

ÖĞRENCİLERİN FONKSİYONLARDA İŞLEMLER KONUSUNA GRAFİKLER ÜZERİNDEN YAKLAŞIMLARININ İNCELENMESİ

İlyas YAVUZ*

İbrahim KEPCEOĞLU**

ÖZET

Öğrencilerin fonksiyonlarda işlemler konusuna grafikler üzerinden yaklaşımlarını incelemek amacıyla yapılan bu çalışma özel durum niteliği taşımaktadır. Öğrencilerin daha önceden karşılaşmadıkları ve dolayısıyla didaktik anlaşmasına uygun olmayan sorulara verdikleri cevaplar çoklu temsiller ve didaktik anlaşması kavramları yardımıyla analiz edilmiş ve öğrencilerin grafik okuma ve oluşturma becerileri ile ilgili çeşitli kestirimlerde bulunulmuştur. 65 lise son sınıf öğrencisinin çalışma grubunu oluşturduğu çalışma 2010-2011 öğretim yılında İstanbul'da üç farklı lisede uygulanmıştır. Verilerin analizinden elde edilen en önemli sonuç, cebirsel işlemleri yapmada çok iyi durumda olan öğrencilerin aynı başarıyı grafiklerle ilgili işlemlerde gösteremedikleri görülmüştür. Ayrıca kavramsal anlamının yetersizliği nedeniyle birçok öğrenci grafiklere fonksiyon kavramından bağımsız bir yaklaşımda bulunarak soruyu yanıtlamaya çalışmıştır.

Anahtar Sözcükler: Fonksiyon, fonksiyonlarda işlemler, grafik, çoklu temsiller, didaktik anlaşması.

INVESTIGATION OF STUDENTS' APPROACHES TOWARDS OPERATIONS ON FUNCTIONS VIA THEIR GRAPHIC REPRESENTATION

ABSTRACT

Designed as a case study, in this study, it is aimed to investigate students' approaches towards operations on functions via the graphic representation of the functions. Students' answers to the questions that they have never met and that are not convenient to the didactic contract are analyzed in terms of multiple representation and didactic contract concepts. Furthermore, several estimations on students' skills about reading and drawing graphics have been made. The sampling of this study consists of 65 last grade high school students from 3 different high schools in Istanbul. The most important result gathered from the analysis of data is that the success of students is not as well at operations on graphics as at algebraic operations. Besides, most of

* Dr., Marmara Üniversitesi, Eğitim Fakültesi.

** Araştırma Görevlisi, Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi.

students tried to answer the questions independently of function concept because of lack of conceptual understanding.

Keywords: functions, operation on functions, graphical representation, multiple representations, didactic contract

1.GİRİŞ

Matematik eğitimi araştırmalarında amaç, bilgiyi kullanıp yorumlayabilen, problem çözüme ve muhakeme etme becerisine sahip bireylerin yetişmesini sağlamaktır. Bu bağlamda matematiksel ifadelerin açıklanması ve anlaşılmasında önemli bir yere sahip olan fonksiyon kavramı, ortaöğretim matematik programının da en temel öğelerinden biridir. Birçok ülkede ortaöğretim programları fonksiyon konusu ile başlar, diğer konular fonksiyon konusunun teorik çerçevesine uygun olarak işlenir (Bloch, 2003). Yapılandırmacı yaklaşım doğrultusunda yeniden düzenlenen ortaöğretim matematik programında fonksiyon kavramı diğer bilim dalları ile ilişkilendirilmiş, farklı kullanım ve uygulama alanlarına örnekler verilmiştir (MEB, 2005). Fonksiyon kavramının, matematikte önemli bir birleştirici rolü vardır ve disiplinler arası etkiye sahiptir. Temel mantığı girdi-çıkı sistemi üzerine kurulsa da; en az girdiler ve çıktılar kadar önemli olan bir diğer bileşen gerçekleşen işlem sürecidir. Tanım ve değer kümesi arasındaki ilişkiyi sağlama sürecinde fonksiyon kavramı, özel bir eşleme bağıntısı özelliğini taşır. Bu bazen sayı ikililerini tek bir sayıya eşleyen işlem, bazen de farklı gösterimler arasındaki dönüşümün sağlandığı durumlar şeklinde gerçekleşir.

Fonksiyon kavramı cebirsel gösterimler ile daha çok ilişkilmiş gibi görülse de bu kavramın özellikle günlük hayat uygulamalarındaki işlevselliğini sağlayan en önemli gösterimlerden biri grafiklerdir. Fonksiyonlar grafiklerle resmedilerek görsel olarak algılanıp yorumlanabilir. Grafikler nicel bilgilerin kolay anlaşılması ve yapılandırılmasını sağlayan oldukça yaygın bir gösterim biçimi olarak belirtilmektedir (Bloch, 2000). Cebirsel ifadelerde gizli kalan ve öğrencilerin görmekte zorlanabileceği eşleme ve dönüştürmeler grafikler vasıtasıyla çok daha açık ve anlaşılır bir şekilde öğrencilerin dikkatlerine sunulabilir.

Fonksiyon kavramının tarihi gelişimi incelendiğinde grafik kullanımını ile ilgili çalışmaların önemli bir yeri olduğu ve birçok analiz kavramının grafiklerden yola çıkılarak oluşturulduğu görülmektedir. Jean Bernoulli tarafından ortaya atılan ilk fonksiyon tanımının da böyle bir kontekste geliştiği bilinmektedir (Nadia, 2004). Bununla birlikte öğrenciler çoğu zaman grafiği anlamlandırmanın zorluğunu yaşayabilmekte, hatta grafiği iki değişken arasındaki ilişkiyi ifade eden bir objeden ziyade geometrik bir obje ya da bir etiket (doğru, parabol, vb.) gibi algılamaktadırlar. Dolayısıyla öğrenciler grafiğin temsil ettiği fonksiyonun özelliklerini görmek yerine bir

resim olarak görüp, resimle ilgili özelliklere odaklanabilmektedirler (Yavuz, 2010).

Milli Eğitim Bakanlığı tarafından açıklanan yeni ortaöğretim programı da öğrencilerin iletişim sürecinde grafikleri matematiksel düşüncelerini ifade edebilmeleri için kullanmalarını önermektedir. Buna ek olarak, grafiklerin kullanıldığı bir görselleştirme sürecinde, öğrencilerin matematiksel kavramlar hakkında daha etkin biçimde düşünebileceklerini belirtmektedir (MEB, 2005).

Öğrencilerin grafiği daha etkili bir şekilde yorumlamayı öğrenebilmesi için üç önemli faktör olduğu vurgulanmaktadır. Bunlar; grafiğin görsel karakteristiği, öğrenenin grafik yorumlama becerisi ve grafikteki veri içeriği hakkındaki bilgi ve beklentisi şeklindedir (Lacasta, 1995). Bazı durumlarda grafiğin anlaşılması oldukça zor bir hal alır. Birden fazla değişkeni tek bir gösterimde içermesi, değişkenler arasında karşılaştırma fırsatı doğurması eğitim ve araştırmacılar için bulunmaz bir kaynak olmasının yanında öğrenciler için ön yargı oluşturabilecek bir nitelik sergilemektedir. Tüm bu veriler ışığında, bu çalışmada öğrencilerin fonksiyonlarda işlemlerde grafiği kullanma ve yorumlama becerileri çoklu temsiller ve didaktik antlaşması üzerinden ele alınmıştır. Öğrencilerin sınıflarda ve ders kitaplarında pek fazla karşılaşmadıkları ve dolayısıyla didaktik antlaşmasına uygun olmayan bir soruya verdikleri cevaplar analiz edilmiş, bu cevaplar üzerinden öğrencilerin grafiği fonksiyonel anlamda okuma ve yorumlama becerileri ile ilgili çeşitli kestirimlerde bulunulmuştur.

