



## KİSMİ YAYILI YÜK ETKİSİNDEKİ NANO KİRİŞLERİN DİNAMİK ANALİZİ

Mustafa ARDA\*

Trakya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Edirne, Türkiye

### Anahtar Kelimeler

*Kısmi Yayılı Yük,  
Nano-Kiriş,  
Yerel Olmayan Elastisite,  
Titreşim Analizi,  
Heaviside Fonksiyonu.*

### Öz

Kısmi yayılı yük etkisindeki karbon nanotüp kirişlerin dinamik analizi gerçekleştirilmiştir. Nano kiriş için hareketin yönetici denklemi ve sınır şartları Eringen'in Yerel Olmayan Elastisite Teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Kısmi yayılı yük etkisi Heaviside fonksiyonu ile modellenmiştir. Oluşturulan model, nano kirişin parçalara bölünmesiyle elde edilen model sonuçlarıyla karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Nano kiriş titreşim frekansının yerel olmayan parametre, boyutsuz yayılı yük, yükün başlangıç noktası gibi parametrelerle değişimi incelenmiştir. Farklı titreşim frekanslarında çeşitli parametrelerin nano kirişin genlik değerlerine olan etkisi gösterilmiştir. Nano kirişin parçalara ayrılmasıyla artan süreklilik şartı sayısının oluşturduğu yüksek boyutlu matrislerin çözümüne alternatif olarak oluşturulan modelde dört sınır şartıyla çözüme ulaşılmıştır. Bu çalışmanın sonuçları bakteri veya virüs gibi nano kütle sensörlerinin modellenmesinde kullanılabilir.

## DYNAMIC ANALYSIS OF NANOBEAMS UNDER THE EFFECT OF PARTIAL UNIFORM LOAD

### Keywords

*Partial Uniform Load,  
Nanobeam,  
Nonlocal Elasticity,  
Vibrational Analysis,  
Heaviside Function.*

### Abstract

Dynamic analysis of nanobeams under the effect of partial uniform transverse load has been carried out. Governing equation of motion and boundary conditions have been obtained using Eringen's Nonlocal Elasticity Theory. Partial uniform load effect is modeled with Heaviside function. Present model results have been compared and validated with fragmented model results. Effects of nonlocal parameter, dimensionless uniform load, application point of uniform load to the vibration frequency of nanobeam have been investigated. Effect of various parameters on the amplitude of nanobeam has been shown at different vibration frequencies. Instead of fragmented model which needs extra continuum boundary conditions which leads to increase in size of the matrices, present model needs four boundary conditions. Present study results could be useful at modeling of nano mass sensors like bacteria or virus.

### Alıntı / Cite

Arda, M., (2020). Kısmi Yayılı Yük Etkisindeki Nano Kirişlerin Dinamik Analizi, Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi, 8(2), 417- 428.

### Yazar Kimliği / Author ID (ORCID Number)

M. Arda, 0000-0002-0314-3950

### Makale Süreci / Article Process

<b>Başvuru Tarihi / Submission Date</b>	08.01.2020
<b>Revizyon Tarihi / Revision Date</b>	06.04.2020
<b>Kabul Tarihi / Accepted Date</b>	19.04.2020
<b>Yayın Tarihi / Published Date</b>	25.06.2020

### 1. Giriş (Introduction)

Karbon nanotüpler (KNT), çağımızın popüler ileri fonksiyonel malzemelerdendir. Malzemenin istenilen özelliklerde nano boyutta modellenmesi fikri ilk olarak (Feynman 2011) tarafından ortaya atılmıştır. Iijima'nın (1991) KNT'leri keşfetmesiyle bilim dünyasının nano boyuttaki yapılarla ilgili çalışmaları da artmıştır. Bakteri, virüs gibi çok küçük boyuttaki yaşam formlarının tespitinde nano-kütle sensörleri (Li ve Chou, 2006; Elishakoff, 2013) gibi nano-elektromekanik araçların modellenmesi ve üretimi karbon nanotüplerin gelecekteki uygulamalarından olacağı düşünülmektedir.

\* İlgili yazar / Corresponding author: mustafaarda@trakya.edu.tr, +90-284-226-1217 (1101)

Karbon nanotüplerin mekanik davranışlarının modellenmesinde çeşitli teoriler kullanılmaktadır. Sürekli ortam mekaniği yaklaşımı boyut etkisinden dolayı nano ölçekli yapılarda doğru sonuçlar vermemektedir. Eringen (Eringen ve Edelen, 1972; Eringen, 1983) tarafından önerilen Yerel Olmayan Elastisite Teorisi, klasik sürekli ortam mekaniğinden farklı olarak küçük ölçek ve uzak mesafe etkisini göz önüne almıştır. Eringen, Yerel Olmayan Elastisite Teorisi'ni ayırık model olan Kafes Dinamiği dalga yayılımı sonuçlarıyla kıyaslayarak geçerliliğini sağlamıştır. Bu varsayımıyla ayırık ve sürekli modelleri tek bir model altında bir araya getirmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisinin dışında gerinim gradyanları (Hosseini vd., 2017), modifiye gerilme çifti (Mohammad-Abadi ve Daneshmehr, 2014), doublet mekaniği (Gul vd., 2017; Gul ve Aydogdu, 2017; 2018) ve peridinamik (Oterkus vd., 2015) gibi teoriler de kullanılmaktadır.

