

*Yayın Geliş Tarihi (Submitted): 04/06/2020*

*Yayın Kabul Tarihi (Accepted): 14/06/2020*

*Makele Türü (Paper Type): Araştırma Makalesi – Research Paper*

## LOJİSTİK BÜYÜME VE ÜSTEL BÜYÜME MODELLERİ İLE TÜRKİYE’DE COVID-19 MODELLEMESİ

Şükriye Nur ŞENCAN<sup>1</sup>, Büşra ŞENCAN<sup>2</sup>, Müge Borazan ÇELİKBIÇAK<sup>3</sup>, Duhan ARSLAN<sup>4</sup>, Elif Su ÖZKAN<sup>5</sup>, Asu Şerife GÖKÇEN<sup>6</sup>, Ramazan Barış ÇİFTÇİ<sup>7</sup>, İlayda ARIKAN<sup>8</sup>, Burak UĞUR<sup>9</sup>, Hanife ŞAHİN<sup>10</sup>, Ahmet Emircan COŞKUN<sup>11</sup>, Hande KONŞUK ÜNLÜ<sup>12</sup> ve Serpil AKTAŞ ALTUNAY<sup>13</sup>

### ÖZET

Üstel Büyüme Modeli, durdurulamaz bir enfeksiyon büyümesini ifade ederek salgınların başlangıç dönemleri için bu büyümeye yeterli bir yaklaşım sağlayabilen bir yöntem iken Lojistik Büyüme Modeli, başlangıç döneminde büyümenin arttığı daha sonra maksimuma yaklaştıkça azalan büyümenin modellenmesinde karşımıza çıkan bir yöntemdir. Enfeksiyon salgınlarının büyümesinde, bu maksimum sınır dünyadaki toplam insan sayısı olacaktır, çünkü herkes hasta olduğunda büyüme mutlaka azalacaktır. Bu sebeple, son zamanlarda büyük bir hızla tüm dünyayı etkileyen COVID-19 salgın verilerinin modellenmesinde de bu yöntemler sıklıkla kullanılmaktadır. Bu çalışmada amaç, Türkiye’de 11 Mart 2020 – 19 Mayıs 2020 tarihleri arasında ortaya çıkan ve onaylanmış COVID-19 vakalarının toplam sayılarına ilişkin büyümeyi tanımlayan bir istatistiksel model oluşturmaktır. Bu bağlamda, belirtilen tarihlerde Türkiye’de ortaya çıkan COVID-19 toplam vaka sayılarını kullanarak Lojistik Büyüme ve Üstel Büyüme modelleri oluşturulmuştur. Bu modellere ilave olarak, Lojistik Büyüme Modeli’ne benzer özellikler gösteren, özellikle nüfus büyümesini modellemede sıklıkla kullanılan bir başka model olan Lojistik Model kullanılmıştır. Ayrıca, oluşturulan bu modeller ile vaka sayılarının seyrini öngörme yeteneğini de gözlemlemek hedeflenmiştir. Modelleme

<sup>1</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2047-4265>

<sup>2</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2717-4898>

<sup>3</sup> Öğr.Gör.Dr., Jandarma ve Sahil Güvenlik Akademisi, Ankara Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5796-9192>

<sup>4</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4485-1777>

<sup>5</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9137-6318>

<sup>6</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0101-459X>

<sup>7</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7489-1956>

<sup>8</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6083-1752>

<sup>9</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-8719-866X>

<sup>10</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0924-5704>

<sup>11</sup> Lisans öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3850-5499>

<sup>12</sup> Sorumlu Yazar, Öğr.Gör.Dr., Hacettepe Üniversitesi, Halk Sağlığı Enstitüsü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-3572-0254>

<sup>13</sup> Prof.Dr., İstatistik Bölümü, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3364-6388>

çalışmasına ilişkin çözümler Python programlama dilinde yer alan bazı fonksiyonlar ile gerçekleştirilerek çıkan sonuçlar yorumlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Lojistik Büyüme Modeli, Üstel Büyüme Modeli, Lojistik Model, COVID-19, Türkiye

## **MODELLING COVID-19 IN TURKEY WITH LOGISTIC GROWTH MODEL AND EXPONENTIAL GROWTH MODEL**

### **ABSTRACT**

Exponential Growth Model is a method that can provide an adequate approach to this growth for the beginning periods of outbreaks by expressing an unstoppable infection growth, while Logistics Growth Model is a method that appears in the modeling of the growth that decreases as the growth increases in the initial period and then approaches the maximum. In the growth of infectious outbreaks, this maximum limit will be the total number of people in the world, because growth will certainly decrease when everyone is ill. For this reason, it is also frequently used in the modeling of COVID-19 data, which has recently affected the whole world with great speed. The purpose of this study is to create a statistical model that describes the growth in total number of COVID-19 confirmed cases which occurred the dates between March 11 and May 19, 2020 in Turkey. In this context, Logistic Growth and Exponential Growth models were created to analyze the total number of COVID-19 confirmed cases between the dates mentioned above. In addition to these models, another model called as Logistic Model, which is similar to the Logistics Growth Model and is used frequently in modeling population growth, is also used. With these models, it is also aimed to observe the ability to predict the course of the number of cases. Analyzes related to the modeling study were carried out using some functions in the Python programming language and the results were interpreted.

**Keywords:** Logistic Growth Model, Exponential Growth Model, Logistic Model, COVID-19, Turkey

## 1. GİRİŞ

2019 yılı Aralık ayında Çin'in Wuhan kentinde ortaya çıkan ve büyük bir hızla tüm dünyayı etkisi altına alan koronavirüs hastalığı (COVID-19) halk sağlığı için küresel bir tehdit oluşturmaya devam etmektedir. COVID-19 gibi ortaya çıkan bulaşıcı hastalıklar sonucunda gerçekleşen vaka sayılarını tahmin etmek zordur. Hastalığın dinamikleri hakkında epidemiyolojik olarak elde edilen bilgiler ile halk sağlığını koruyucu politika üretebilmek amacı güden yönlendirici modeller mümkündür. COVID-19 hakkındaki, örneğin enfeksiyonun üreme sayısı ve kuluçka dönemi hakkında bilinenler arttıkça sağlık politikalarında yararlı olacak daha güçlü modeller geliştirilecektir (Kriston, 2020). Bu modellerde hangi varsayımların yapılacağı ve bu varsayımlar altında ülkeler ve bölgeler için model tabanlı tahminlerin uygulanabilirliği büyük ölçüde belirsizliğini korumaktadır (Kriston, 2020). Ayrıca, geleneksel modelleme çalışmalarına ilişkin sonuçların "halk sağlığı uygulaması" dilinde nasıl ifade edilebileceği her zaman açık değildir.