1.1. Çoklu Temsiller

Temsil kelimesi genel anlamda soyut kavram veya sembolleri, gerçek dünya içinde somut şeyler olarak modelleme işlemi olarak tanımlanabileceği gibi matematikte, nesnelere ya da semboller arasındaki ilişkinin tanımı anlamına gelmektedir (Kaput,1989). Çalışmalar çok farklı temsil türlerinin olduğuna dikkat çekmektedir. Bunlar arasında en sık karşılaşılanlar ise; nümerik, grafik ve cebirsel temsil (Kaput,1989), ikonik-sembolik temsil (Brenner ve diğerleri, 1997), sözel-doğal dil temsili, diyagramlar yazılı semboller, somut materyaller (Lesh ve Doerr, 2003) vb. dir. Son yıllarda mevcut teknolojilerin kullanımıyla matematik eğitiminde çoklu temsil yaklaşımı önemli avantajlar sunmaktadır. Keller ve Hirsch (1998) çoklu temsillerin birer avantaj olduğunu çünkü öğrencilerin çözümlere farklı yollardan yaklaşmasını sağladığını ve 'temsillerin bilişsel ilişki kurması sayesinde' kavramın anlaşılmasını kolaylaştırdığını belirtmiştir. Temsiller üzerinden ele alınan temel konulardan biri fonksiyon kavramıdır. Bir fonksiyonun grafik temsili, o fonksiyonun geometrik görünüşü hakkında bilgi verebileceği gibi, fonksiyona ait verilerin kolayca

kullanılabilmesine de olanak sağlamaktadır. Fonksiyon grafikleri ile ilgili çok çeşitli araştırmalar bulunmakta, bu araştırmaların büyük çoğunluğu fonksiyon grafik bilgisi ve yorumlama becerisinin geliştirilmesi gerektiğini vurgulamaktadır (Shah ve Hoeffner, 2002; Capraro, Kulm ve Capraro, 2005).

1.2. Didaktik Antlaşması

G.Brousseau (1994, 1998)“didaktik antlaşması”nın tanımını, öğretmen, öğrenci ve bilgi temelleri üzerinde şu şekilde ifade etmektedir: “Öğretmenin öğrenciden ve öğrencinin öğretmeninden beklediği davranışlar topluluğu. Bu davranışların çok az bir kısmı açık bir şekilde ifade edilir, birçok davranış ise kapalı bir şekildedir”. Bu ifade, sözleşme gibi işleyen ve öğretmen-öğrenci-bilgi arasındaki üç yönlü etkileşimi düzenleyen gizli normların bulunduğunu dile getirmektedir. Bu antlaşmanın büyük bir kısmı, öğretmen ve öğrencinin konuyla uğraşmak için bir araya geldiği ilk anda oluşmaktadır. Öğretmen ve öğrenci arasında karşılıklı bir zorunluluk vardır: öğretmen öğrenciye matematik öğretmelidir, öğrenci de öğretmenin yardımıyla matematik öğrenmelidir. Brousseau (1998), böyle bir sözleşmenin belirli ifade şekillerinin kullanılırken aynı zamanda sürekli gözden geçirildiğini de var sayar. Didaktik antlaşmasının bu şekilde gözden geçirilmesi, öğretmen ve öğrenciye beraber çalışma fırsatı verir aynı zamanda kendilerine düşen çalışmalarını yaparken, sorumluluklarını da yerine getirme imkânı sağlar.

Satranç, dama vb. gibi alışılmış oyunlarda, oyunun başlangıcında oyunun kuralları belirlidir. Didaktik antlaşmasının kuralları ise açık değildir. Örneğin dersin başında öğretmen ve öğrenciler uyulması gerekli kurallar listesi hazırlamaz. Ancak hem öğretmen hem de öğrenciler bilirler ki açık olarak ifade edilmiş olmasa da kurallar vardır ve uyulmak zorundadır. Kuralın varlığı bu kuralı bozan bir davranışın sergilenmesiyle ortaya çıkar. Bu kurallar sınıftan sınıfa, kültürden kültüre değişebileceği gibi, aynı sınıfta öğrenciler ve öğretmen aynı olsa bile zaman içinde değişebilir. Pek çok kuralın değişken olması yanında sınıftan ve kültürden bağımsız olarak değişmeyen kurallar da vardır. Örneğin öğretmenden sınıfta öğretme sürecinde çeşitli etkinliklerde bulunması, öğrencilerden de bu etkinliklere katılmaları beklenir. Eğer öğretmen sınıfta kendisinden beklenen öğretme davranışlarını sergilemezse örneğin sınıfta ders anlatmayı bırakıp müzik dinlerse ya da gazete okursa, didaktik antlaşmasının dışına çıkmış olur. Büyük ihtimalle öğrenciler ailelerine, ailelerde okul yönetimine öğretmeni şikâyet ederler. Eğer didaktik antlaşmasını bozan davranışın sahibi bir öğrenci ise, bu durumda da öğretmen tarafından uyarılır ya da cezalandırılır.

Didaktik anlaşması öğrencilerin başarısızlıklarının altında yatan nedenlerin sadece çevresel faktörlerden, zekâ seviyesinden ya da kuralsal anlamalardan kaynaklanmadığını öngörmekte ve yeni bir etkileşimsel perspektif sunmaktadır. Bu perspektif bağlamında başarı ya da başarısızlık, eğitim ortamında etkileşimler aracılığıyla oluşur. Didaktik anlaşması birçok değişkene bağlıdır. Bunlardan en önemlisi uygulanan öğretim yöntemidir. Pedagojik seçimler, öğrencilerden istenilen çalışma stili, formasyonun amaçları, öğretmenin epistemolojisi, değerlendirmenin özellikleri vb. tüm bileşenler bu öğretim yöntemi kapsamındadır. Özellikle bilinen bir anlaşma değiştirildiğinde veya bir üst aşamaya geçildiğinde didaktik anlaşmasının etkisi ortaya çıkmaktadır. Brousseau (1998), öğrenci zorluklarının büyük bir kısmının bu etkilerle açıklanabileceğini belirtmektedir. Örneğin, öğrenciler, ilköğretimin başlangıcında geometrik şekillerle somut olarak karşılaşır. Daha sonra soyut ve zihinsel olarak geometrik şekilleri inceleme dönemine girerler. “Verilen AB ve CD doğru parçalarının uzunlukları eşit midir?” sorusuna başlangıçta ölçerek, karşılaştırarak, görselliklerden yararlanarak vb. teknikler kullanılırken daha sonra öğrencilerden bazı teori ve çıkarımlar yardımıyla bu soruya cevap vermeleri istenmektedir. Dolayısıyla aynı soruyla ilgili beklentiler zamanla değişebilmekte ve didaktik anlaşması bir üst aşamaya geçmektedir.

Fonksiyonlarda işlemler konusunun sınıflarda işlenişi ile ilgili didaktiksel anlaşma maddeleri ile ilgili olarak; öğretim programları incelenmiş, öğretmenlerle informal olarak görüşülmüş, ders kitapları incelenmiş ve kendi mesleki tecrübelerimiz yardımıyla aşağıdaki durumlar tespit edilmiştir:

Fonksiyonlarda işlemler daima cebirsel temsil üzerinden yapılmaktadır.

İki fonksiyonun toplamının ya da çarpımının grafiği isteniyorsa öncelikle fonksiyonun formülü bulunmalıdır; formül yardımıyla istenilen grafik çizilmektedir.

Uygulanan ankette kullanılan soru bu maddelere uygun olmayan bir soru olup, öğrencilerin daha önceden karşılaşmadıkları bir sorudur ve dolayısıyla didaktik anlaşmasına uygun değildir. Katılımcılara yöneltilen bu soruda direkt olarak verilen iki grafik yardımı ile ilgili fonksiyonların toplamının ya da çarpımının grafiği istenmektedir.

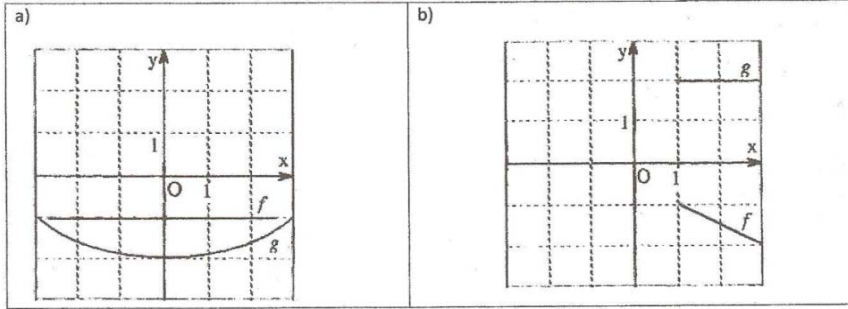
2. YÖNTEM

Bu araştırma, lise son sınıf öğrencilerinin fonksiyonlarda işlemlere grafikler üzerinden yaklaşımlarını tespit etmek amacıyla yapılmış nitel bir çalışmadır. Araştırmaya, 2010-2011 eğitim-öğretim yılında, İstanbul’da üç farklı lisede bulunan toplam 65 son sınıf öğrencisi katılmıştır. Bu

öğrenciler, ilköğretim ve buldukları liselerde fonksiyon ve özellikleri ile ilgili tüm kavramlarla daha önceden karşılaşmışlardır. Dolayısıyla fonksiyon ve fonksiyonlarda işlemlerle ilgili yeterince deneyime sahip oldukları ve bu durum verecekleri cevapların araştırma probleminin açıklanmasına önemli katkılar sağlayacağı şeklinde yorumlanmıştır.

