

Yayın Geliş Tarihi (Submitted): 25/04/2020

Yayın Kabul Tarihi (Accepted): 09/06/2020

Makele Türü (Paper Type): Araştırma Makalesi – Research Paper

ALFA GÜÇ BURR-XII DAĞILIMI VE BİR UYGULAMA

Selin TEKİN¹ ve Gamze ÖZEL²

ÖZET

Bu çalışmada, alfa güç Burr XII (AGBXII) dağılımı önerilerek dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu elde edilmiş ve grafikleri çizdirilmiştir. Yaşam, hazard ve kantil fonksiyonları hesaplanmış ayrıca çeyreklik değerleri, medyan, basıklık ve çarpıklık değerleri gibi önemli istatistik özellikleri elde edilmiştir. Daha sonra olabilirlik fonksiyonu ve olabilirlik denklemi elde edilmiş, gerçek veri üzerinden uygulama çalışması yapılmıştır. Parametre değerleri tahmin edilerek, gerçek veriye uyumu test edilmiştir. Hesaplanan uyum iyiliği değerlerine göre veri kümesine AGBXII dağılımının ters Rayleigh (TR) dağılımından daha iyi uyum sağladığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Alfa güç dönüşümü, Burr XII dağılımı, En Çok Olabilirlik Tahmini, Kantil Fonksiyonu

ALFA POWER BURR-XII DISTRIBUTION AND AN APPLICATION

ABSTRACT

In this study, by proposing the distribution of alpha power Burr XII (AGBXII), the probability density function, distribution function are obtained and the graphs are presented. Survival, hazard and quantile functions were derived, and important statistical properties such as quantile, median, kurtosis and skewness values were obtained. Then, the likelihood function and likelihood equation were obtained, and an application study was carried out on real data.

¹Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7604-1285>

²Sorumlu Yazar, Prof. Dr., Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3886-3074>

Parameter values were estimated and their compliance with the actual data was tested. According to the calculated goodness of fit values, AGBXII has been shown to better match to the data set the inverse Rayleigh (TR) distribution.

Keywords: Alpha power transformation, Burr XII distribution, Maximum likelihood estimation, Quantile function

1. GİRİŞ

Yaşam çözümlemesi, finans, sigortacılık gibi alanlarda klasik dağılımların veri modellemede yetersiz kaldığı görülmektedir. Bu sorun, dağılımların veri modelleme amacıyla daha esnek yapıda olması gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Bu gereklilik, bilinen dağılım ailelerinin genişletilmesiyle, yeni olasılık dağılım ailelerinin elde edilmesi üzerine yapılan çalışmaları arttırmıştır. Yeni dağılım aileleri tanımlamada üstelleştirme, dönüştürme, parametre ekleme gibi yöntemlerin yanı sıra yaygın olarak “üretici dağılımlar” kullanılmaktadır.

Burr XII dağılımı, Burr (1942) tarafından pozitif tanımlı bir raslantı değişkeni için önerilen sürekli bir olasılık dağılımıdır. Singh-Maddala dağılımı olarak da bilinen bu dağılım, en çok hane halkı gelirini modellemek için kullanılmaktadır. Burr-XII dağılımı ayrıca güvenilirlik, başarısızlık zamanı modellemesi ve kabul örnekleme planı gibi farklı alanlarda kullanılmıştır. (Gadde vd., 2015). Wang ve Keats (1996) bu dağılıma ait parametrelerin nokta ve aralık tahminlerini elde etmek için en çok olabilirlik yöntemini kullanmıştır. Abdel-Ghaly vd. (1997), yazılım güvenilirliğini ölçmek için bu dağılımdan yararlanmıştır. Zimmer vd. (1998) tarafından dağılımın güvenilirlik analizlerinde kullanılan diğer dağılımlarla ilişkisi incelenmiştir. Moore ve Papadopoulos (2000) üç farklı kayıp fonksiyonu dikkate alarak parametre ve güvenilirlik fonksiyonunun Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Wu vd. (2005), Burr XII dağılımının parametrelerinin nokta tahmin edicilerini türetmek için en çok olabilirlik yöntemini kullanmıştır. Patrícia vd. (2013) tarafından Kumaraswamy Burr XII (KwBXII) dağılımı olarak adlandırılan beş parametrelilik bir dağılım tanımlanmıştır.

İki parametrelilik Burr-XII dağılımına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_{BXII}(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\beta-1}(1+x^{\beta})^{-(\alpha+1)}, \quad x > 0 \text{ için} \quad (1)$$

Eşitlik (1)'e karşılık gelen dağılım fonksiyonu ise,

$$F_{BXII}(x; \alpha, \beta) = 1 - (1 + x^\beta)^{-\alpha}, \quad x > 0 \text{ için} \quad (2)$$

biçimindedir. Burada $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ şekil parametreleridir. $\alpha = 1$ ise, Burr-XII log-lojistik dağılıma indirgenir. Burr-XII dağılımına ilişkin yaşam ve hazard (tehlike) fonksiyonları ise sırasıyla

$$S_{BXII}(x; \alpha, \beta) = 1 - F_{BXII}(x) = (1 + x^\beta)^{-\alpha}, \quad (3)$$

$$h_{BXII}(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha \beta x^{\beta-1} (1+x^\beta)^{-(\alpha+1)}}{(1+x^\beta)^{-\alpha}} \quad (4)$$

olarak tanımlıdır (Gadde vd., 2015).

