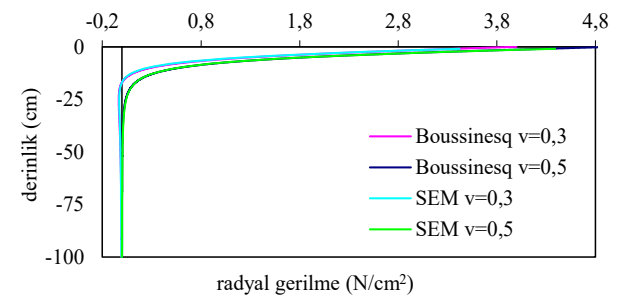
**Şekil 20.** Düzgün yayılı dairesel yük altında elastik yarım uzay  
(Elastic half space under uniformly distributed circular load)



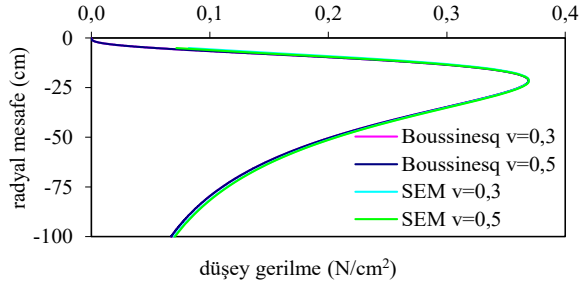
**Şekil 21.** Merkez çizgisindeki düşey gerilmenin derinlik ile değişimi  
(Variation of vertical stress with depth on centreline)



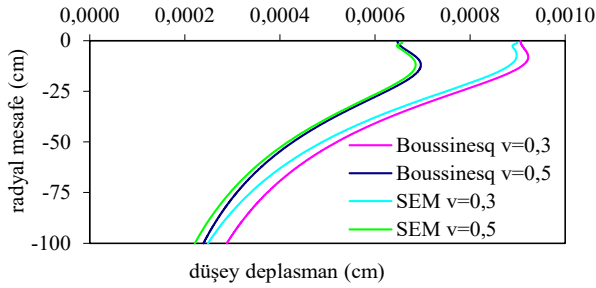
**Şekil 22.** Merkez çizgisindeki düşey deplasmanın derinlik ile değişimi  
(Variation of vertical displacement with depth on centreline)



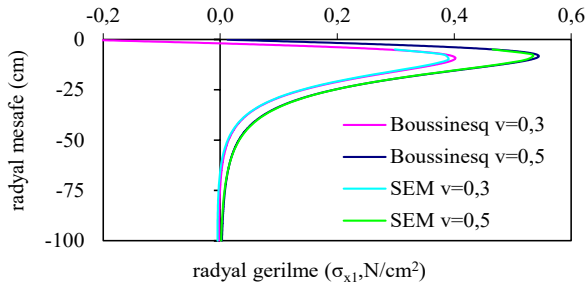
**Şekil 23.** Merkez çizgisindeki radyal gerilmenin derinlik ile değişimi  
(Variation of radial stress with radial distance on centreline)



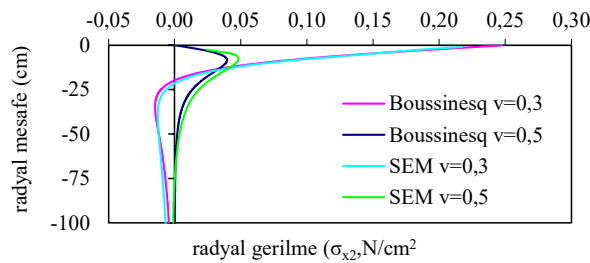
**Şekil 24.** B noktasındaki düşey gerilmenin radyal mesafe ile değişimi (Variation of vertical stress with radial distance at point B)



**Şekil 25.** B noktasındaki düşey deplasmanın radyal mesafe ile değişimi (Variation of vertical displacement with radial distance at point B)



**Şekil 26.** B noktasındaki  $\sigma_{x1}$  radyal gerilmesinin radyal mesafe ile değişimi (Variation of radial stress ( $\sigma_{x1}$ ) with radial distance at point B)