SARS, MERS, SARS-CoV-2 gibi benzeri salgınlara ilişkin epidemiyologlar tarafından yapılan incelemelerde, bir salgının ilk döneminin Üstel Büyümeyi takip ettiği ve toplam sürenin Lojistik Büyüme ile modellenebileceğini sonucuna ulaşılmıştır. Bu nedenle de Lojistik Büyüme ile salgın verilerini modelleme tercih edilen bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu yöntemlerin kullanılması ve genel olarak salgının modellenmesine ilişkin son dönemde birçok bilimsel çalışma yapılmıştır. Viboud ve arkadaşları, bulaşıcı hastalık salgınlarının erken safhalarını karakterize etmek için genelleştirilmiş bir Büyüme Modeli kullanmışlardır (Viboud vd., 2016). Tuite ve Fisman, 2020 yılında yaptıkları çalışmalarında salgın büyümesinin değişen doğası hakkında bilgi vermesi için bir Büyüme Modeli geliştirmişlerdir (Tuite ve Fisman, 2020). Roosa ve arkadaşları, Çin'de yaşanan COVID-19 salgınının 5 Şubat-24 Şubat 2020 tarihlerine yönelik gerçek zamanlı kısa dönem tahminlerini yapabilmek için salgın verilerine Lojistik Büyüme, Richard'ın büyüme ve alt salgın modellerini uygulamışlardır (Roosa vd., 2020). Önder çalışmasında Büyüme Modellerini 16-28 Mart 2020 tarihlerini kapsayan dönem için Türkiye COVID-19 verilerine uygulamış ve salgının trendini tahmin etmiştir (Önder, 2020). Wu ve arkadaşları, küresel pandemi için bilgilendirici çıkarsamalar yapmak adına genelleştirilmiş Lojistik Büyüme, genelleştirilmiş Richard ve genelleştirilmiş Büyüme Modellerini kullanarak Çin'in 29 eyaleti için COVID-19 'dan enfekte olmuş kişiler ile bu salgından etkilenen 19 ülke için salgının gelişimi hakkında tahmin çalışmaları yapmışlardır (Wu vd., 2020).

Kriston, John Hopkins Üniversitesi veri kümesinde listelenen tüm bölgeler ve ülkelerdeki toplam vaka sayısını tahmin etmek için, gözlemlenen verilere Bayesci hiyerarşik beş parametrelili bir Lojistik Modeli kullanarak altı farklı bölge ve ülke için (Çin, Güney Kore, Almanya, ABD, Brezilya, Güney Afrika'da Hubei) projeksiyonlar gerçekleştirmiştir (Kriston, 2020). Dattoli ve arkadaşları İtalya'daki COVID-19 vakalarının değerlendirilmesinde Lojistik Büyüme fonksiyonu ile Üstel Büyüme arasındaki ilişkiye değinmişlerdir (Dattoli vd., 2020).

Batista 2020 yılında yaptığı iki çalışmasında SIR (Batista, 2020a) ve Lojistik Büyüme Modelleri (Batista, 2020b) aracılığı ile Çin için günlük vaka tahminleri elde ederek COVID-19 salgınının nihai büyüklüğünü ve pik noktasını tahmin etmişlerdir. Grasselli ve arkadaşları, İtalya Lombardiya'da yoğun bakım ünitelerinin kullanımı için doğrusal ve Üstel Büyüme Modellerini kullanmışlardır (Grasselli vd., 2020). Kirichu çalışmasında, Kenya'da gerçekleşen COVID-19'un ilk 40 gününü modellemek için Üstel Büyüme Modelini kullanmıştır (Kirichu, 2020). Ayrıca Shekhar çalışmasında Hindistan'da 15 Mayıs'a kadar olan vaka tahminini yapmak için Üstel Büyüme Modelini kullanmıştır (Shekhar, 2020). Oliveiros ve arkadaşları tarafından bazı meteorolojik değişkenlerin bu salgının genişlemesi üzerindeki rolünün ne olduğunu görmek amacıyla verilere Üstel ve Doğrusal Model uygulanmıştır (Oliveiros vd., 2020). Chen ve Yu çalışmalarında, COVID-19'un ilk iki ayı için epideminin değerlendirilmesinde ikinci dereceden Türev Modeli ile epideminin doğrusal olmadığını göstermişlerdir (Chen ve Yu, 2020). Malato çalışmasında, İtalya için 24 Şubat 2020 tarihinden itibaren 13 günlük COVID-19 toplam vaka sayısı üzerinden Lojistik Büyüme ve Üstel Büyüme Modelleri ile tahminler yapmış ve tepe noktasına ilişkin günü tahmin etmiştir (Malato, 2020).

Bu çalışma ile COVID-19 vakalarına ilişkin Türkiye verilerini kullanarak büyümeyi tanımlayan bir Matematiksel Model oluşturabilmek ve bu model ile vaka sayılarının seyrini öngörme yeteneğini de gözlemlemek hedeflenmiştir. Bu amaçla, birinci bölümde verileri modellemek için kullanılan Lojistik Büyüme ve Üstel Büyüme Modelleri hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, 11 Mart – 19 Mayıs 2020 tarihleri arasındaki COVID-19 Türkiye verileri ile Python programlama dili kullanılarak Lojistik Büyüme ve Üstel Büyüme Modelleri ile yapılan analizlere yer verilmiştir. Sonuç ve tartışma bölümünde elde edilen analiz sonuçlarına ilişkin yorum ve tartışmalar ile çalışma tamamlanmıştır.

## 2. YÖNTEM

Bu çalışmada, COVID-19 toplam vaka sayılarının modellenmesi amacı ile Lojistik Büyüme ve Üstel Büyüme Modelleri temel yöntem olarak kullanılmıştır. Bu modellere ilave olarak, veri bilimciler tarafından sıklıkla tercih edilen bir model olan Lojistik Model de bir diğer yaklaşım olarak kullanılmıştır. İlk olarak, temel yöntemlerden biri olan Lojistik Büyüme Modeli ve bu yönteme paralel bir diğer yöntem olan Lojistik Modele değinilmiştir. Daha sonra, ikinci temel yöntem olan Üstel Büyüme Modeline yer verilmiştir.