Alfa güç dönüşümü (alpha power transformation), günlük yaşamdaki verileri modellemek için dağılımları daha zengin ve esnek hale getiren yöntemlerden biridir. Bu yöntem, Mahdavi ve Kundu (2017) tarafından temel (baseline) dağılıma çarpıklık parametresi dâhil edilerek önerilmiştir. Ayrıca Mahdavi ve Kundu (2017) tarafından özel bir durum olarak alfa güç dönüşümlü üstel dağılımın özelliklerini incelemişlerdir. Literatürde bu dönüşüm ile elde edilen farklı dağılımlarda bulunmaktadır. Abdel Rahman ve El-Bassiouny (2017) alfa güç üstel Weibull dağılımını; Ünal vd. (2018) alfa güç ters üstel dağılımını; Dey vd. (2018) alfa güç dönüştürülmüş Lindley dağılımını, Ramadan ve Magdy (2018) alfa güç ters Weibull dağılımını, Ahmad (2018) genişletilmiş alfa güç dönüştürülmüş Weibull dağılımını, Dey vd. (2019) alfa güç dönüştürülmüş ters Lindley dağılımını, Nasiru vd. (2019) alfa güç dönüştürülmüş Frechet dağılımını, Hassan vd. (2019) ise alfa güç dönüştürülmüş güç Lindley dağılımını incelemiştir.

Alfa güç dönüşümlü sürekli bir X raslantı değişkenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_{APT}(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{\log \alpha}{\alpha-1} f(x) \alpha^{F(x)}, & \text{eğer } \alpha > 0 \text{ ve } \alpha \neq 1 \\ f(x) & \text{eğer } \alpha = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

Buna karşılık gelen dağılım fonksiyonu ise, aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$F_{APT}(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha^{F(x)} - 1}{\alpha - 1}, & \text{eğer } \alpha > 0 \text{ ve } \alpha \neq 1 \\ F(x) & \text{eğer } \alpha = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

Yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu ise sırasıyla

$$S_{APT}(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} (1 - \alpha^{F(x)-1}), & \text{eğer } \alpha > 0 \text{ ve } \alpha \neq 1 \\ 1 - F(x) & \text{eğer } \alpha = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

$$h_{APT}(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha^{F(x)-1}}{1-\alpha^{F(x)-1}} f(x) \log \alpha & , \text{ eğer } \alpha > 0 \text{ ve } \alpha \neq 1 \\ \frac{f(x)}{f(x)} & , \text{ eğer } \alpha = 0 \end{cases} \quad (4)$$

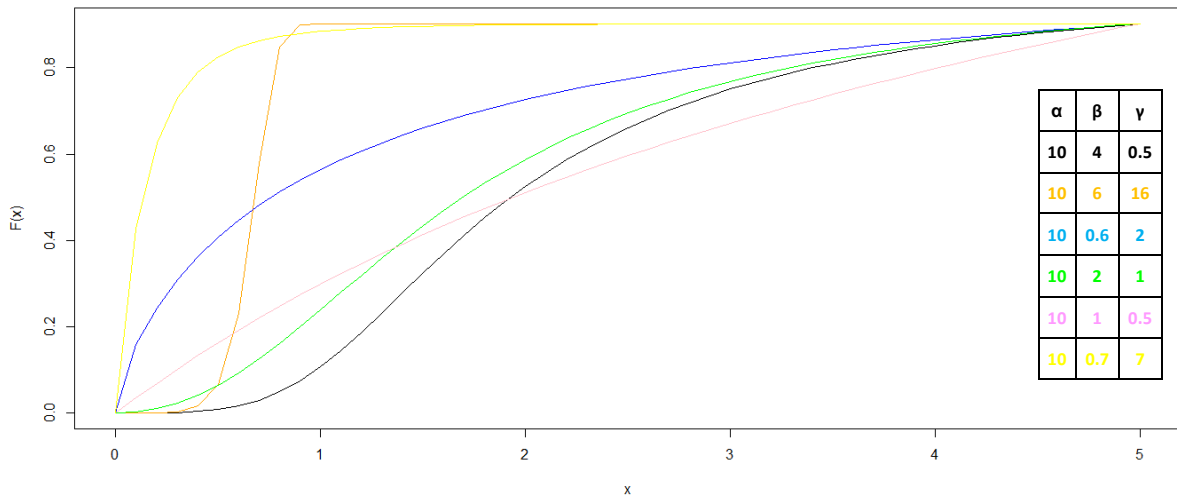
olarak tanımlıdır.