**Şekil 27.** B noktasındaki  $\sigma_{x2}$  radyal gerilmesinin radyal mesafe ile değişimi (Variation of radial stress ( $\sigma_{x2}$ ) with radial distance at point B)

## 6. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Çalışmada, üç boyutlu sabit sınır elemanı formülasyonu Fourier dönüşüm uzayında sunulmuştur. Önerilen sınır

eleman formülasyonunun kullanıldığı genel amaçlı bir bilgisayar programı geliştirilmiş ve esnek üstü yapı tasarımı problemlerine uygulanmıştır. Formülasyonun doğruluğunu göstermek amacı ile, hazırlanan bilgisayar programı farklı yük tipleri etkisi altında ve farklı noktalardaki gerilme ve deplasman dağılımlarının elde edildiği üç adet probleme uygulanmıştır. Çalışma kapsamında esnek üstü yapı modeli olarak kullanılan zemin kütleli homojen, izotropik ve elastik yarım uzay olarak modellenmiştir. SEM formülasyonundan elde edilen sonuçlar literatürde bulunan Boussinesq formüllerinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmalar sonucunda, bu çalışmada önerilen formülasyonun ve hazırlanan bilgisayar programının esnek üstü yapı sisteminin ve esnek üstü yapı tasarımı problemlerinde kullanılabileceği görülmektedir. SEM formülasyonun ayrıca dinamik yük etkisi ve katmanlı esnek üstü yapı sistemleri için de geliştirilebileceği düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Yoder E.J. and Witczak M.W., Principles of Pavement Design, 2nd Ed., JohnWiley&Sons, Toronto-Canada, 1975.
2. Kim S.M., Roesset J.M., Dynamic response of a beam on a frequency-independent damped elastic foundation to moving load, Canadian J. of Civil Eng., 30, 460-467, 2003.
3. Sun L., Analytical dynamic displacement response of rigid pavements to moving concentrated and line loads, Int. J. of Solids and Struct., 43, 4370-4383, 2006.
4. Rahman M.M., Saha S., Hamdi A.S.A., Bin Alam M.J., Development of 3-D finite element models for geo-jute reinforced flexible pavement, Civil Eng. J., 5, 437-446, 2019.
5. Huang Y.H., Pavement design and analysis, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.
6. Hu X., Di Sun L.J., Measuring tire ground pressure distribution of heavy vehicle, J. of Tongji Univ., 33, 1443-1448, 2005.
7. Hernandez J.A., Al-Qadi I.L., Tire-pavement interaction modelling: hyperelastic tire and elastic pavement, Road Materials and Pavement Design, 18, 1067-1083, 2017.
8. Weissman S.L., Influence of tire-pavement contact stress distribution on development of distress mechanisms in pavements, Transp. Res. Rec., 161-167, 1998.
9. Duncan J.M., Monismith C.L., Wilson E.L., Finite element analyses of pavements, Highway Research Board, 38, 18-33, 1968.
10. Nega A., Nikraz H., Evaluation of tire-pavement contact stress distribution of pavement response and some effects on the flexible pavements, Int. Conf. on Highway Pavements and Airfield Technology, Philadelphia, USA, 174-185, 27-30 August, 2017.
11. Djellali A., Houam, A., Saghafi B., Hamdane A., Benghazi Z., Static analysis of flexible pavements over expansive soils, Int. J. Civil Eng., 15, 391-400, 2017.
12. Lee J.H., Kim J.K., Tassoulas J.L., Dynamic analysis of a layered half-space subjected to moving line loads, Soil Dyn. Earthquake Eng., 47, 16-31, 2013.