### 2.1. Lojistik Büyüme Modeli

Popülasyon dinamikleri ile birlikte genel biyolojik büyümeyi modellemek için çeşitli büyüme eğrileri kullanılmıştır (Tsoularis ve Wallace, 2002). Bu kapsamda, Lojistik Büyüme eğrileri, farklı alanlardaki birçok uygulamada büyümeyi tahmin etmek için kullanılan bir Matematiksel Model ailesidir (Clark vd., 2011). Bu uygulamalar arasında nüfus artışlarının modellenmesinin yanı sıra, mayanın büyümesini, organların yenilenmesini ve yeni ürünlerin piyasaya girmesini modelleyen çalışmalar da bulunmaktadır (Tsoularis ve Wallace, 2002).

Lojistik Büyüme eğrileri ilk olarak Belçikalı matematikçi Pierre Verhulst tarafından 1830'larda geliştirilmiştir ve nüfus artışını modellemek için kullanılmıştır. Verhulst, belirli bir ülke veya bölgenin nüfusunun büyümesini Malthus'un çalışmalarına dayandırmıştır. Bu amaçla, Üstel Büyüme denkleminin çarpımsal bir faktör ekleyerek Lojistik Büyüme Modelini elde etmiştir. Tahmin modellerinin çoğunun klasik Verhulst Lojistik Büyüme denkleminin varyasyonlarına dayandığı gösterilmiştir (Clark vd., 2011).

Bir Sigmoid eğriyi takip eden lojistik fonksiyonun genel biçimi aşağıdaki matematiksel eşitlik ile ifade edilir (Shen, 2020):

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)} \quad (1)$$

Yukarıda verilen eşitlikte  $P(t)$  ile gösterilen toplam vaka sayıları, zamanın bir fonksiyonu,  $t$  zaman,  $K$  taşıma kapasitesi,  $P_0$  sıfır zaman noktasındaki toplam vaka sayısı (*parametre başlangıç değeri*),  $r$  büyüme oranı ya da çoğalma hızı olarak ifade edilmektedir. Lojistik Büyüme Modeli denkleminin taşıma kapasitesi olarak adlandırılan bir terimi vardır. Bu taşıma kapasitesi, bir popülasyonun büyüebileceği maksimum boyuttur; bu noktada nüfusun büyüklüğü stabilize olur ve büyüme hızı sona erer. Bir enfeksiyon, bir patojen ajanın popülasyonunun büyümesi olarak tanımlanabilir bu nedenle COVID-19 salgınının seyrini gözlemleyebilmek için bir Lojistik Modeli kullanılabilir.

Bu bölümde, toplam vaka sayısını tahmin etmek için kullanılan iki yaklaşıma değinilmiştir. Bu yaklaşımlar Lojistik Model ve Lojistik Büyüme Modelidir. Bir enfeksiyon, bir patojen ajanın popülasyonunun büyümesi olarak tanımlanabilmesi nedeni ile nüfus büyümesi modellenmesi için kullanılan Lojistik Model bu kapsamdaki verilere de uygulanabilmektedir (Malato, 2020). Bu sebeple çalışmamızda, Lojistik Büyüme Modeli'ne ilave olarak COVID-19 salgınının seyrini gözlemleyebilmek için Lojistik Model de eklenmiştir.

**1.Yaklaşım:** En genel ifadesi ile bu çalışmada kullanılan Lojistik Model,

$$f(x, a, b, c) = \frac{c}{1 + e^{-(x-b)/a}} \quad (2)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu eşitlikte,  $x$  zaman değişkenini,  $a$  enfeksiyon hızını,  $b$  maksimum enfeksiyonun meydana geldiği günü,  $c$  kaydedilmiş enfekte kişilerin toplam sayısını göstermektedir. Zaman ilerledikçe, enfekte olmuş kişilerin sayısı  $c$ 'ye yaklaşır. Bu nokta enfeksiyonun sona erdiğini gösteren noktadır. Bu fonksiyonun ayrıca  $b$  anında bir bükülme noktası vardır. Bu nokta, ilk türevin azalmaya başladığı noktadır ve enfeksiyonun daha az agresif olmaya ve azalmaya başladığını gösteren tepe noktası olarak adlandırılmaktadır (Malato, 2020).

**2.Yaklaşım:** Lojistik Büyüme Modeline ilişkin model denklemi,

$$y(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}} \quad (3)$$

biçiminde de ifade edilmektedir. Eşitlik (3)'teki  $y(t)$  herhangi bir  $t$  zamanındaki vaka sayısını,  $c$  vaka sayısı için maksimum kapasiteyi gösteren sınırlayıcı bir değeri,  $a$  sabit değeri,  $b$  ise büyüme oranını göstermektedir. Burada büyüme oranı,  $b$  sıfırdan farklı, pozitif tanımlı bir değerdir. Bu model aracılığı ile iki önemli değer daha hesaplanabilmektedir. Bunlardan biri başlangıçtaki vaka sayısıdır ve başlangıç değeri olarak da isimlendirilir. Başlangıçtaki vaka sayısı,

$$\frac{c}{(1 + a)} \quad (4)$$

ifadesine eşittir.  $t$  zamanındaki maksimum büyüme oranı,

$$t = \frac{\ln(a)}{b} \quad ; \quad y(t) = \frac{c}{2} \quad (5)$$

Eşitlik (5)'de verilen formüller yardımıyla hesaplanabilmektedir (Korstanje, 2020).

## 2.2. Üstel Büyüme Modeli

Lojistik Büyüme Modeli gelecekte durması beklenen salgın büyümesini ifade ederken, Üstel Büyüme Modeli durdurulamaz bir salgın büyümesini ifade eder. Malthus Büyüme Modeli sabit bir orana dayalı, basit Üstel Büyüme Modeli olarak da adlandırılır (Vikipedi, 2020). Basit Üstel Büyüme Modeli, başlangıç dönemi için salgının büyümesine yönelik yeterli bir yaklaşım sağlayabilir. Basit Üstel Büyüme Modeli, geometrik bir seriye göre herhangi bir türün potansiyel olarak artabileceğini ilk fark eden Thomas Robert Malthus'un (1766-1834) adıyla ilişkilidir (Clark vd., 2011). En genel hali ile Basit Üstel Büyüme fonksiyonu,

$$f(x, a, b, c) = a \cdot e^{b(x-c)} \quad (6)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Eşitlik (6) ile verilen modelde  $x$  değişkeni zamanı göstermekte ve Lojistik Büyüme Modeline ilişkin fonksiyonda yer alan  $a$ ,  $b$  ve  $c$  parametreleri yer almaktadır. Ancak burada  $a$ ,  $b$ ,  $c$  parametreleri Lojistik Büyüme fonksiyonu ile aynı ifadelere sahip değildir.  $a$  değeri başlangıç değeri olarak isimlendirilirken,  $b$  değeri büyüme oranını göstermektedir.  $c$  değeri ise sabit değeri ifade ederken,  $(x-c)$  ifadesi zaman aralığını göstermektedir (Malato, 2020).