Bu çalışmada alfa güç dönüşüm yöntemi ile Burr-XII dağılımı kullanılarak alfa güç Burr-XII dağılımı (AGBXII) olarak adlandırılan yeni bir dağılım önerilmiştir. İkinci Bölüm’de önerilen dağılımın olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları elde edilerek grafikleri çizdirilmiştir. Üçüncü bölümde yaşam, hazard ve kantil fonksiyonlarına ulaşılmıştır. Ayrıca çeyreklik değerler, medyan, basıklık ve çarpıklık değerleri, olabilirlik fonksiyonu ve olabilirlik denklemi elde edilmiştir. Son bölümde ise gerçek veri kümesi üzerinden uygulama yapılarak parametre değerleri tahmin edilmiş ve önerilen dağılımın literatürdeki ters Rayleigh dağılımından üstünlüğü gösterilmiştir.

$$F_{AGBXII}(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha^{(1-(1+x^\beta)^{-\gamma})-1}}{\alpha-1} \quad \alpha, \beta, \gamma, x > 0, \alpha \neq 1 \quad (9)$$

$$f_{AGBXII}(x; \alpha, \beta, \gamma) = \beta \gamma \frac{\log(\alpha)x^{\beta-1}}{(\alpha-1)(1+x^\beta)^{1+\gamma}} \alpha^{(1-(1+x^\beta)^{-\gamma})}, \quad \alpha, \beta, \gamma, x > 0, \alpha \neq 1 \quad (10)$$

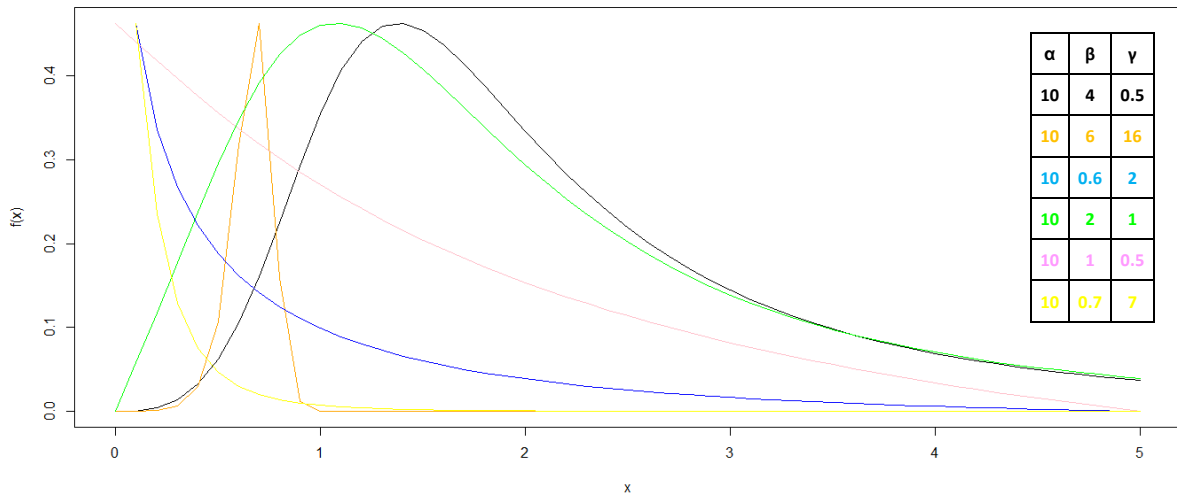
Şekil 1’de farklı parametre değerleri için AGBXII dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği görülmektedir.



Şekil 1. Farklı parametre değerleri için AGBXII dağılımının dağılım fonksiyonu

Şekil 1’de görüldüğü üzere çeşitli parametre değerleri için AGBXII için dağılım fonksiyonu küçük değerlerde 0’a, büyük değerlerde ise 1’e yaklaşmakta olup dağılım fonksiyonu özelliklerini sağladığı görülmektedir.

Şekil 2’de değişik parametre değerleri için AGBXII dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği görülmektedir:



Şekil 2. Farklı parametre değerleri için AGBXII dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

Şekil 2’de de görüldüğü üzere AGBXII dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu oldukça esnek olup çeşitli parametre değerleri için farklı şekillere sahiptir.

2. TEMEL ÖZELLİKLER

2.1. Yaşam Fonksiyonu ve Hazard Fonksiyonu

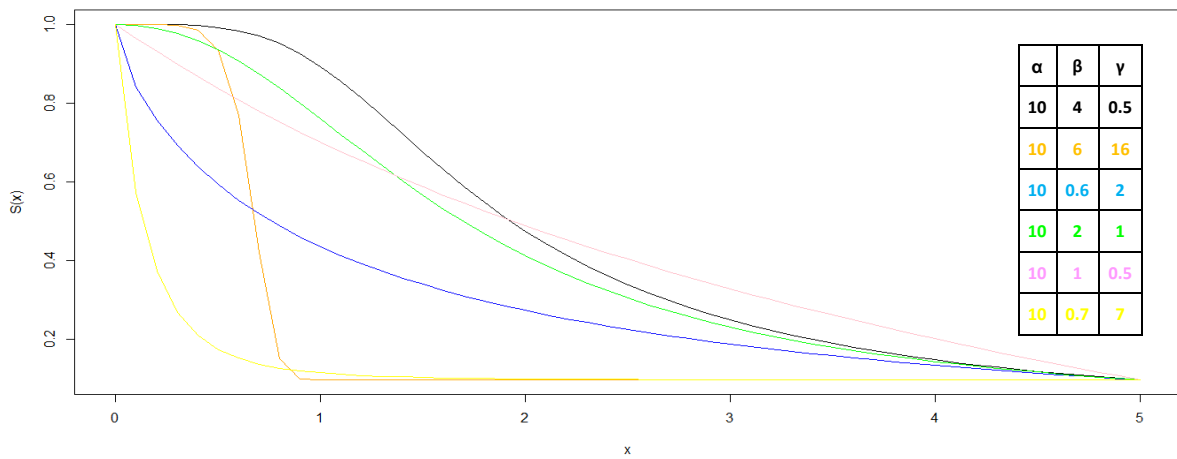
Yaşam fonksiyonu, yaşam sürelerinin olasılık dağılımını gösteren fonksiyondur. Yaşam fonksiyonu $S(x) = 1 - F(x)$ olarak ifade edilebilmekte olup bu eşitlik kullanılarak elde edilen AGBXII dağılımının yaşam fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$S_{AGBXII}(x) = 1 - \frac{\alpha^{(1-(1+x^\beta)^{-\gamma})} - 1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha - \alpha^{(1-(1+x^\beta)^{-\gamma})}}{\alpha - 1} \quad \alpha, \beta, \gamma, x > 0, \alpha \neq 1 \quad (11)$$