13. Al-Qadi I.L., Hernandez J.A., Gamez, A., Ziyadi M., Gungor O.E., Kang S., Impact of wide-base tires on pavements: A national study, *Transp. Res. Rec.*, 2672, 186-196, 2018.
14. Khavassefat P., Jelagin D., Birgisson B., A computational framework for viscoelastic analysis of flexible pavements under moving loads, *Mater. and Struct.*, 45, 1655-1671, 2012.
15. Yoo P.J., Al-Qadi I.L., Effect of transient dynamic loading on flexible pavements, *Transp. Res. Rec.*, 129-140, 2007.
16. Jiang X., Zeng C., Gao X., Liu Z., Qiu Y., 3D FEM analysis of flexible base asphalt pavement structure under non-uniform tyre contact pressure, *Int. J. Pavement Eng.*, 8436, 1-13, 2017.
17. Vale C., Influence of vertical load models on flexible pavement response - An investigation, *Int. J. Pavement Eng.*, 9, 247-255, 2008.
18. Zheng L., Hai-lin Y., Wan-ping W., Ping C., Dynamic stress and deformation of a layered road structure under vehicle traffic loads: Experimental measurements and numerical calculations, *Soil Dyn. and Earthquake Eng.*, 39, 100-112, 2012.
19. Beskou N.D., Hatzigeorgiou G.D., Theodorakopoulos D.D., Dynamic inelastic analysis of 3-D flexible pavements under moving vehicles: A unified FEM treatment, *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 90, 420-431, 2016.
20. Castillo D., Gamez A., Al-Qadi I., Homogeneous versus heterogeneous response of a flexible pavement structure: Strain and domain analyses, *J. Eng. Mech.*, 145, 1-11, 2019.
21. Yin H., Solaimanian M., Kumar T., Stoffels S., The effect of loading time on flexible pavement dynamic response: A finite element analysis, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 11, 265-288, 2007.
22. Ju S.H., Finite element investigation of traffic induced vibrations, *J. Sound and Vib.*, 321, 837-853, 2009.
23. François S., Pyl L., Masoumi H.R., Degrande G., The influence of dynamic soil-structure interaction on traffic induced vibrations in buildings, *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 27, 655-674, 2007.
24. Lu J.F., Xu B., Wang J.H., A numerical model for the isolation of moving-load induced vibrations by pile rows embedded in layered porous media, *Int. J. Solids Struct.* 46, 3771-3781, 2009.
25. Deneme I.O., Yerli H.R., Formulation of 2D elastodynamic problems with boundary element method, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 25 (1), 57-64, 2010.
26. Yerli H.R., Deneme I.O., Elastodynamic boundary element formulation employing discontinuous curved elements, *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 28, 480-491, 2008.
27. Banerjee P.K., *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, London, UK, 1994.
28. Brebbia C.A. and Dominguez J., *Boundary Elements an Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1989.
29. Partridge P.W., Brebbia C.A. and Wrobel L.C., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1992.
30. Mengi Y., Tanrikulu A.H. and Tanrikulu, A.K., *Boundary Element Method For Elastic Media: An Introduction*, METU Press, Ankara, Türkiye, 1994.
31. Lombaert G., Degrande G., Experimental validation of a numerical prediction model for free field traffic induced vibrations by in situ experiments, *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 21, 485-497, 2001.
32. Beskou N.D., Theodorakopoulos, D.D., Dynamic effects of moving loads on road pavements: A review, *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 31, 547-567, 2011.
33. Lu Y.J., Wang L.J., Yang Q., Ren J.Y., Analysis of asphalt pavement mechanical behaviour by using a tire-pavement coupling model, *Int. J. Simulation Modelling*, 17, 245-256, 2018.
34. Andersen L., Nielsen S.R.K., Boundary element analysis of the steady-state response of an elastic half-space to a moving force on its surface, *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 27, 23-38, 2003.
35. Sun Z., Kasbergen C., Skarpas A., Anupam K., Van Dalen K.N., Erkens S.M.J.G., Dynamic analysis of layered systems under a moving harmonic rectangular load based on the spectral element method, *Int. J. Solids Struct.*, 181, 45-61, 2019.
36. Tanrikulu A.H., İki malzemeli kompozitin dinamik analizi için yerel olmayan sınır şartlarını içeren bir sınır eleman modeli, *Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana*, 1999.
37. O'Flaherty C.A., *Highways: Highway Engineering v. 2.*, Hodder Arnold, London-UK, 1988.
38. Keskin M.S., Laman M., Baran T., Kuma oturan kare temeller altında oluşan düşey gerilmelerin deneysel tespiti ve sayısal analizi, *İMO Teknik Dergi*, 19, 4521-4538, 2008.
39. Türedi Y., Örnek M., Kare Temeller Altında Gerilme ve Taşıma Gücü Analizi, *Çukurova Univ. J. of the Faculty of Eng. and Arch.*, 31, 59-66, 2016.