## 3. TÜRKİYE COVID-19 VERİLERİNİN ÇÖZÜMLENMESİ

Google'ın bir yan kuruluşu olan Kaggle, veri bilimcileri ve makine öğrenimi pratisyenlerinden oluşan çevrimiçi bir topluluktur. Açık erişime sahip bir veri platformu olan Kaggle, kullanıcıların veri kümeleri bulmasına ve yayınlamasına, web tabanlı bir veri bilimi ortamında modelleri keşfetmesine ve oluşturmasına, diğer veri bilimcileri ve makine öğrenimi mühendisleriyle çalışmasına ve veri bilimi zorluklarını çözmek için yarışmalara girmesine olanak tanır ([http-1](http://1)).

Bu bölümde Kaggle üzerinden toplanan Türkiye COVID-19 verileri çözümlenerek sonuçlar tartışılmıştır.

### 3.1. Türkiye COVID-19 Verisi

Bu çalışmada COVID-19 salgınına ilişkin Türkiye verileri kullanılmıştır. Söz konusu veriler, ilk vakanın görüldüğü 11 Mart 2020 ile 19 Mayıs 2020 tarihlerini kapsayan ve enfekte olan toplam vaka sayılarını içermektedir. Veriler Kaggle platformu üzerinden alınmıştır (Güzelkokar, 2020). Bu verilerin analizleri Lojistik Büyüme ve Üstel Büyüme Modelleri ile Python programında Pandas kütüphanesi kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Tablo 1’de ilk vakanın görüldüğü tarihten itibaren 70 günlük toplam vaka sayıları verilmiştir.

**Tablo 1.** Toplam vaka sayısı (11Mart-19 Mayıs 2020)

Gün	Toplam Vaka
0	1
1	1
2	5
3	6
4	18
...	...
65	146457
66	148067
67	149435
68	150593
69	151615

### 3.2. Lojistik Büyüme Modeli ile Çözümleme

Bu bölümde, öncelikle Tablo 1’deki veriler ile COVID-19 Türkiye salgının yayılımı ile elde edilen Lojistik Büyüme eğrisi bulunmuştur. Bu amaçla iki farklı yaklaşım kullanılmıştır. İlk olarak, Lojistik Büyüme ile modellenmesi planlanan Tablo 1’deki verilerin içeriğinde sadece toplam vaka sayılarının bulunması ve Eşitlik (3)’teki  $a$ ,  $b$  ve  $c$  parametrelerinin doğru değerlerinin bilinmemesi nedeni ile “Doğrusal Olmayan En Küçük Kareler Yöntemi (EKK)” kullanılarak modelin hata kareler toplamını en küçük yapan  $a$ ,  $b$  ve  $c$  parametre değerleri Python programlama dili ile tahmin edilmiştir. Gerçek değerler ile tahmin değerleri arasındaki farkın minimum olması istendiği için doğrusal olmayan en küçük kareler optimizasyonu ile gerçek değerlere en yakın  $a$ ,  $b$ ,  $c$  parametreleri tahmin edilmiştir (Korstanje, 2020). Doğrusal olmayan EKK yöntemi ile Eşitlik (3)’te yer alan  $a$ ,  $b$  ve  $c$  parametreleri için elde edilen tahmin değerleri Tablo 2’de verilmiştir.

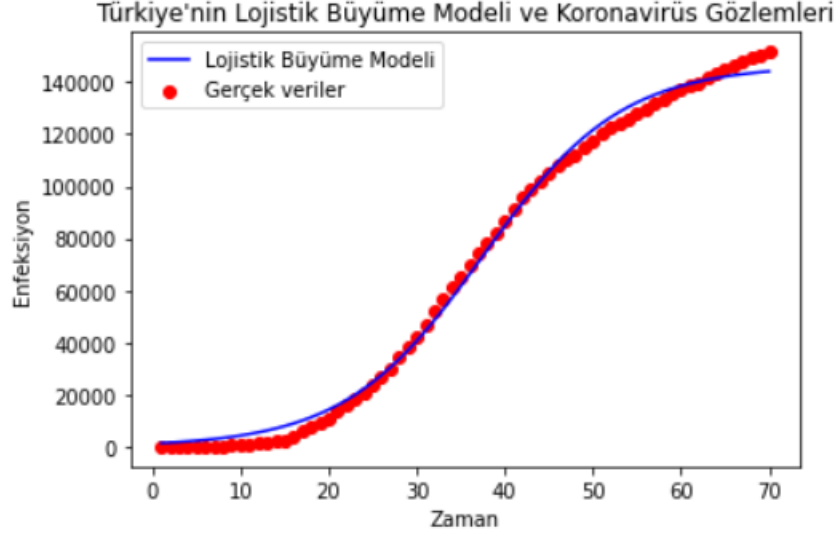
**Tablo 2.** Doğrusal Olmayan EKK Yöntemi ile Lojistik Büyüme Modelinin Parametre Tahminleri

Parametre	Tahmin Değeri
$a$	118,78248
$b$	0,12734
$c$	146439,34350

Tablo 2’de yer alan  $a$  parametresi sabit bir değerdir ve 118,78248 olarak tahmin edilmiştir. Büyüme oranını ifade eden  $b$  parametresi 0,12734 olarak tahmin edilmiştir. Toplam vaka sayısı



için maksimum kapasiteyi gösteren  $c$  parametresi ise 146439,34350 olarak tahmin edilmiştir. Lojistik Büyüme Modelinden tahmin edilen değerler ile Tablo 1’de yer alan gerçekleşen vakalar için çizilen grafik Şekil 1’de verilmiştir.