Araştırma kapsamında katılımcılara 5 sorudan oluşan bir anket uygulanmıştır. Bu soruların hepsi fonksiyonlarda grafik kullanımı ile ilgili olup, katılımcıların bir grafiği okuma ve oluşturma becerilerini ölçmek amacıyla hazırlanmıştır. Sorulardan sadece bir tanesi doğrudan fonksiyonlarda işlemlerle ilgili olduğundan bu makalede söz konusu soruya verilen cevapların analizinden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Bahsedilen soru aşağıdadır.

5. Aşağıda grafikleri verilen f ve g fonksiyonları yardımı ile; a) şıkında $f+g$ fonksiyonunun, b) şıkında ise $f.g$ (f çarpı g) fonksiyonunun grafiklerini aynı koordinat düzlemleri üzerine çiziniz. Yönteminizi kısaca açıklayınız.



Öğretmen adaylarının yukarıda ifade edilen soruya verdikleri cevaplar içerik analizi yoluyla çözümlenmiştir. Her bir öğretmen adayının verdiği cevap incelenmiş, araştırma sorusu kapsamında ana temalar belirlenmiş ve sürekli diğer cevaplarla karşılaştırılarak ortak kategorilerin oluşturulması yoluna gidilmiştir (Miles ve Huberman, 1994; Yıldırım ve Şimşek, 2005). Belirlenen bu kategoriler tekrarlanma sıklığı göz önünde bulundurularak tablo haline getirilmiştir. Yapılan çalışmanın güvenilirliğini arttırmak için tespit edilen kategoriler araştırmacının dışında aynı üniversitede görev yapan eğitim doktorasına sahip nitel araştırma konusunda deneyimli iki çalışma arkadaşı tarafından ayrı ayrı incelenmiş; daha sonra bir araya gelinerek verilerle saptanan ortak temalar arasında ortaya çıkan anlaşmazlıklar giderilmiştir. Bu şekilde oluşturulan kategoriler üzerinde tam bir mutabakat sağlanmıştır (Lincoln ve Guba, 1985; Yıldırım ve Şimşek, 2005).

3. BULGULAR

Daha önceden de söylendiği gibi ders kitaplarında ve sınıf içi faaliyetlerde fonksiyonlarda işlemler şu şekilde yapılmaktadır; İşlem yapılması istenen fonksiyonlar cebirsel olarak verilir. Sonra hangi işlem isteniyorsa o işlem cebirsel ifadeler üzerine uygulanır, daha sonra da istenirse işlem sonucu elde edilen fonksiyonun grafiğinin çizimi yapılır. Ancak anketteki bu soruda fonksiyonların cebirsel ifadesi verilmemiştir. Öğrenci isterse b şıkında fonksiyonların cebirsel ifadesini bulabilir. Ondan sonra da istenen grafiği çizer. Ancak bu yöntem a şıkında engellenmiştir çünkü fonksiyonlardan birisi doğrusal olmayan bir fonksiyon olarak seçilmiştir. Dolayısıyla burada amacımız her zaman alışık olduğu cebirsel temsil dışında da öğrencilerin fonksiyonlarda işlemleri yapma becerisini ölçmektir.

Sorulansorunun öğrenciler için yeni ve farklı olmasından dolayı birçok öğrenci (12 öğrenci) soruyu cevaplamaktan kaçınmıştır. Ayrıca açık bir şekilde böyle bir soruyla ilk defa karşılaştığını, dolayısıyla cevap veremeyeceğini dile getiren öğrenciler de vardır (4 öğrenci). Örneğin bir öğrenci “f+g’yi işlemsel olarak toplayabiliyorum. Fakat bunları koordinat düzlemine nasıl geçireceğimi bilmiyorum. Yani f+g’nin grafiğini çizerken ne gibi kurallara uymalıyım” şeklinde cevap vermiştir. Bu öğrenci aslında bu tür sorularda öğrencilerin karşılaştığı sorunları burada genel anlamda dile getirmektedir. İşlemsel olarak yani formülleri toplayabildiğini ancak grafikleri toplamak için bir yöntem bilmediğini ifade etmektedir. Bu durum bize aslında eğitim sistemimizde sorulara kavramsal olarak yaklaşımdan ziyade çözüm tekniklerinin ön planda tutulduğunu göstermektedir. Öğrenci, her karşılaştığı yeni soru tipi için hemen bir çözüm yöntemi beklentisi içine girmektedir.

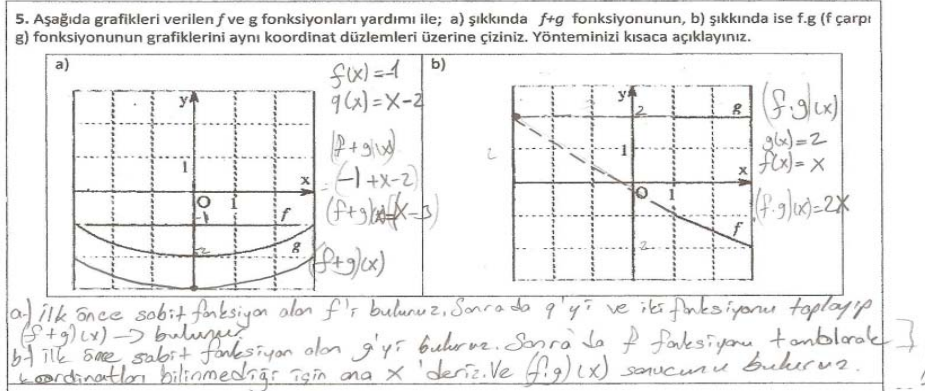
Bunun yanında hiçbir öğrenci, örneğin sorunun b şıkkı için: “bu iki fonksiyondan birisi sabit, diğeri doğrusal bir fonksiyondur, dolayısıyla çarpımları da doğrusal olur. Doğrusal fonksiyonu çizmek için iki noktaya ihtiyacım var. O halde grafikler üzerinde iki nokta tespit ederim, daha sonra bu iki noktanın y ordinatlarını çarpırım ve bu şekilde istenilen grafiğin iki noktasını tespit etmiş olurum” şeklinde bir yorum yapamamış ya da bu yorum doğrultusunda bir yöntem geliştirememiştir. Hâlbuki öğrenciler fonksiyon kavramıyla karşılaşmadan önce doğru denklemleri ve çizimleri üzerinde durulmaktadır (ilköğretim 8. sınıfta). Buradan öğrencilerin farklı üniteleri birbirleriyle ilişkili olarak görmekten ziyade birbirinden bağımsız olarak bir yaklaşım sergiledikleri söylenebilir.

Cevap veren öğrencilerin kullandığı çözüm yöntemleri incelendiğinde iki temel kategori ortaya çıkmaktadır;

Doğru cevaba götüren stratejiler

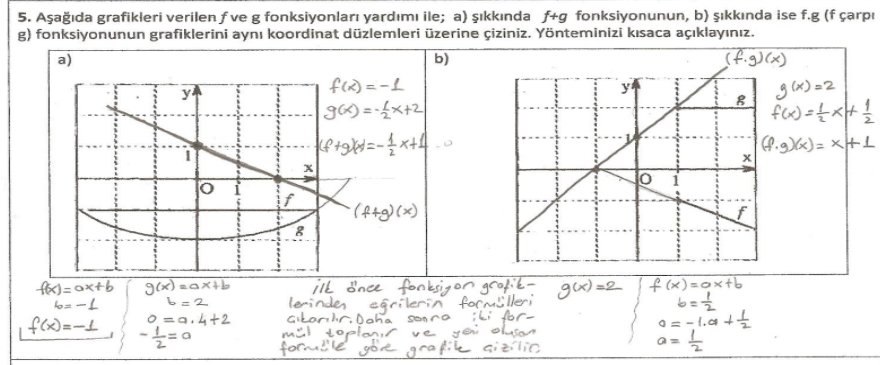
3.1.1. Önce fonksiyonların formülünü bulup daha sonra grafiği çizmek

Bu gruptaki öğrenciler istenilen grafiği çizebilmek için öncelikle fonksiyonun formülünü bulmaya çalışmaktadır. Zaten bu soruda araştırmacılar olarak hipotezimiz öğrencilerin öncelikle bu yöntemi denemesidir. Çünkü öğrencilerin sınıflarda en çok uyguladığı yöntem bu yöntemdir. 17 öğrenci (% 26) bu yöntemi kullanmaya çalışmaktadır ve en fazla öğrenci bu grupta olduğundan hipotezimiz doğrulanmıştır. Ancak öğrenciler grafiklerden fonksiyonların cebirsel ifadelerine geçişte ciddi sıkıntılar yaşamaktadırlar. Literatürde de ifade edildiği gibi öğrenciler cebirsel ifadeden grafiğe geçişi zorlanmadan yapmalarına rağmen bunun tersinde aynı başarıyı gösterememektedirler (Kieran, 1992). Bu öğrencilerin cebirsel işlemler yaparken genellikle hata yapmadığı görülmekte ancak çözümlerinde kavramsal bir yaklaşım sergileyememektedir. Bu yöntemi kullanmaya çalışan bir öğrencinin cevabı aşağıda sunulmuştur.