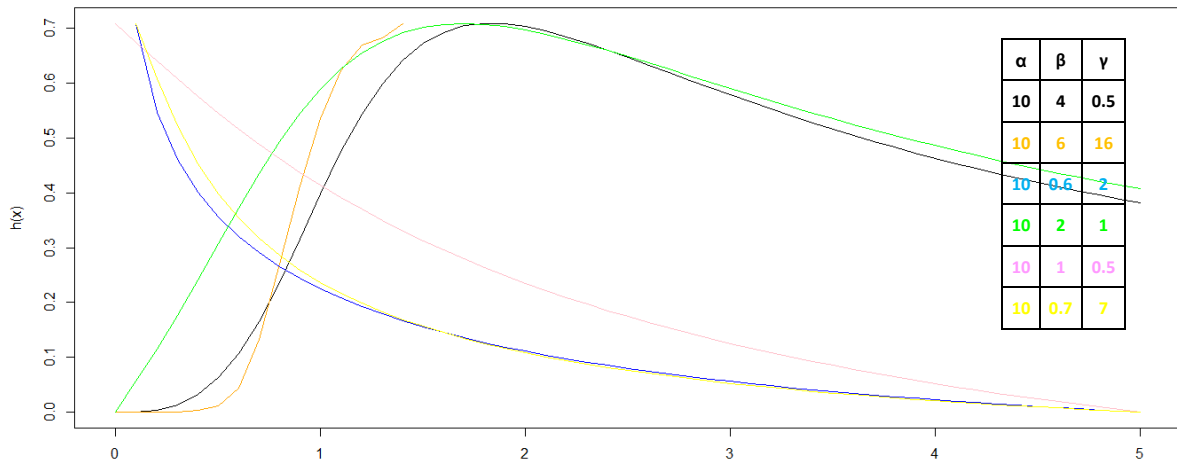
Sağ olan bir kişinin, belirli bir zamandaki ölüm olasılığı, taşıdığı ölüm riski vb. olarak ifade edilebilen hazard fonksiyonu ise $h(x) = f(x)/s(x)$ şeklinde elde edilmekte olup AGBXII dağılımının hazard fonksiyonu,

$$h_{AGBXII}(x) = \beta \gamma \log(\alpha) \frac{x^{(\beta-1)}}{(1+x^\beta)^{(1+\gamma)}} \frac{\alpha^{(1-(1+x^\beta)^{-\gamma})}}{\left(\alpha - \alpha^{(1-(1+x^\beta)^{-\gamma})}\right)}, \quad \alpha, \beta, \gamma, x > 0, \alpha \neq 1 \quad (12)$$

olarak yazılabilir. Farklı parametre değerleri için AGBXII dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu grafikleri aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 3. Farklı parametre değerleri için AGBXII dağılımının yaşam fonksiyonu



Şekil 4. Farklı parametre değerleri için AGBXII dağılımının hazard fonksiyonu

Şekil 4'e göre de AGBXII dağılımının esnekliği fonksiyonun sahip olduğu farklı parametre şekillerinden görülmektedir.

2.2. Kantil Fonksiyonu ve Çeyreklikler

AGBXII dağılımının kantil fonksiyonu $Q(u) = F_{AGBXII}^{-1}(u) = x$ dönüşümü hesaplanarak bulunur. $F(x) = u$ ise o halde,

$$\frac{\alpha^{1-(1+x^\beta)^{-\gamma}} - 1}{\alpha - 1} = u \quad \alpha, \beta, \gamma, x > 0, \alpha \neq 1, \quad (13)$$

yazılır. Buradan, x değeri

$$x = \left[\left(\frac{1}{1 - \log_\alpha(u(\alpha - 1) + 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (14)$$

elde edilir. Böylece, AGBXII dağılımının kantil fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Q(u) = \left[\left(\frac{1}{1 - \log_\alpha(u(\alpha - 1) + 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}} = \left[(1 - \log_\alpha(u(\alpha - 1) + 1))^{-1/\gamma} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (15)$$

Burada $u \sim Uniform(0,1)$ 'dir. $X \sim AGBXII(\alpha, \beta, \gamma)$ dağılımına ait p inci yüzdelik için kantil fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$X = \left[(1 - \log_\alpha(u(\alpha - 1) + 1))^{-1/\gamma} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad 0 < u < 1 \quad (16)$$