Şekil 1. Türkiye COVID-19 verisi için Lojistik Büyüme Modeli eğrisi

Şekil 1’deki grafikte tahmin edilen ve gerçekleşen vaka sayılarının oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Bu sonuca göre Lojistik Büyüme Modelinin, COVID-19 Türkiye verilerini iyi temsil ettiği sonucuna ulaşılabılır. Bu sonuçtan hareketle, Türkiye’de gözlemlenen COVID-19 verilerine uyum gösteren bir lojistik fonksiyon elde edildiği söylenebilir. Bu bilgileri gerçek hayata aktarabilmek için, birçok model doğrulaması yapmak, farklı modellerin doğruluğunu ve diğer performans metriklerini karşılaştırmak ve gelecekteki trendlerin seçilen modele uyumlu olup olmadığını incelemek gereklidir. Ancak yine de teoriyi kullanarak bazı gözlemler hakkında yorum yapılabilir. Doğrusal olmayan EKK yöntemi ile parametre değerleri tahmin edilen Lojistik Büyüme Modeline göre  $c$  değeri 146439,3435023 bulunmuştur. Bu değer, Türkiye’deki enfeksiyon sayısının maksimum güncel değerinin bir başka deyişle toplam vaka sayısının 146440 olacağı anlamına gelir. Bu modele göre Eşitlik (5) kullanılarak maksimum büyüme oranının ne zaman gerçekleştiği de hesaplanabilir:

- $t = \ln(a)/b = 37$  (maksimum büyüme oranının gerçekleştiği gün 37.gün olarak tahmin edilmiştir)
- $y(t) = c/2 = 73220$  (37. günde enfeksiyon sayısı 73220 olarak tahmin edilmiştir)

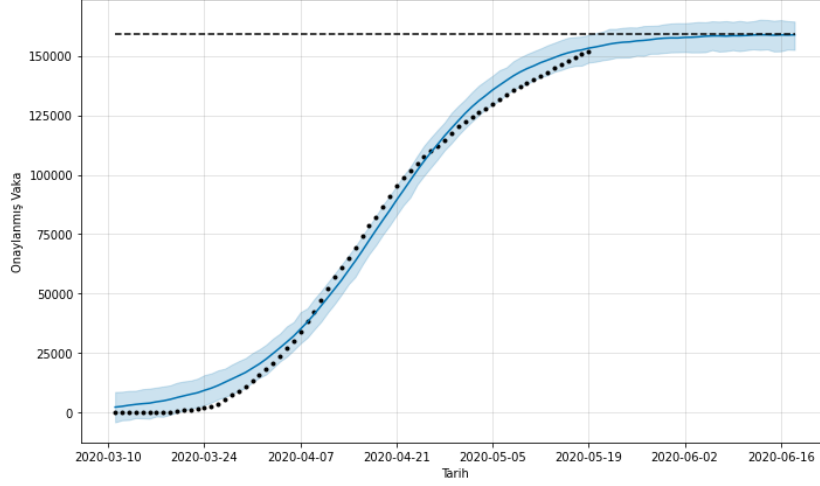
37. gün olarak tahmin edilen tarih 16 Nisan 2020’dir. 16 Nisan’da gerçekleşen gerçek toplam vaka sayısı da 74193 olarak gözlenmiştir.

Tablo 3'te tarihlere göre Türkiye'de gerçekleşen toplam vaka sayıları verilmiştir. Buna göre, en son günü ifade eden 19 Mayıs 2020 tarihinde toplam vaka sayısı 151615 olarak gerçekleşmiştir.

**Tablo 3.** Tarihler ve gerçekleşen vaka sayıları

Tarih	Toplam Vaka Sayısı	Tarih	Toplam Vaka Sayısı
<b>0</b> 11.03.2020	1	<b>35</b> 15.04.2020	69392
<b>1</b> 12.03.2020	1	<b>36</b> 16.04.2020	74193
<b>2</b> 13.03.2020	5	<b>37</b> 17.04.2020	78546
<b>3</b> 14.03.2020	6	<b>38</b> 18.04.2020	82329
<b>4</b> 15.03.2020	18	<b>39</b> 19.04.2020	86306
<b>5</b> 16.03.2020	47	<b>40</b> 20.04.2020	90980
<b>6</b> 17.03.2020	98	<b>41</b> 21.04.2020	95591
<b>7</b> 18.03.2020	191	<b>42</b> 22.04.2020	98674
<b>8</b> 19.03.2020	359	<b>43</b> 23.04.2020	101790
<b>9</b> 20.03.2020	670	<b>44</b> 24.04.2020	104912
<b>10</b> 21.03.2020	947	<b>45</b> 25.04.2020	107773
<b>11</b> 22.03.2020	1236	<b>46</b> 26.04.2020	110130
<b>12</b> 23.03.2020	1529	<b>47</b> 27.04.2020	112261
<b>13</b> 24.03.2020	1872	<b>48</b> 28.04.2020	114653
<b>14</b> 25.03.2020	2433	<b>49</b> 29.04.2020	117589
<b>15</b> 26.03.2020	3629	<b>50</b> 30.04.2020	120204
<b>16</b> 27.03.2020	5698	<b>51</b> 1.05.2020	122392
<b>17</b> 28.03.2020	7402	<b>52</b> 2.05.2020	124375
<b>18</b> 29.03.2020	9217	<b>53</b> 3.05.2020	126045
<b>19</b> 30.03.2020	10827	<b>54</b> 4.05.2020	127659
<b>20</b> 31.03.2020	13531	<b>55</b> 5.05.2020	129491
<b>21</b> 1.04.2020	15679	<b>56</b> 6.05.2020	131744
<b>22</b> 2.04.2020	18135	<b>57</b> 7.05.2020	133721
<b>23</b> 3.04.2020	20921	<b>58</b> 8.05.2020	135569
<b>24</b> 4.04.2020	23934	<b>59</b> 9.05.2020	137115
<b>25</b> 5.04.2020	27069	<b>60</b> 10.05.2020	138657
<b>26</b> 6.04.2020	30217	<b>61</b> 11.05.2020	139771
<b>27</b> 7.04.2020	34109	<b>62</b> 12.05.2020	141475
<b>28</b> 8.04.2020	38226	<b>63</b> 13.05.2020	143114
<b>29</b> 9.04.2020	42282	<b>64</b> 14.05.2020	144749
<b>30</b> 10.04.2020	47029	<b>65</b> 15.05.2020	146457
<b>31</b> 11.04.2020	52167	<b>66</b> 16.05.2020	148067
<b>32</b> 12.04.2020	56956	<b>67</b> 17.05.2020	149435
<b>33</b> 13.04.2020	61049	<b>68</b> 18.05.2020	150593
<b>34</b> 14.04.2020	65111	<b>69</b> 19.05.2020	151615

Şekil 2’ de yer alan grafik 19 Mayıs 2020 tarihinden itibaren yaklaşık 30 günlük tahmini kapsamaktadır.



**Şekil 2.** Lojistik Büyüme Modeline göre geleceğe yönelik tahminler

Şekil 2’de yer alan grafikte siyah noktalar ile gösterilen eğri gerçek veriyi (gerçekleşen toplam vaka sayılarını) mavi çizgi gösterilen eğri ise Lojistik Büyüme Modeli ile öngörülen toplam vaka sayılarını ifade etmektedir. Lojistik Büyüme Modeli ile yapılan öngörüye dayanarak 2 Haziran 2020 itibariyle toplam vaka sayısının durağanlaşacağı tahmin edilmiştir.