Bu öğrenci daha önceden sınıflarında uygulanan yöntemi güzel bir şekilde ifade etmiş ve uygulamaya çalışmıştır. Ancak sabit fonksiyonlar dışındaki fonksiyonların cebirsel ifadelerini yanlış bulsa da a) şıkkında istenilen grafiği doğru bir şekilde çizebilmiştir. b) şıkkında ise bulduğu cebirsel ifadeleri kullanarak istenilen çarpım fonksiyonunun cebirsel ifadesine ulaşmış ancak grafiği çizememiştir. Bu öğrencinin işlemsel olarak bilgisinin olduğu fakat kavramsal olarak yorum yapmaktan uzak olduğu ve özellikle temsiller arasındaki geçişlerde önemli sıkıntılarının olduğu görülmektedir. Ayrıca b) şıkkında verilen fonksiyonların tanım kümesi üzerinde oynamalar yapması, daha önceden karşılaştığı grafiklerin genellikle tüm reel sayılarda tanımlı olduğunu göstermektedir.

Bu grupta bulunan başka bir öğrencinin cevabı ise aşağıdadır:



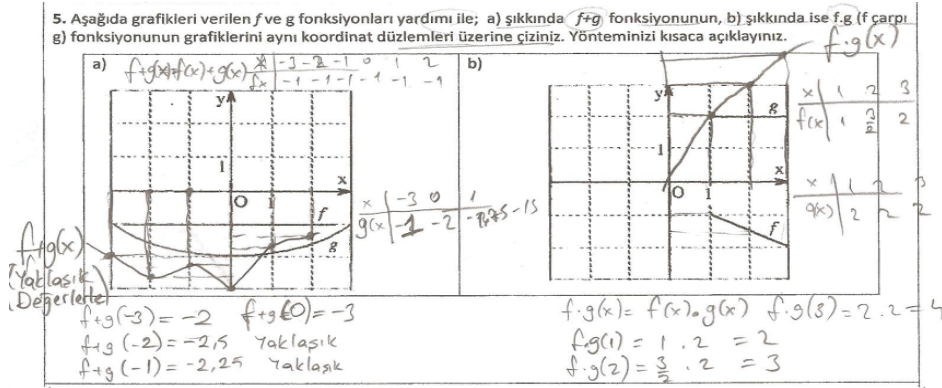
Bu öğrenci de aynı şekilde öncelikle grafikleri verilen fonksiyonların cebirsel ifadelerine ulaşmaya çalışmakta, daha sonra da işlem yaparak grafikleri çizmeyi denemektedir. Ancak sabit olmayan tüm fonksiyonları doğrusal olarak kabul etmektedir. Bu durum, daha önceden karşılaştığı fonksiyonların çoğunlukla doğrusal olduğunu ve dolayısıyla fonksiyon denilince ilk akla gelenin doğrusal fonksiyonlar olduğunu göstermektedir. Yapmış olduğu bu hata dışında ifade etmiş olduğu yöntemi başarıyla uygulamış ve hatta doğrusal fonksiyonları çizme tekniğini de (sadece iki noktayı tespit etmek ve bu iki noktayı birleştiren doğruyu çizmek) başarıyla uygulamıştır. Bir önceki öğrenci gibi bu öğrenci de işlemsel olarak yeterince başarılı ancak temsiller arası geçişlerde sıkıntılar yaşamaktadır.

Bu kategorideki öğrencilerin soruyu çözmek için düşündükleri stratejilerin ortak özelliği fonksiyonların x 'e bağlı olan cebirsel gösterimlerini elde etmeye çalışmalarıdır. Bu strateji öğrencilerin lise öğreniminde fonksiyonlarda işlem yaparken kullandıkları stratejilerdir. Öğrenciler iki fonksiyon arasında bir işlemin yapılabilmesi için onun "kuralının" verilmiş olması gerektiği düşüncesine sahiptirler. Bu "kurala" ulaşmak isteyen yukarıdaki öğrencilerin yanıtları incelendiğinde, ortak yapılan hatalardan birinin a şıkında verilen iki veya daha yüksek mertebeli g polinom fonksiyonunu doğrusal bir fonksiyonmuş gibi düşünülmesidir. Diğer bir hata ise b şıkındaki doğrusal olan f fonksiyonunun cebirsel ifadesinin bulunmasında yapılan işlem hatalarıdır.

3.1.2. Nümerik temsil (tablo oluşturma, noktalar belirleme, vb.) yardımıyla grafikçizmek,

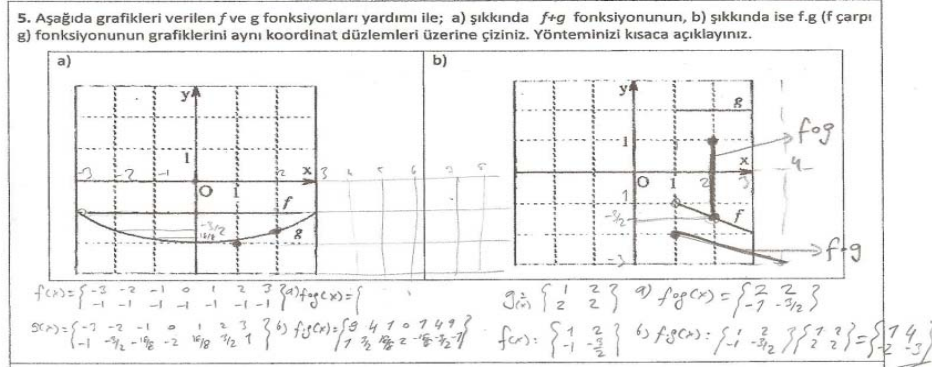
Bu yöntemde öğrenci verilen fonksiyonların bazı noktalarından yararlanarak istenilen grafikleri çizmeye çalışmaktadır. Ancak noktaların seçimi öğrenciden öğrenciye farklılık göstermektedir. Bazı öğrenciler tanım kümesinde bulunan tüm tam sayı değerlerine karşılık gelen noktaları tespit etmeyi tercih ederken bazıları da sadece net olarak okunabilen noktaları

kullanmayı tercih etmiştir. Tespit edilen noktalar öğrenciler tarafından genellikle tablo formatında verilmiştir. Bu grupta 8 öğrenci (% 12) bulunmaktadır. Bu öğrencilerden birçoğu koordinat bilgisi eksikliğinden ya da işlemsel bazı hatalardan dolayı istenilen grafikleri doğru bir şekilde çizememiştir. Bu kategoride bulunan bir öğrencinin cevabı aşağıdadır:

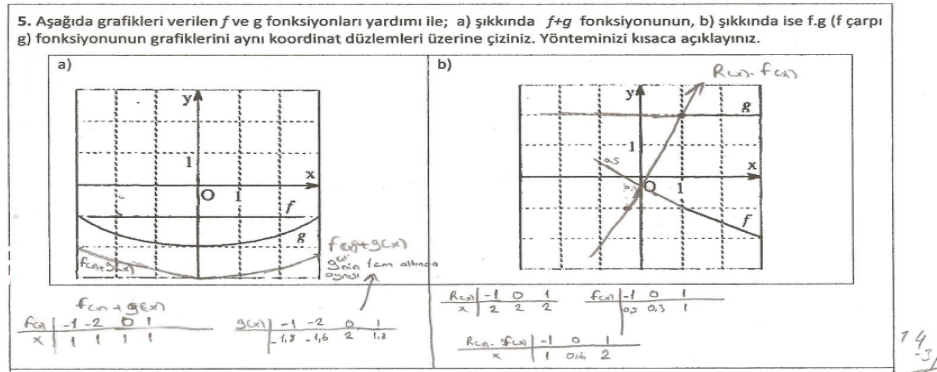


Bu öğrenci fonksiyonların tanım aralığındaki tüm tam sayı değerlerinden oluşan tablolar oluşturmuş ancak koordinat eksenleri bilgisindeki eksikliklerden dolayı bazı değerlerin görüntüsünü yanlış bulmuştur. Ayrıca bazı işlemsel hatalar nedeniyle de istenilen grafikleri doğru bir şekilde çizememiştir. Aslında fonksiyonlarda işlemleri doğru bir şekilde uygulamaya çalışmış ancak bunu yaparken zihinsel olarak cevabının doğruluğunu kontrol edecek başka bir temsil kullanamamıştır. Çünkü her iki durumda da verilen fonksiyonlardan birisi sabit fonksiyondur ve istenilen grafik, diğer fonksiyona sabit değerlerin toplanması veya çarpılması ile oluşturulacaktır.