Yukarıdaki eşitlikte AGBXII dağılımına ait ilk üç çeyreklik olan Q_1, Q_2 ve Q_3 'ü elde etmek için sırasıyla Q_1 için $u=0.25$, Q_2 için $u=0.50$, Q_3 için $u=0.75$ yazılır. Medyan ise yine yukarıdaki eşitlikte $u=0.50$ alınarak elde edilir. O halde, AGBXII dağılımı için medyan değeri aşağıdaki gibidir:

$$M = \left[(1 - \log_\alpha \left(\frac{1}{2}(\alpha - 1) + 1 \right))^{-1/\gamma} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad 0 < u < 1 \quad (17)$$

Q_1 ve Q_3 ifadeleri ise sırasıyla,

$$Q_1 = \left[(1 - \log_\alpha \left(\frac{1}{4}(\alpha - 1) + 1 \right))^{-1/\gamma} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad (18)$$

$$Q_3 = \left[(1 - \log_\alpha \left(\frac{3}{4}(\alpha - 1) + 1 \right))^{-1/\gamma} - 1 \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (19)$$

olarak bulunur.

2.3. Çarpıklık ve Basıklık

Çarpıklık, bir raslantı değişkenin olasılık dağılımının simetrik olmayışının ölçülmesidir yani bir simetri ölçüsü olup Bowley'in çarpıklık ölçüsüne göre,

$$S = \frac{Q(3/4) - 2Q(1/2) + Q(1/4)}{Q(3/4) - Q(1/4)} \quad (20)$$

olarak ifade edilmektedir. Burada $Q(\cdot)$ kantil fonksiyonunu temsil etmektedir. $S < 0$ ise dağılım sola çarpık, $S > 0$ ise dağılım sağa çarpık, $S = 0$ ise dağılım simetriktir. Çarpıklık ölçüsü yardımıyla veri dağılımının şekli belirlenebilir.

Herhangi bir olasılık fonksiyonunun şekli ile ilgili parametrelerden bir tanesi de basıklık ölçüsüdür. Basıklık ölçüsü, dağılım eğrisindeki bir tepe noktasının sivriliğini ifade eder. Normal dağılımın basıklık katsayısı 3 olup dağılım normal dağılım ile kıyaslanırsa; dağılımdan elde edilen değer 3'ten küçük ise basık, 3'ten büyük ise sivri olarak yorumlanır. Moor'un basıklık ölçüsü,

$$K = \frac{Q(7/8) - Q(5/8) - Q(3/8) + Q(1/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)} \quad (21)$$

olarak ifade edilmektedir. Bowley'in çarpıklığı ve Moors'un basıklığı Eşitlik (15)'te verilen $Q(u)$ ile elde edilebilir (Ünal vd., 2018).

Tablo 1. Farklı parametre değerleri için AGBXII dağılımının çeyreklik, çarpıklık ve basıklık katsayıları

Parametreler			Q ₁	Medyan	Q ₃	Çarpıklık	Basıklık	
α	β	γ						
0.5	0.3	3	0.0001	0.0043	0.0746	0.8876	6.2826	
		8	0.000005	0.0001	0.0018	0.8605	4.8242	
		20	0.0000002	0.000006	0.00007	0.8496	4.4037	
	2	3	0.2719	0.4423	0.6775	0.1594	0.4447	
		8	0.1646	0.2632	0.3901	0.1250	0.3370	
		20	0.1037	0.1648	0.2414	0.1125	0.2994	
3	0.8	5	0.9511	1.1988	1.5320	0.1472	0.4356	
		7	0.9648	1.1383	1.3562	0.1136	0.3314	
		18	0.9861	1.0516	1.1258	0.0620	0.1751	
12		5	1.0961	1.3656	1.7363	0.1579	0.4618	
		7	1.0678	1.2493	1.4830	0.1257	0.3603	
		18	1.0258	1.0904	1.1656	0.0759	0.2085	
0.8	0.4	3	0.0024	0.0274	0.2182	0.7686	3.5332	
4			0.0153	0.1241	0.7326	0.6965	2.8445	
15			0.0536	0.3114	1.4748	0.6371	2.4828	
0.8		9	0.0001	0.0014	0.0095	0.7201	2.7421	
			4	0.0008	0.0058	0.0267	0.6153	2.0651
			15	0.0027	0.0130	0.0469	0.5343	1.7261

Tablo 1'de parametrelerin farklı değerleri için AGBXII dağılımının çarpıklık, basıklık, medyan, Q₁ ve Q₃ değerleri elde edilmiştir. Çarpıklık ve basıklığın tüm parametre değerleri

için pozitif olduğu görülmektedir. Genel olarak α , β ve γ parametre değerlerinin arttıkça çarpıklığın ve basıklığın azaldığı görülmektedir. Çarpıklık değerleri pozitif olduğu için dağılımın genel olarak sağa çarpık bir dağılım olduğu söylenebilir. Basıklık değerleri ise farklı parametreler için değişiklik göstermektedir. Normal dağılıma göre kıyaslandığında 3'ten büyük ve küçük değerler görülmektedir. Bu durumda dağılımın değişik parametre değerleri için basık veya sivri şekil aldığı söylenebilir.