Aynı zamanda toplam vaka sayılarının tahmin değerlerine ilişkin güven aralığının alt sınır ve üst sınırları da tahmin edilmiştir. Örneğin modele göre 25 Mayıs 2020 tarihinde toplam vaka sayısının 155 819 olarak gerçekleşmesi beklenirken, söz konusu tarihte Tablo 4’teki Sağlık Bakanlığı verilerine göre toplam vaka sayısı 157 814 olarak gerçekleşmiştir. Bu değer tahmin değeri %95 Güven Aralığı [149 678 ; 161 702] sınırları içerisinde yer almaktadır.

**Tablo 4.** T.C. Sağlık Bakanlığının 25 Mayıs 2020 Tarihli Türkiye Koronavirüs Tablosu

25 Mayıs 2020		
<b>Günlük</b>	Test Sayısı	21492
	Vaka Sayısı	987
	Vefat Sayısı	29
	İyileşen Sayısı	1321
	Test Sayısı	1853754
<b>Toplam</b>	Vaka Sayısı	157814
	Vefat Sayısı	4369
	Yoğun Bakım Hasta Sayısı	756
	Entübe Hasta Sayısı	371
	İyileşen Hasta Sayısı	120015

70'inci günden sonra gerçekleşmesi beklenen toplam vaka sayıları ise Tablo 5'te verilmiştir. Böylelikle, Lojistik Büyüme Modeli ile Türkiye için gelecekteki tarihlere yönelik toplam vaka sayıları tahmin edilmiştir.

**Tablo 5.** Lojistik Büyüme Modeline göre gelecek tarihler için yapılan tahminler

	Tarih	Vaka Tahmini	Alt Sınır	Üst Sınır
70	2020-05-20	153711.515981	147554.621452	159889.737109
71	2020-05-21	154289.155725	148755.014767	160778.590494
72	2020-05-22	154920.871969	148976.741597	161411.049661
73	2020-05-23	155378.904154	149157.564268	161366.073120
74	2020-05-24	155694.443869	149495.876688	161871.252366
75	2020-05-25	155859.713831	149678.779947	161702.360915
76	2020-05-26	156263.292042	150389.257041	162128.882357
77	2020-05-27	156462.939079	150468.620311	162895.570492
78	2020-05-28	156772.003947	151232.230922	163215.869012
79	2020-05-29	157160.240692	151037.651301	163257.459105
80	2020-05-30	157397.758059	150970.929301	163656.726141
81	2020-05-31	157513.756137	151910.070127	163439.676362
82	2020-06-01	157498.604901	151402.573835	163644.464136
83	2020-06-02	157739.165673	151702.233745	163854.683835
84	2020-06-03	157791.614044	151793.841756	163603.407895
85	2020-06-04	157967.840161	151732.896574	164258.619394
86	2020-06-05	158236.258971	152367.066291	164335.054925
87	2020-06-06	158365.753003	152274.146961	164419.583343
88	2020-06-07	158384.401895	152142.752899	164470.550407
89	2020-06-08	158281.553736	152085.824856	164658.195965
90	2020-06-09	158443.139419	152472.261791	164550.043717
91	2020-06-10	158424.488634	152242.119381	164629.969951
92	2020-06-11	158536.723497	152423.377118	164102.145771
93	2020-06-12	158747.562442	152842.223380	165540.460657
94	2020-06-13	158825.257011	152755.896374	164792.308954
95	2020-06-14	158797.315744	152832.873380	165253.960103
96	2020-06-15	158652.570278	152913.015471	165040.068964
97	2020-06-16	158776.484811	152609.741457	165033.923395
98	2020-06-17	158723.967590	152885.405475	165173.198506
99	2020-06-18	158805.760376	152849.042937	165520.644317

İkinci yaklaşım olarak, Lojistik Modeli temsil eden Eşitlik (2)'den yararlanılmıştır. Burada,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  parametrelerine ilişkin tahmin ve standart hata değerleri, orijinal veriden elde edilen başlangıç değerleri kullanılarak Python programlama dilinde yer alan *curve\_fit* fonksiyonu ile

tahmin edilmiştir. Lojistik Model için elde edilen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  parametrelerinin tahmin ve standart hata değerleri Tablo 6’da verilmiştir.

**Tablo 6.** Lojistik Model ile elde edilen parametre tahminleri ve standart hataları

Parametre	Tahmin Değeri	Standart Hata
$a$	7,852870	0,193705
$b$	37	0,249966
$c$	146439,41	1232,844

Tablo 6’da yer alan  $a$  parametresi ile gösterilen enfeksiyon hızı 7,8528 olarak tahmin edilmiştir.  $b$  parametresi maksimum enfeksiyonun meydana geldiği 37 ’ncı gün olan 16 Nisan 2020 olarak tahmin edilmiştir.  $c$  parametresi ise enfekte olmuş kişilerin toplam sayısıdır ve 146439 olarak tahmin edilmiştir.

Bu modele göre, Türkiye’de vaka sayısının bittiği tarih 25 Temmuz 2020 olarak Python programlama dilinde yer alan *Scipy-fsolve* fonksiyonu ile tahmin edilmiştir. Enfeksiyon sonunda; Türkiye'deki enfekte olmuş kişilerin beklenen sayısı,  $c$  parametresinin standart hata  $c$ 'ye bölümünden tahmini 119 olarak bulunmuştur.

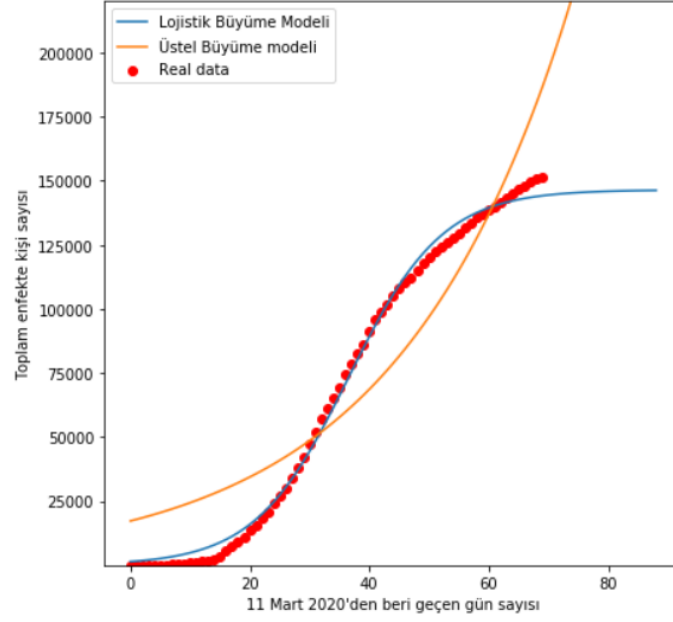
### 3.3. Üstel Büyüme Modeli ile Çözümleme

Bu bölümde ise Türkiye’deki enfekte olmuş toplam vaka sayısı, Eşitlik (6)’da yer alan basit Üstel Büyüme Modeli kullanılarak tahmin edilmiştir. Bu modele göre, Türkiye’de vaka sayısının bittiği tarih Python programlama dilinde yer alan *Scipy-fsolve* fonksiyonu ile 22 Ekim 2020 olarak tahmin edilmiştir. Üstel Model ile elde edilen parametre tahminleri ve standart hataları Tablo 7’de verilmiştir.