Bu kategorideki diğer bir öğrenci grubu da istenilen fonksiyonun grafiğini oluşturmak için verilen grafiklerden noktalar belirleyip bu noktaların hem x bileşenlerini hem de y bileşenlerini toplayarak/çarparak oluşturmuş olduğu noktayı istenilen grafiğin bir noktası olarak kabul etmiştir. Bu şekilde oluşturmuş olduğu noktaları birleştirerek istenilen grafiği çizmeyi denemiştir. Fonksiyonlarda toplama/çarpma ile ilgili olarak hiçbir kavramsal bilgiye sahip olmayan bu öğrenciler sadece toplama/çarpma işlemine odaklanmaktadır ve bu öğrenciler x-ekseni, y-ekseni ve fonksiyonun grafiği arasındaki ilişkiyi henüz kavrayamamıştır. Bu gruptaki öğrencilerden birinin vermiş olduğu cevap aşağıdadır.



Bir başka öğrenci grubu da belirlediği noktalar içerisinde mutlaka -1 , 0 ve 1 değerlerine karşılık gelen noktaları dâhil etmektedir. Her ne kadar a şıkkında bu değerler tanım kümesinin elemanı ise de b şıkkında bu değerlerden yalnızca 1 tanım kümesine dâhil edilmiştir. Buna rağmen bazı öğrencilerin sürekli bu noktaları belirlemek istemeleri iki didaktik antlaşma maddesinin varlığını ortaya koyar; birincisi grafiklerle verilen fonksiyonlar sürekli reel sayılarda tanımlıdır, dolayısıyla verilen grafiklerin uçları sonsuza gider. İkincisi ise bir grafik çizmek için öncelikle -1 , 0 ve 1 noktalarına karşılık gelen değerler belirlenmelidir. Dolayısıyla sınıflarda genellikle reel sayılarda tanımlı fonksiyonların grafikleri kullanılmakta ve belli noktalar (ve işlem yapması kolay noktalar) yardımıyla grafik çizimleri yapılmaktadır. Bu durum bazı öğrencilerde kendilerince kurallar geliştirmelerine sebep olmaktadır. Bu şekilde cevap veren bir öğrencinin cevabı aşağıdadır:

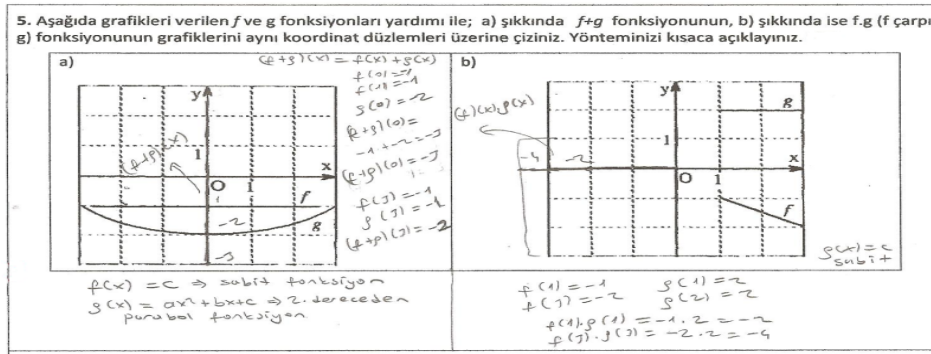


Bu kategorideki öğrencilerin vermiş olduğu yanıtların ortak özelliği fonksiyonların bazı x değerlerinin görüntüleri yardımı ile işlemleri yaparak istenilen grafikleri çizmeye çalışmalarıdır. Öğrenciler alışkın olmadıkları bu

soru karşısında doğru sonuca götürebilecek bir strateji kullanmaktadırlar. Ancak sınıflarda kullanılan standart soru tiplerinden kaynaklanan bazı alışkanlıkları nedeniyle hatalar yapmaktadırlar ve bu soruya da alışkanlıkları yardımıyla bir yaklaşımda bulunmaktadırlar. Bu durum bu şekilde davranan öğrencilerin fonksiyonlarda işlemleri kavramsal öğrenmek yerine daha önceden karşılaştıkları soru tiplerinin çözüm yöntemlerini öğrendiklerini göstermektedir.

3.1.3. Hem cebirsel ifadeleri hem de bazı değerleri hesaplayarak grafikleri çizmek

Bu bölümde, 1. ve 2. kategorilerini, gerek aynı şıkta gerekse de ayrı şıklarda kullanan öğrencilerin yanıtları yer almaktadır. Bu grupta 3 (% 5) öğrenci bulunmaktadır. Bu öğrenciler hangi stratejinin soruyu çözmede kolaylık sağlayacağını düşünüyorlarsa onu kullanmışlardır. Bu stratejiler içerisinde ortak bir seçim bulunmamaktadır. Bu grupta bulunan bir öğrencinin cevabı aşağıdadır:

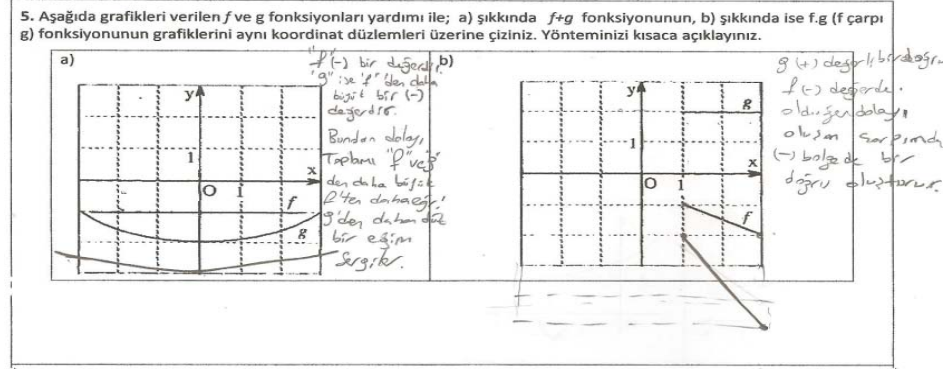


Bu öğrenci öncelikle fonksiyonların cebirsel ifadeleri üzerinde düşünmüş ve fonksiyonların derecesi ve formülü ile ilgili öngöründe bulunmuş ancak tam olarak nasıl bulacağını bilemediğinden bazı noktalar yardımıyla grafikleri çizme yöntemine geçmiştir. Ancak bulmuş olduğu değerlerin grafik çiziminde ne anlama geldiğini, x-ekseni ve y-ekseni ile ilişkilerini bilemediğinden bulduğu değerleri koordinat düzlemine yerleştirememiş ve istenilen grafikleri çizememiştir.