2.4. Sıralı İstatistikler

Son zamanlarda çıkarsamalı istatistik teorisinde sıralı istatistiklerin çok önemli olduğu görülmektedir. Sıra istatistiklerinin dağılımdan bağımsız olma özelliği, yoğunluk fonksiyonu ve momentlerinin elde edilebilmesi özellikleri ve örneklem hakkındaki tüm bilgiyi içermesi sayesinde istatistiksel çalışmalarda önemli bir yere sahiptir. Teori ve uygulamanın birçok alanında kullanılmaktadır.

$f(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip kitleden seçilen rasgele örneklem $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$, $r = 1, 2, \dots, n$ raslantı değişkenlerinin küçükten büyüğe sıralanmış biçimi $X_1 < X_2 < X_3 \dots < X_n$, $r = 1, 2, \dots, n$ olsun. Buna göre X_r rasgele örneklemin r inci sıralı istatistiğini göstermektedir. r inci sıralı istatistiğe ait olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_{r;n}(x) = \frac{n!}{(r-n)!(n-r)!} f(x_r) [F(x_r)]^{r-1} [1 - F(x_r)]^{n-r} \quad (22)$$

1 inci ve n inci sıralı istatistiğe ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları ise,

$$f_{1;n}(x) = n f(x) [1 - F(x)]^{n-1} \quad (23)$$

$$f_{n;n}(x) = n f(x) [F(x)]^{n-1} \quad (24)$$

şeklinde ifade edilir (Akdi, 2010). O halde AGBXII dağılımı için r . sıralı istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_r}(x) = \frac{n!}{(r-n)!(n-r)!} \left[\beta \gamma \frac{\log(\alpha)}{(\alpha-1)} \frac{x^{(\beta-1)}}{(1+x\beta)^{(1+\gamma)}} \alpha^{\left(1 - \frac{1}{(1+x\beta)^\gamma}\right)} \right] \left[\frac{\alpha^{(1-(1+x\beta)^{-\gamma})} - 1}{\alpha - 1} \right]^{r-1} \left[1 - \left[\frac{\alpha^{(1-(1+x\beta)^{-\gamma})} - 1}{\alpha - 1} \right] \right]^{n-r} \quad (25)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitliğe göre 1 inci ($r = 1$) ve n inci ($r = n$) sıralı istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise sırasıyla,

$$f_{X_1}(x) = n \left[\beta \gamma \frac{\log(\alpha)}{(\alpha-1)} \frac{x^{(\beta-1)}}{(1+x^\beta)^{(1+\gamma)}} \alpha^{\left(1 - \frac{1}{(1+x^\beta)^\gamma}\right)} \right] \left[1 - \left[\frac{\alpha^{(1-(1+x^\beta)^{-\gamma})-1}}{\alpha-1} \right] \right]^{n-1} \quad (26)$$

$$f_{X_n}(x) = n \left[\beta \gamma \frac{\log(\alpha)}{(\alpha-1)} \frac{x^{(\beta-1)}}{(1+x^\beta)^{(1+\gamma)}} \alpha^{\left(1 - \frac{1}{(1+x^\beta)^\gamma}\right)} \right] \left[\frac{\alpha^{(1-(1+x^\beta)^{-\gamma})-1}}{\alpha-1} \right]^{n-1} \quad (27)$$

şeklinde yazılabilir.

2.5. Tahmin

$X_1, X_2, X_3 \dots X_n$, Ω kümesinde değerler alan θ parametresine bağlı $f(x; \theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Bu raslantı değişkenlerinin n değişkenli bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta)$ ile verilsin. X_i 'lerin değişmez olduğu düşülsün. Bu bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu θ 'nın bir fonksiyonu olduğuna göre $L(\theta; x_1, x_2 \dots x_n)$ biçiminde gösterilir. L fonksiyonuna olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k|\theta) \quad (28)$$

biçimindedir.

" $\ln L$ " logaritması alınmış olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre tikel türevinin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen olabilirlik denklemi,

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta; x_1, x_2 \dots x_n) = 0 \quad (29)$$

olarak yazılır (Akdi, 2010). Buradan AGBXII dağılımı için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta) = \frac{(\beta\gamma \ln(\alpha))^n \prod_{i=1}^n x_i^{(\beta-1)} \alpha^{\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(1+x_i^\beta)^\gamma}\right)}}{(\alpha-1)^n \prod_{i=1}^n (1+x_i^\beta)^{(1+\gamma)}} \quad (30)$$

olarak elde edilir. Logaritması alınan olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\ln L(\theta) = n \ln(\beta\gamma \ln(\alpha)) + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \ln(\alpha) \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(1+x_i^\beta)^\gamma}\right) - n \ln(\alpha - 1) - (1+\gamma) \sum_{i=1}^n (1+x_i^\beta) \quad (31)$$

biçimindedir. Olabilirlik denklemi için $\ln L(\theta)$ ifadesinin parametrelere göre 1 inci türevlerinin sıfıra eşitlenmiş hali aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \alpha} = \frac{n}{\alpha \ln \alpha} - \frac{n}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(1+x_i^\beta)^\gamma} \right) = 0 \quad (32)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - (\ln x) x^\beta \frac{n+n\gamma}{x^{\beta+1}} + (\ln \alpha) \sum_{i=1}^n \gamma \ln(x_i) \frac{x_i^\beta}{(x_i^\beta + 1)^{\gamma+1}} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \gamma} = \frac{n}{\gamma} - n \ln(x^\beta + 1) + (\ln \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i^\beta + 1)}{(1+x_i^\beta)^\gamma} = 0 \quad (34)$$

Doğrusal olmayan denklemler içeren olabilirlik fonksiyonu nedeniyle R paket programında “nlreg” paketi kullanılarak parametre tahminleri elde edilmiştir.