**Tablo 7.** Üstel Büyüme Modeli ile elde edilen parametre tahminleri ve standart hataları

Parametre	Tahmin Değeri	Standart Hata
$a$	17.0930	34040377
$b$	0.03450	0.00210526
$c$	-200.45	57634080.8

Şekil 4’te Lojistik Büyüme Modeli ile Üstel Büyüme Modeline ilişkin karşılaştırma grafiği verilmiştir.



Şekil 4. Lojistik Büyüme Modeli ile Üstel Büyüme Modelinin karşılaştırılması

Şekil 4'e bakıldığında, Türkiye'de gözlemlenen COVID-19 verilerine en yakın tahmini Lojistik Büyüme Modeli vermiştir. En uygun eğriyi bulmak için her iki modele ilişkin hatalar analiz edilmiştir. Bilindiği gibi hata kareler ortalaması değeri (HKO) ne kadar düşük olursa gerçek veri ile model arasındaki uyum o kadar iyi olur. HKO değeri her iki model için hesaplanarak Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. Lojistik Büyüme, Lojistik Model ve Üstel Büyüme Modeli için HKO değerleri

Model	HKO
Lojistik Büyüme Modeli	3316.10377215
Lojistik Model	10996544.2274
Üstel Büyüme Modeli	373650943.0734

Tablo 8'deki hata kareler ortalaması değerleri karşılaştırıldığında, bu değeri daha küçük olan Lojistik Büyüme Modelinin Türkiye'deki toplam vaka sayılarının modellenmesi için en iyi model olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

#### 4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Çin'in Wuhan kentinde ortaya çıkan koronavirüs pandemisi ve yol açtığı COVID-19 salgını yaşamı durma noktasına getirmiştir. Hastalığın tüm dünyayı etkisi altına alması ile beraber ülkelerin, çeşitli politikalar ile hasarı en aza indirme planları ve bu doğrultuda yaptığı çalışmalar

görülmektedir. Ülkelerin kendilerine ait araştırma merkezleri, çeşitli disiplin ve meslek grubundan insanların kolektif çalışmaları, araştırmaları ile çeşitli sonuçlara ulaşılması hedeflenmiştir.

İnsanlığı ilgilendiren daha önceki solunum yoluyla bulaşan salgın hastalıklar konusunda yapılan çalışmaların günümüzde bilgilendirici birer kaynak olduğu görülmektedir. 2020 yılında tüm dünyayı ilgilendiren COVID-19'un Türkiye üzerindeki etkilerinin de bilgilendirici bir kaynağa dönüşmesi için gerekli çalışmalar yapılmaktadır. Dolayısıyla doğruya yakın tahminlerde bulunmak adına kullanılan yöntemler bilimsel çalışmalar için belirleyici bir unsur haline gelmektedir. Nitekim virüsün ilerleyen süreçte yayılım hızını ve vaka sayısını tahmin etmek, Türkiye'nin normale dönüş süreci açısından önem taşımaktadır.

Bu çalışmada, Lojistik Büyüme, Lojistik Model ve Üstel Büyüme Modeli kullanılmıştır. İncelenen Büyüme Modelleri içerisinde en uygun modeli bulmak için HKO, parametrelerin standart hataları ve tahminlerdeki tutarlılık gibi birçok kriter salgın hastalıklarda ilerlemeyi açıklayan büyüme eğrisi modellerinin karşılaştırılmasında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu modellerin kullanılma sebebi COVID-19 pozitif olan toplam vaka sayılarının dağılımının üstel bir artışa sahip olduğunu göstermek ve gelecekte beklenen toplam vaka sayılarını doğru şekilde tahmin etmek açısından önem taşımaktadır.

Üstel Büyüme Modeli, sadece nüfusun enfekte olan kısmını tahmin etmek için kullanılmaktadır. Üstel Büyüme Modelinin büyüme sınırı olmadığı için Şekil 4 'te görüldüğü gibi "J" şeklinde karakteristik bir eğri oluşturmaktadır. Mevcut grafiğe göre büyüme sürekli bir artış gösterirken, devam eden süreçte ise vaka sayısında üstel olarak artan bir eğilim gözlenmektedir. Bu sebepten dolayı Üstel Büyüme Modeli, Lojistik Büyüme Modeline göre verileri daha iyi temsil etmektedir.

Lojistik Büyüme Modelinde ise üstel olan vaka artışına ve buna bağlı olarak sabit bir büyüme oranına sahip olduğu görülmektedir. Lojistik Büyüme Modeli doygunluk noktasına ulaşan vaka sayısı için geçerli olduğundan Üstel Büyüme Modeline göre daha tutarlıdır. Bu nedenle sigmoid bir büyüme eğrisine sahiptir. Oluşturulan üç modelin HKO değerlerine bakıldığında Lojistik Büyüme Modelinin HKO değeri ile diğer iki modelin HKO değeri arasında çok büyük bir fark olduğu ve Lojistik Büyüme Modelinin HKO değerinin diğerlerinden çok daha küçük olduğu, bu nedenle en iyi modelin Lojistik Büyüme Modeli olduğu görülmüştür. Büyüme hızının yavaş artması ve koronavirüsün daha fazla yayılmasına karşı alınan önlemler ile durağanlaşma dönemine girdikten sonra tekrar aynı hızda yavaşladığı ve plato döneminin gerçekleştiği gözlemlenmektedir.

COVID-19 salgını ilk kez Türkiye de 11 Mart 2020 itibari ile ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada, T.C. Sağlık Bakanlığı tarafından onaylanan toplam vaka sayılarına ilişkin günlük veriler ile gerekli analizler yapılmıştır. Buna göre, maksimum büyümenin (*tepe noktasının*) 37. günde gerçekleştiği, Haziran ayının ikinci gününden itibaren toplam vaka sayısının durağanlaşacağı sonucuna ulaşılmıştır.