3.1.4. Fonksiyonların işaretleri yardımıyla grafikleri çizmek

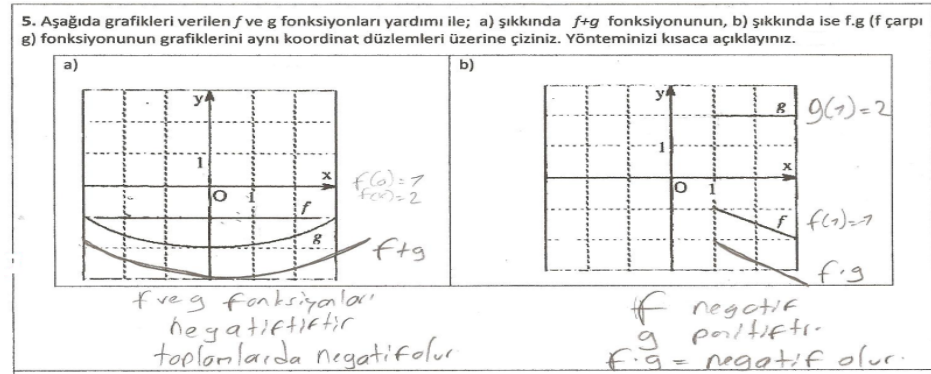
Sorulan soruya yanıt vermek amacıyla öğrenciler yukarıda verilen 1. ve 2. kategorileri oluşturan stratejilerden hangisini kullandıklarını belirtmeksizin grafikleri çizmeye çalışmış ve verilen fonksiyonların işaretleri ile ilgili açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu şekilde cevap veren 4

(% 6) öğrenci bulunmaktadır. Bu şekilde soruları çözen öğrencilerden birisinin cevabı aşağıdadır:



Fonksiyonların işaretine odaklanan bu öğrenci; işaretlerin toplamı ve çarpımından yola çıkarak grafikleri çizmeye çalışmıştır. Ancak zihinsel olarak başka bir yöntemi (cebirsal ifadeleri veya bazı değerleri bulma gibi) kullanmadığı açıktır. Çünkü "... bundan dolayı toplamı f ve g den daha büyük, f den daha düz bir eğim sergiler" şeklinde bir ifade kullanmıştır. Bu ifade, fonksiyon kavramından bağımsız olarak verilen iki grafiğin toplanması olarak öğrenci tarafından yorumlandığını ve öğrencinin grafiklerden birisinin doğrusal olması nedeniyle diğerini daha düzleştireceği şeklinde bir algıya sebep olduğunu göstermektedir.

Bu gruptan başka bir öğrenci ise aşağıdaki cevabı vermiştir.



Bu öğrenci de fonksiyonların işareti üzerine odaklanmış ancak her iki durumda da istenen grafiği doğru bir şekilde çizmiştir. Cevabında fonksiyonların bazı değerlerini belirtmiş olması, bu öğrencinin zihinsel olarak fonksiyonun bazı değerleri yardımıyla grafikleri çizdiğini

göstermektedir. Ancak hiçbir yerde fonksiyonların tiplerine (sabit fonksiyon gibi) referans vermemesi, bunun yerine sadece işaretlere odaklanması not edilmesi gereken ilginç bir durumdur. Bu durum, öğrencinin temsiller arası geçişlerle ilgili yeterince deneyime sahip olmadığını göstermektedir.

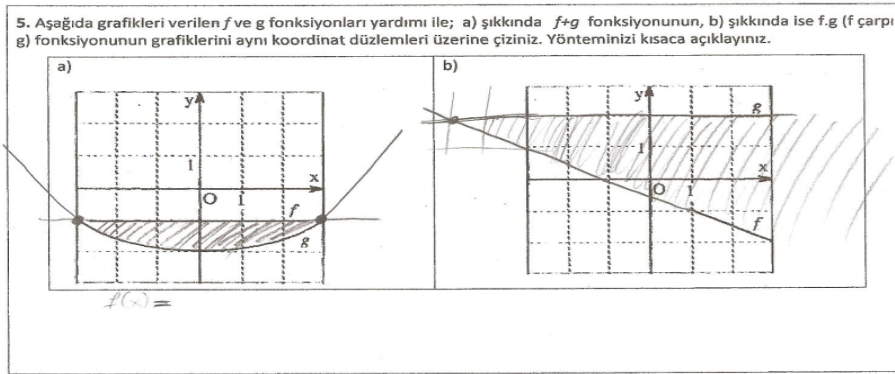
Bu gruptaki öğrencilerin verdiği yanıtlar arasında ortak olarak kullanılan strateji, öncelikle fonksiyonların aldığı değerlerin pozitif/negatif olma durumunun incelenmesidir. Öğrenciler fonksiyonların aldığı değerlere bakarak işlem sonrası çıkan sonuca göre grafik çizmeye çalışmışlardır. Bu öğrencilerin çoğunluğu ortaya çıkan toplam ve çarpım fonksiyonlarının işaretlerini doğru belirlemelerine karşın, grafiği doğru çizememişlerdir. Bu durum, fonksiyonların işaretlerinin belirlenmesinin grafiği çizmeye yeterli olmadığını ve öğrencilerin işareti bulmanın yanı sıra grafiği çizmek için farklı yöntemleri de kullanmaları gerektiğini göstermektedir.

3.2. Yanlış Cevaba götüren stratejiler

Bu grupta bulunan öğrenciler istenen grafikleri çizmeye çalışırken cevaplarının hiçbir yerinde fonksiyon kavramına referansta bulunmamışlardır. Öğrenciler, koordinat düzlemi ve üzerinde bulunan objelerin görüntüsünü başka kavramlarda karşılaştığı soru tiplerine benzetmişler ve orada kullandıkları çözüm yöntemini bu soruya uyarlamışlardır.

3.2.1. Cevap olarak verilen fonksiyonların arasındaki alanı taramak

Bazı öğrenciler istenilen fonksiyonların grafiğini çizmek yerine verilen grafiklerin arasında kalan alanı taramışlardır. 5 (% 8) öğrenci bu grupta bulunmaktadır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerden birinin yanıtı aşağıda verilmiştir:

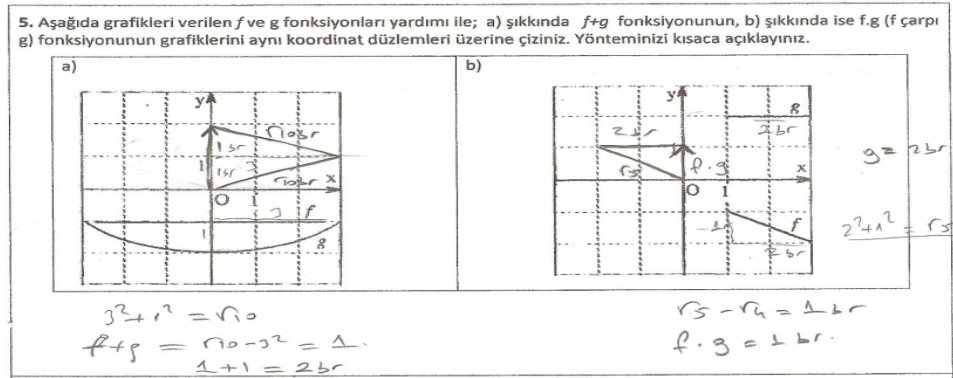


Öğrencilerin soruda istenilen fonksiyon grafiklerini çizmek yerine bu fonksiyonların arasında kalan alanı taramaları, onların alışık olmadıkları

bu soru tarzı karşısında, daha önceden eşitsizlik kavramında karşılaşmış oldukları çözüm yöntemini buraya taşımak istemelerinden kaynaklanmaktadır. Verilen grafiklerin dış bölgesini değil de arasını taramalarının nedeni ise eşitsizlik çözümlerinde genellikle verilen grafiklerin arasında kalan kapalı alanı taradıklarını göstermektedir. Dolayısıyla öğrenciler burada çözüm yöntemini bilmediği bir soruyu daha önceden karşılaştığı ve çözüm yöntemini bildiği bir soruya benzeterek cevaplandırmaya çalışmışlardır.

3.2.2. Verilen grafikleri vektörel olarak toplamak ve çarpmak

Öğrencilerin bazıları da soruda istenilen işlemleri yapmak için fizik dersinde karşılaştıkları “vektörlerde işlemler” kavramını kullanmışlardır. Vektör kavramını kullanarak cevap vermeye çalışan 3 (% 5) öğrenci bulunmaktadır ve bu cevaplardan bir tanesi aşağıda verilmiştir.

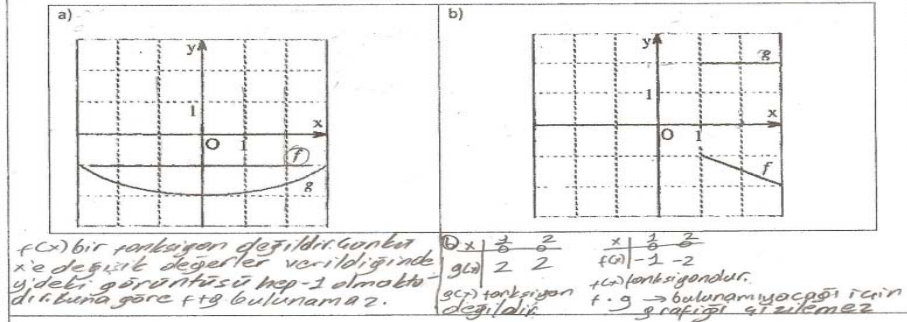


Öğrencilerin ilk defa karşılaştıkları ve fonksiyonlar üzerine işlem yapılmasını gerektiren bu sorularda, fonksiyonların grafiklerini vektörlere benzetmeleri, onların çözüm olarak kendilerine en yakın gördükleri “vektörlerde toplama işlemi” özelliklerini kullanmaya yöneltmiştir. Koordinat düzleminin bir ızgara ile verilmesi ve grafiklerin bazılarının vektörlere benzemesi ve ilk defa karşılaşılan bir soru tipi olması nedeniyle öğrenciler, bu şekilde bir çözüm yöntemi kullanmışlardır.