3. UYGULAMA

Bu bölümde AGBXII modelinin gerçek veriye uygunluğu araştırılmıştır. Ters Rayleigh (TR) dağılımı ile daha önceden modellenmiş olan veri seti kullanılmıştır. Ardından bu iki dağılımın kıyaslaması yapılmıştır. Önerilen AGBXII dağılımının fit değerlerini daha önceden geliştirilen dağılımla karşılaştırmak için Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Bayesci Bilgi Kriteri (BIC) hesaplanmıştır. Bu çalışmada yararlanılan veri kümesi radyoterapi ile tedavi edilen bu hastalar baş ve boyun kanseri hastası 55 kişinin sağ kalım sürelerine aittir. Efron (1988) tarafından elde edilen bu veri kümesine ilişkin betimsel istatistikler Tablo 2 ve Tablo 3’te sırasıyla verilmiştir.

Tablo 2. Radyoterapi ile tedavi edilen bu hastalar baş ve boyun kanseri hastası 55 kişinin sağ kalım süreleri

6.537,10.42,14.48,16.10,22.70,3441.55,4245.28,49.40,53.62,63.64,83,84,91,108,112,129,133,133,139,140,140,146,149,154,157,160,160,165,146,149,154,157,160,160,165,173,176,218,225,241,248,273,277,297,405,417,420,440,523,583,594,1101,1146,1417

Tablo 3. Veri kümesinin dağılımının çeyreklik, çarpıklık ve basıklık katsayıları

Ortalama	Medyan	Tepe Değeri	Standart Sapma	Varyans	Çarpıklık	Basıklık	25. Yüzdelik Değer	75.Yüzdelik Değer
375.2	157	160	737.4	543750.2	4.22	18.859	112	277

Tablo 3 incelendiğine veri setinin çarpıklık değerinden sağa çarpık, basıklık değerinden ise leptokurtik olduğu görülmüştür. Uyum iyiliği istatistikleri ve parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicisi sırasıyla Tablo 4 ve 5'te sunulmaktadır:

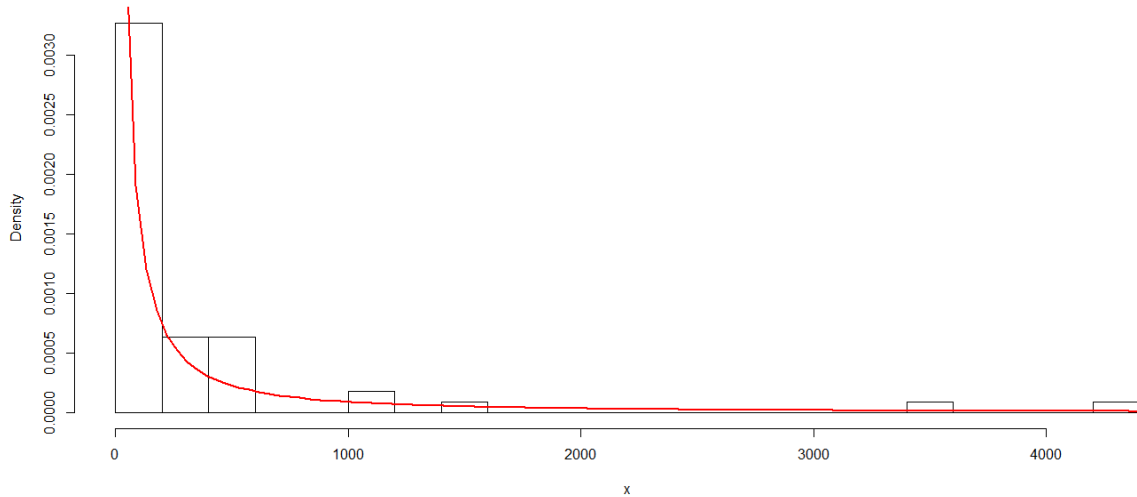
Tablo 4. Veri seti için uyum iyiliği testlerinin değerleri

Dağılım	AIC	BIC	LL
AGBXII	789.1802	795.2022	391.5901
TR	840.1341	842.0660	419.067

Tablo 5. Veri seti için parametrelerin en çok olabilirlik tahmin değerleri

Dağılım	Parametre Tahmin Değerleri
AGBXII	650, 0.99, 0.48
TR	741.3652

Tablo 4'te görüldüğü üzere diğer dağılımla karşılaştırıldığında AGBXII dağılımının AIC ve BIC değerleri daha düşüktür. Veri setine TR dağılımından daha iyi uyum sağladığı söylenebilir.