İlk kez gelişmiş ülkelerin de içinde bulunduğu ve tüm dünyayı etkileyen COVID-19 virüsü hakkında temkinli olmaları ve bu doğrultuda alışıktığımız virüsten korunmayı amaçlamaları istenmektedir. Önceki yıllarda yapılan araştırmalar neticesinde yayınlanan raporlar incelendiğinde küreselleşen dünyada daha fazla salgın ile karşı karşıya kalınacağı ve bu salgınların, ayırt etmeksizin bütün toplumları etkileyeceği, yıllar öncesinden öngörülmüştür (Budak ve Korkmaz, 2020). Dolayısıyla, bundan sonra gelişecek süreç hakkında kesin sonuçlar bilinmemekle beraber günlük verileri ve ilerleyişi yakından takip etmek büyük önem taşımaktadır. Toplumun daha dikkatli olması ve gerekli sosyal mesafe kurallarına uyarak hareket etmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, T.C. Sağlık Bakanlığının çağrısı ile yapılan “*evde kal sağlıklı kal*” ve “*hayat eve sığar*” gibi sloganlar, insanları sosyal izolasyona teşvik ederek virüs yayılımını yavaşlatmayı amaçlamıştır. Önümüzdeki süreçlerde salgın yayılımının yavaşlaması ve beklenen ikinci dalganın daha sağlıklı atlatılması adına gerekli önlemlerin alınması önem arz etmektedir.

## KAYNAKÇA

- Batista, M. (2020a), Estimation of the final size of the coronavirus epidemic by the SIR model, [Preprint] *MedRxiv*, E-pub: 21.03.2020, <https://doi.org/10.1101/2020.02.16.20023606>.
- Batista, M. (2020b), Estimation of the final size of the second phase of the coronavirus epidemic by the logistic model [Preprint] *MedRxiv*, E-pub: 17.03.2020, <https://doi.org/10.1101/2020.03.11.20024901>.
- Budak, F. ve Korkmaz, Ş. (2020), COVID-19 pandemi sürecine yönelik genel bir değerlendirme: Türkiye örneği, *Sosyal Araştırmalar ve Yönetim Dergisi*, 1, 62–79.
- Chen, X. ve Yu, B. (2020), First two months of the 2019 coronavirus disease (COVID-19) epidemic in China: Real-time surveillance and evaluation with a second derivative model, *Global Health Research and Policy*, 5(1).
- Clark, A. J., Lake, L. W. ve Patzek, T. W. (2011), Production forecasting with logistic growth models, *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 1, 184–194.



- Dattoli, G., Palma, D., Licciardi, S. ve Sabia, E. (2020), *A note on the evolution of Covid-19 in Italy*.
- Grasselli, G., Pesenti, A. ve Cecconi, M. (2020), Critical care utilization for the COVID-19 outbreak in Lombardy, Italy, *Journal of the American Medical Association*, 323(16), 1545–1546.
- Güzelkokar, G. (2020), *COVID-19 in Turkey* | *Kaggle*, Retrieved: 19.05.2020, <https://www.kaggle.com/gkhan496/covid19-in-turkey>.
- http-1: <https://www.kaggle.com>, Erişim Tarihi: 02.06.2020.
- Kirichu, S. K. (2020), Short-term projection of COVID 19 cases in Kenya using an exponential model [Preprint], *Research Square*, <https://doi.org/10.21203/RS.3.RS-21900/V1>.
- Korstanje, J. (2020), *Modeling logistic growth*, <https://towardsdatascience.com/modeling-logistic-growth-1367dc971de2>.
- Kriston L. Projection of cumulative coronavirus disease 2019 (COVID-19) case growth with a hierarchical logistic model [Preprint], *Bull World Health Organ*, E-pub: 07.04.2020, <http://dx.doi.org/10.2471/BLT.20.257386>.
- Malato, G. (2020), *Covid-19 infection in Italy Mathematical models and predictions*, <https://towardsdatascience.com/covid-19-infection-in-italy-mathematical-models-and-predictions-7784b4d7dd8d>.
- Oliveiros, B., Caramelo, L., Ferreira, N. C. ve Caramelo, F. (2020), Role of temperature and humidity in the modulation of the doubling time of COVID-19 cases [Preprint], *MedRxiv*, E-pub: 8.03.2020, <https://doi.org/10.1101/2020.03.05.20031872>.
- Önder, H. (2020), Short-term forecasts of the COVID-19 epidemic in Turkey: March 16–28, 2020, *Black Sea Journal of Health Science*, 3(2), 27–30.
- Roosa, K., Lee, Y., Luo, R., Kirpich, A., Rothenberg, R., Hyman, J. M., Yan, P., ve Chowell, G. (2020), Real-time forecasts of the COVID-19 epidemic in China from February 5th to February 24th, 2020, *Infectious Disease Modelling*, 5, 256–263.
- Shekhar, H. (2020), Prediction of spreads of COVID-19 in India from current trend. [Preprint]. *MedRxiv*, E-pub: 06.05.2020, <https://doi.org/10.1101/2020.05.01.20087460>.
- Shen, C. Y. (2020), A logistic growth model for COVID-19 proliferation: Experiences from China and international implications in infectious diseases, *International Journal of*

*Infectious Diseases*, <https://doi.org/10.1016/j.ijid.2020.04.085>.

Tsoularis, A. ve Wallace, J. (2002), Analysis of logistic growth models, *Mathematical Biosciences*, 179(1), 21–55.

Tuite, A. R. ve Fisman, D. N. (2020), Reporting, epidemic growth, and reproduction numbers for the 2019 novel coronavirus (2019-nCoV) epidemic, *Annals of Internal Medicine*, 172(8), 567–568.

Viboud, C., Simonsen, L. ve Chowell, G. (2016), A generalized-growth model to characterize the early ascending phase of infectious disease outbreaks, *Epidemics*, 15, 27–37.

Vikipedi: Özgür Ansiklopedi (2020), *Malthusçu büyüme örneği*, Erişim Tarihi: 02.06.2020, [https://tr.wikipedia.org/wiki/Malthusçu\\_Büyüme\\_Örneği](https://tr.wikipedia.org/wiki/Malthusçu_Büyüme_Örneği).

Wu, K., Darcet, D., Wang, Q. ve Sornette, D. (2020), Generalized logistic growth modeling of the COVID-19 outbreak in 29 provinces in China and in the rest of the world [Preprint], *MedRxiv*, E-pub: 16.03.2020, <https://doi.org/10.1101/2020.03.11.20034363>.