3.2.3. Grafiklerin çizilemeyeceği yanlıgısına sahip olan öğrenciler

Öğrencilerden bazıları sorularda verilen bilgilerde bulunan eksiklik ya da yanlışlıklardan ötürü istenilen işlemlerin yapılamayacağını ve grafiklerin çizilemeyeceğini düşünmüşlerdir. 3 öğrencinin cevabı (% 5) bu kategoride değerlendirilmiştir. Bu şekilde yanıt veren öğrencilerin bazılarının yanıtları aşağıdaki gibidir:

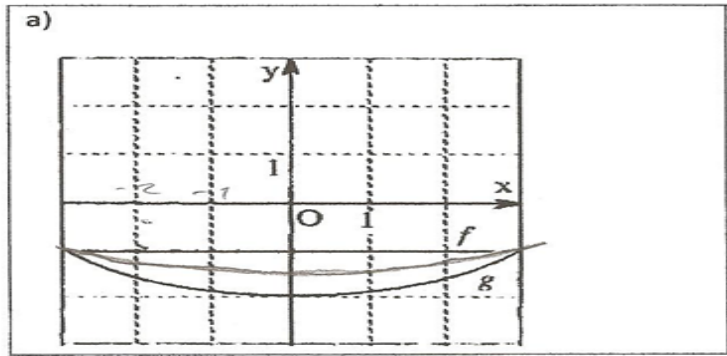
5. Aşağıda grafikleri verilen f ve g fonksiyonları yardımı ile; a) şıkında $f \cdot g$ fonksiyonunun, b) şıkında ise $f \cdot g$ (f çarpı g) fonksiyonunun grafiklerini aynı koordinat düzlemleri üzerine çiziniz. Yönteminizi kısaca açıklayınız.



Bu örnekte görüldüğü gibi istenilen fonksiyonların grafiklerinin çizilemeyeceğini ifade eden öğrencilerden bazıları sabit fonksiyonun fonksiyon olmadığını, bazıları fonksiyonların formülleri bilinmediğinden işlem yapılamayacağını, bazıları da herhangi bir sebep belirtmeksizin istenen grafiklerin çizilemeyeceğini düşünmektedirler.

3.2.4. Geometrik olarak toplama işlemi yapmak

Başka bir grup öğrencide verilen sorudaki toplama işlemi kavramına odaklanarak verilen grafiklerin ortasından geçirecek şekilde grafik çizmek suretiyle soruyu cevaplandırmıştır. 4 öğrenci (% 6) soruyu bu şekilde cevaplandırmıştır. Bu öğrenciler genellikle b şıkındaki soruyu boş bırakmıştır.

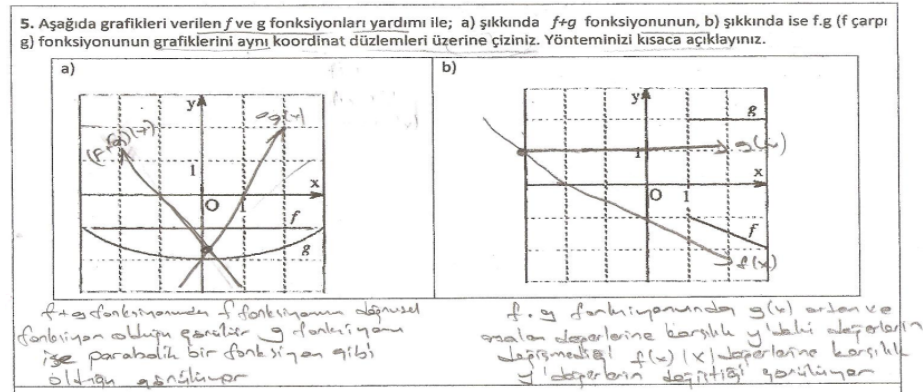


Öğrenci bu şekilde cevap vermekle aslında tamamen geometrik temsil üzerinde çalıştığını göstermekte ve bir şeyin ortasını bulma (orta nokta, kenar ortay, aritmetik orta, vb.) gibi çok sık karşılaştığı bazı sorularda uygun olan çözüm tekniğini buraya taşıyarak cevap vermektedir.

Dolayısıyla, öğrencinin cevabında fonksiyon kavramı ve bir fonksiyonun grafiğinin ne olduğu düşüncesini kullanmadığı görülmektedir.

3.2.5. Nedeni açıklanamayan cevaplar

Bu grupta bulunan öğrenciler istenen grafikleri çizmeye çalışmışlar ve bunun yanında da bazı açıklamalar yapmışlardır. Ancak grafikleri çizerken nasıl bir yöntem kullandıkları tam olarak anlaşılamamıştır. 2 öğrencinin cevabı bu kategoride değerlendirilmiştir. Bu öğrencilerden birisinin cevabı aşağıdadır:



4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışma da öğrencilerin fonksiyonlarda işlemler konusuna grafikler üzerinden yaklaşımları incelenmiştir. Ankette kullanılan soru tipleriyle daha önceden karşılaşmamış olan öğrenciler çok farklı yaklaşımlarda bulunarak istenen grafikleri çizmeye çalışmışlardır.

Öncelikle toplamda 16 öğrencinin hiçbir cevap vermemesi dikkat çekicidir. Bu durum tarafımızdan, bu öğrencilerin yeni problem tipine uygun bir çözüm stratejisi geliştiremedikleri dolayısıyla fonksiyon kavramı ve temsilleri üzerine yeterince kavramsal öğrenmeye sahip olamadıkları şeklinde yorumlanmıştır. 17 öğrencinin ise istenen grafikleri çizmek için öncelikle fonksiyonların cebirsel temsilini bulmak istemeleri beklenen bir durumdur. Çünkü fonksiyonlarda işlemler ve grafik çizimleri sınıflarda genellikle cebirsel temsillerden yola çıkılarak yapılmaktadır. Öğrencilerden grafik çizmeleri istendiğinde, alışkın olduğu ve “önce formülünü bul, sonra grafiği çiz” şeklinde adlandırabileceğimiz didaktik antlaşma maddesi uyarınca hareket ettiği görülmektedir. Ancak bu yöntemi kullanan öğrenciler grafiklerden cebirsel temsillere geçişte ciddi sıkıntılar yaşamaktadır. Kimisi verilen fonksiyonların hepsine doğrusal gibi yaklaşmakta, kimisi de temsiller arası geçişte dikkat edilmesi gereken

noktaları göz ardı ederek yanlış cevaplar vermektedir. Bu durum literatürde mevcut olan sonuçlarla örtüşmektedir (Kieran, 1992; Duval, 1993). Grafikler yardımıyla fonksiyonun bazı değerlerini bulup istenen grafikleri çizmeye çalışan 9 öğrenci ise, her ne kadar soruya doğru bir yaklaşım sergilemişlerse de koordinat eksenini ve eksenlerle eğrinin ilişkisini tam bilemediklerinden dolayı istenen grafikleri çizememişlerdir. Özellikle tablo oluşturmayı deneyen öğrenciler, tablonun belli formatta olması gerektiği inancıyla hareket ederek, verilen fonksiyonların tanım kümesindeki kısıtlamaları dikkate almamışlardır.

Diğer yöntemleri kullanan öğrenciler ise, soru metnini görür görmez ilk olarak zihninde hangi yöntemi çağırıyor ya da daha önceden karşılaştığı hangi soru tipine benzetiyorsa ona göre hareket ederek soruyu cevaplandırmaya çalışmışlardır. Doğal olarak bu öğrencilerin çoğunluğu fonksiyon kavramından bağımsız olarak bir yaklaşımda bulunmuşlardır. Bu öğrencilerden bazıları sorulan soruyu eşitsizliklerde kullanılan bir soru tipine, bazıları da vektörlerde kullanılan soru tipine benzeterek orada nasıl bir çözüm yöntemi kullanıldıysa aynı yöntemi bu sorunun çözümü için uyarlamışlardır.