Şekil 5. AGBXII dağılımının gerçek veriye uyum grafiği

AGBXII dağılımına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu ile deneysel olasılık yoğunluk fonksiyonun grafiği Şekil 5'te görülmekte olup AGBXII dağılımının veriye genel olarak uyum sağladığı söylenebilir.

4. SONUÇ

Genelleştirilmiş dağılımlar günümüzde klasik istatistiksel dağılımları gerçek yaşamdaki verilere daha uygun hale getirilerek elde edilen, daha esnek yapıda olan ancak klasik bir dağılıma göre daha fazla parametre içeren modifiye edilmiş dağılımlardır. Burr XII dağılımı

özellikle yaşama analizi ve güvenilirlik kuramında kullanılan esnek bir dağılımdır. Ancak Burr XII dağılımının yeterince esnek olmaması nedeniyle literatürde bu dağılımın genelleştirilmiş biçimleri mevcuttur. Alfa güç dönüşüm yöntemi son zamanlarda genelleştirilmiş dağılımlara ulaşmada kullanılan popüler yöntemlerdendir.

Bu çalışmada, alfa güç Burr XII (AGBXII) dağılımı önerilmiştir. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu elde edilerek grafikleri çizdirilmiştir. Yaşam, hazard ve kantil fonksiyonları hesaplanmış ayrıca çeyreklik değerleri, medyan, basıklık ve çarpıklık değerleri önemli istatistik özellikleri elde edilmiştir. Daha sonra olabilirlik fonksiyonu ve olabilirlik denklemi elde edilmiş, gerçek veri üzerinden uygulama çalışması yapılmıştır. Parametre değerleri tahmin edilerek, gerçek veriye uyumu test edilmiştir. Hesaplanan uyum iyiliği değerlerine göre veri setine ters Rayleigh (TR) dağılımından daha iyi uyum sağladığı söylenebilir.

KAYNAKÇA

- Mahdavi A. and Kundu, D. (2017), A new method for generating distributions with an application to exponential distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46, 13, 6543–6557.
- Abdel Rahman N.S. and El-Bassiouny A.H. (2017), On the alpha-power exponential Weibull distribution, *The 2nd National of Mathematics and Its Applications (NCMA17)*, 1-18.
- Abdel-Ghaly A.A., Al-Dayian G.R. and Al-Kashkari F.H. (1997)., The use of Burr type XII distribution on software reliability growth modeling, *Microelectronics and Reliability*, 37, 305-313.
- Ahmad Z. (2018), The Zubair-G family of distributions: Properties and applications, *Annals of Data Science*, 1-14.
- Akdi Y. (2010), *Matematiksel İstatistiğe Giriş*, Genişletilmiş 2. Baskı, Gazi Kitabevi.
- Burr I.W. (1942), Cumulative frequency functions, *Annals of Mathematical Statistics*, 13, 215-232.
- Dey S., Ghosh I. and Kumar D. (2018), Alpha-power transformed Lindley distribution: properties and associated inference with application to earthquake data, *Annals of Data Science*, 1-28.

- Dey S., Nassar M. and Kumar, D. (2019), Alpha power transformed inverse Lindley distribution: A distribution with an upside-down bathtub-shaped hazard function, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 348, 130-145.
- Efron B. (1988), Logistic regression, survival analysis and the Kaplan-Meier curve, *Journal of the American Statistical Association*, 83(402), 414-425.
- Gadde Srinivasa R., Aslam M., Kundu D. (2015), Burr-XII distribution parametric estimation and estimation of reliability of multicomponent stress-strength. *Communication in Statistics- Theory and Methods*, 44, 4953–4961.
- Hassan, A.S., Elgarhy, M., Mohamd, R.E., Alrajhi, S. (2019), On the Alpha power transformed power Lindley distribution, *Journal of Probability and Statistics*, <https://doi.org/10.1155/2019/8024769>.
- Moore, D., Papadopoulos, A.S. (2000), The Burr type XII distribution as a failure model under various loss functions, *Microelectronics and Reliability*, 40, 2117-2122.
- Nasiru S., Mwitia P.N. and Ngesa O. (2019), Alpha power transformed Frechet distribution. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 13(1), 129- 141.
- Patrícia F., Paranaíba E.O., Cordeiro G.M. and Pascoa M.A.R. (2013), The Kumaraswamy Burr XII distribution: theory and practice, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83(11), 2117-2143.
- Ramadan, D.A., and Magdy W. (2018), On the Alpha-power inverse Weibull distribution. *International Journal of Computer Applications*, 181, 11, 6-11.
- Ünal C., Cakmakyapan S. and Özel G. (2018), Alpha power inverted exponential distribution: properties and application, *Gazi University Journal of Science*, 31(3), 954-965.
- Wang F.K. and Keats J.B. (1996), Maximum likelihood estimation of the Burr type XII parameters with censored and uncensored data, *Microelectronics and Reliability*, 36, 359-362.
- Wu J.W. and Yu H.Y. (2005), Statistical inference about the shape parameter of the Burr type XII distribution under the failure-censored sampling plan, *Applied Mathematics and Computation*, 163, 443-482.
- Zimmer W.J., Keats J.B., and Wang F.K. (1998), The Burr XII distribution in reliability analysis, *Journal of Quality Technology*, 30, 386-394.