Sonuç olarak öğrencilerin çoğunluğu istenen grafikleri doğru bir şekilde çizememiştir. Bu öğrencilere, böyle bir soru yerine, onların beklentileri doğrultusunda ve daha önceden karşılaşmış oldukları gibi fonksiyonları cebirsel olarak verip toplama ve çarpma işlemleri yaparak, elde edilen fonksiyonların grafikleri istenmiş olsaydı büyük olasılıkla tamamı istenen grafikleri doğru bir şekilde çizmiş olacaktı. Buradan da bu öğrencilerin fonksiyonlarda işlemleri öğrendikleri sonucuna ulaşılabilir. Ancak görüldüğü gibi aynı soru başka bir temsille sorulduğunda aynı öğrenciler farklı bir bakış açısı geliştirememekte ve dolayısıyla kavramsal bir öğrenmenin gerçekleşmediği görülmektedir. İşte burada didaktik antlaşması kavramının önemi ortaya çıkmaktadır. Eğer sürekli antlaşmaya sadık kalınarak yani öğrencilerin beklentileri doğrultusunda sorular sorulursa, öğrenciler belki sınavlarda iyi notlar almış olacaklar. Fakat onların gerçekte neyi, ne kadar öğrendiğini kontrol etme şansına sahip olunmayacaktır. Dolayısıyla, bu çalışmada kullanılan soru tipine benzer, müfredata uygun ancak öğrencilerin beklentileri dışında ve farklı bir bakış açısı gerektiren soru tipleri kullanarak öğretmen-öğrenci ve bilgi-öğrenci arasında oluşmuş olan antlaşmalar bozulmalıdır. Bu şekilde onlara bir çelişki süreci yaşatılarak kavram hakkındaki bilgilerini ve düşünme süreçlerini ele alma fırsatı verilebilir. Öğretmene de bu tarz sorular öğrencilerinin durumunu gözlemlene, eksik ve yanlış öğrenmelere karşı önlem alma şansı verecektir.

Ayrıca bu çalışma ile çoklu temsillerin önemi bir kez daha orta çıkmıştır. Çünkü matematik eğitiminde grafikleri diğer temsillerden (cebirsel, tablo, sembolik, v.b.) bağımsız olarak düşünmek mümkün değildir. Fonksiyonel ilişkilerin birden fazla temsil kullanılarak işlenmesi, pek çok araştırmacı tarafından tavsiye edilmektedir (Akkoc, 2006; Adıgüzel ve Akpınar, 2004; Brenner ve diğerleri, 1995; Özgün-Koca, 2004). Çoklu temsillerin öğretim sürecinde kullanılması sonucunda, öğrenciler sadece işlenen matematiksel kavramı daha iyi şekilde anlamakla kalmayıp, temsilleri ve özelliklerini de etkin bir şekilde kullanmayı da öğrenecektir. Yeni ortaöğretim matematik programı (MEB, 2005) incelendiğinde bu konuda önemli gelişmelerin sağlandığı görülecektir. Örneğin grafik konusuna farklı başlıklar altında yer verilmiştir. Çoğunlukla cebir öğrenme ve fonksiyonlar alt öğrenme alanlarında karşımıza çıkan grafiklerle ilgili kazanımlar grafik çizme ve uygulama yapmaya yöneliktir. Bu kazanımlarla ilgili etkinlik örneklerine bakıldığında öğrencileri grafikler üzerine düşünmeye ve grafikleri yorumlamaya sevk edeceği görülmektedir. Bu tür etkinliklerin literatür tarafından önerilmiş olması ve yeni ortaöğretim matematik programında yer alması oldukça umut vericidir.

KAYNAKLAR

- Adıgüzel, T. Ve Akpınar, Y. (2004). *Improving school children's mathematical word problem solving skills through computer-based multiple representation* (ERIC Documentation Reproduction Service No. ED 485 024).
- Akkoc H.(2006). Fonksiyon kavramının çoklu temsillerinin çağrıştırdığı kavram görüntüleri, *H.Ü. Eğitim fakültesi dergisi*, 30, 1–10.
- Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse doctorat, Université Bordeaux I.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove?, *Educational Studies in Mathematics* 52,3–28.
- Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Reed, B. S. & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra, *American Educational Research Journal*, 34 (4), 663-689.
- Brenner, M.E., Brar, T., Duran, R., Mayer, R.E., Moseley, B., Smith, B.R., ve Webb, D. (1995). *The role of multiple representations in learning algebra*. (ERIC Documentation Reproduction Service No. ED 391 659).
- Brousseau G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques, in M. Artigue et col. (eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*: Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud, Grenoble : La Pensée Sauvage, 51-66.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage éditions Grenoble, 1998 Collection : Recherches en Didactique des Mathématiques

- Capraro, M. M., Kulm, G., Capraro, R. M. (2005). Middle grades: Misconceptions in statistical thinking. *School Science and Mathematics Journal*, 105, 165-174.
- Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives (IREM de Strasbourg)*, 5, 37-65.
- Kaput, J.J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp.167- 194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Keller, B.A. ve Hirsch, C. R. (1998). Student Preferences for Representations of Functions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (1), 1-17.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching ant learning*(pp. 390-419). New York: Oxford University Press.
- Lacasta, E. (1995). *Les graphique cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôle*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
- Lesh, R., Doerr, H. (2003). *Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving*. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: A models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Earlbaum.
- Lincoln, Y. S., Guba, E.G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park, CA: Sage.
- MEB. (2005). *Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı*. Ankara: MEB Basımevi.
- Miles, M., Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Nadia, A. (2004). *Enseignement des fonctions en France et en Palestine. Analyse comparative de deux choix de transposition didactique*, Thèse de doctorat, Université ParisVII.
- Özgün-Koca, S. A. (2004). Bilgisayar Ortamındaki çoğul Bağlantılı Gösterimlerin Öğrencilerin Doğrusal İlişkileri Öğrenmeleri Üzerindeki Etkileri, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, sayı 26.
- Shah, P., Hoeffner, J. (2002). Review of graph comprehension research: Implications for instruction. *Educational Psychology Review*, 14(1), 47-69.
- Yavuz, İ. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41/4, 467-485.
- Yıldırım, A., Simsek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*, (5.Baskı). Seçkin Yayıncılık, Ankara.

EXTENDED ABSTRACT

Designed as a case study, in this study, it is aimed to investigate students' approaches towards operations on functions via the graphic representation of the functions. Students' answers to the questions that they have never met and that are not convenient to the didactic contract are analyzed in terms of multiple representation and didactic contract concepts. Furthermore, several estimations on students' skills about reading and drawing graphics have been made. The sampling of this study consists of 65 last grade high school students from 3 different high schools in Istanbul.

First of all, it is remarkable that 16 students in total did not answer to any questions in the questionnaire. This situation is interpreted that these students did not develop any solution strategy for a problem of new type and also that their conceptual knowledge about function concept and its representation was found to be insufficient. As expected, 17 students tried to find the algebraic representation in order to draw its graph; because in ordinary classrooms, operations on functions and drawing graphs of functions are done via their algebraic representations. When students are asked to draw graphs, they act according to didactic contract article that can be called as "first find the formula and then draw its graph". But students that tried this method encountered difficulties in the passage from the graphic representation to the algebraic representation. Some of them considered all functions as linear; others ignored some key points and gave wrong answers. However their approach could be considered as correct, 9 students who tried to draw the graphs in the question by finding some values of functions with the aid of the given graphs could not succeed because of lack of their knowledge about Cartesian coordinate system and relation between axes and slope. Especially students, who tried to create a table, ignored the restrictions in the domain of definition of given functions because of their belief.

Students, which used other methods, tried to give an answer by acting according to the mental image appeared when they saw the question for the first time or by using a learned method convenient to the questions that they likened to the asked questions. As a consequence, their approach was independent of the function concept. Some of these students likened them to a type of inequality questions, others to a type of vector questions and they used and adapted their solution methods to the asked questions.

Consequently, the majority of students did not draw correctly the asked graphs. Instead of these questions, if students were asked to find the addition and the multiplication of two functions whose algebraic representation were given and to draw the graphs of obtained functions, more of them would succeed. Thus, a wrong interpretation that the students had learned the operations on functions would be done. But if same question is asked in other representation of functions, it is observed that same students could not develop a different perspective and their conceptual learning about function concept was not sufficient. So, the importance of didactic contract is appeared at this point. If the questions according to the didactic

contract, in other words the questions expected by students, are asked in examinations, students can obtain good results; but it will be difficult to find out what and how much really they have learned. Therefore, appropriate to the curriculum and out of the students' expectations, questions which require different perspective like in this research should be used in order to break the agreement between teacher-student and knowledge-student.

Furthermore, by this study, the importance of multi-representation of functions is understood once more; because it is impossible to consider the graphs of functions as independent of other representations (algebraic, tables, symbolic etc.). Most of researchers have suggested that the functional relations should be thought by using more than one representation.