Karbon nanotüplerin dış yük etkisi altındaki statik ve dinamik davranışıyla ilgili çalışmalar literatürde yer almaktadır. (Dequesnes vd., 2004) karbon nanotüplerin nano-elektromekanik anahtarlama elemanı olarak modellenmesini moleküler dinamik, doğrusal ve doğrusal olmayan kiriş teorilerini kullanarak gerçekleştirmişlerdir. (Wang ve Shindo, 2006) karbon nanotüplerin statik eğilme ve burkulma problemleri için yerel olmayan elastisite modelini geliştirmişlerdir. (Gong vd., 2008) karbon nanotüplerin statik ve dinamik karakteristiklerini moleküler dinamik kullanarak incelemişlerdir. (Reddy ve Pang, 2008) yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerini yeniden formüle etmişler ve nano-kirişlerin statik eğilme, titreşim ve burkulma problemlerini çeşitli sınır şartlarında incelemişlerdir. (Aydogdu, 2009) ise genel yerel olmayan kiriş teorisini nano-kirişlerin eğilme, burkulma ve titreşimi için oluşturmuştur. (Civalek vd., 2009) karbon nanotüplerin statik eğilme problemini diferansiyel kuadratür metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Ankastre-serbest karbon nanotüplerin statik eğilme ve burkulma analizi (Akgöz vd., 2011) tarafından yapılmıştır. Elastik zemin üzerindeki ankastre kirişlerin (Avcar, 2010) ve Winkler zemin üzerindeki fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerine sahip kirişlerin dinamik davranışı (Avcar ve Mohammed, 2017) tarafından incelenmiştir. Değişken kesitli kolonların burkulma analizi ise Ritz yöntemi kullanılarak Akgöz (2019) tarafından gerçekleştirilmiştir. Üçgen kesitli karbon nanotüplerin burulma davranışı (Yaylı, 2013) ve karbon nanotüplerin çeşitli sınır şartlarında eksenel titreşimi (Yaylı, 2014) tarafından incelenmiştir.

(Janghorban ve Zare, 2012) fonksiyonel derecelendirilmiş karbon nanotüplerin eğilme davranışını incelemişlerdir. (Shaban ve Alibeigloo, 2014) elastik ortam içinde yer alan karbon nanotüplerin eğilme ve serbest titreşim analizini üç boyutlu elastisite teorisini kullanarak gerçekleştirmişlerdir. (Wu vd., 2015) nano-kabloların elastik davranışına yüzey gerilmeleri ve yerel olmayan elastisite etkilerini araştırmışlardır. Akgöz ve Civalek karbon nanotüplerin eğilme analizini modifiye edilmiş gerilme çifti ve uzama gradyanı teorileri (2012) ve elastik ortam etkisiyle birlikte yüksek mertebeden kayma deformasyon teorileri ve modifiye edilmiş uzama gradyanları teorisini (2016) kullanarak incelemişlerdir. Tek katmanlı grafen yapıların eğilme ve titreşim analizi (Demir ve Civalek, 2016) ve gözenekli yapıya sahip nano çubukların zorlanmış titreşim analizi (Akbaş, 2019) tarafından yapılmıştır. Elastik kısıtlarla sınırlandırılmış karbon nanotüplerin burkulma (Yaylı, 2016; Yaylı, 2017) ve titreşim (Yaylı, 2016; 2018) analizleri Yaylı tarafından gerçekleştirilmiştir.

Kısmi yayılı yük etkisi altındaki nano-kirişlerin statik analizi daha önceki çalışmada ele alınmıştı (Arda ve Aydogdu, 2016). Bu makalenin konusu ise kısmi yayılı yük etkisindeki nano-kirişlerin dinamik davranışdır. Kısmi yayılı yük etkisindeki nano-kiriş için hareketin yönetici denklemi ve sınır şartları Hamilton prensibi ve Yerel Olmayan Elastisite Teorisi kullanılarak elde edilecektir. Hareketin yönetici diferansiyel denkleminin çözümü iki farklı analitik yöntem kullanılarak gerçekleştirilecektir. Genellikle bu tür problemlerin çözümünde kullanılan sürekliliğin parçalara ayrılması yöntemiyle birlikte kısmi yayılı yükün Heaviside ağırlık fonksiyonu kullanılarak modellenmesiyle oluşturulan modelin çözümü kullanılacaktır. Nano-kiriş dinamiğinin yerel olmayan parametre, boyutsuz yayılı yük parametresi ve yükün uygulanmaya başlama noktası gibi etkilerle değişimi incelenecektir. Bahsi geçen parametrelerin belirli titreşim frekanslarında nano-kiriş genlik değerine olan etkisi gösterilecektir.

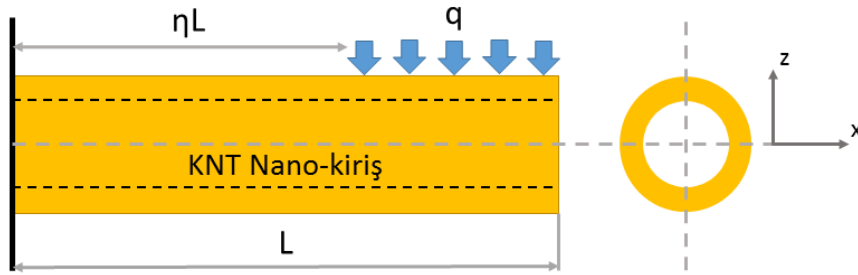
## 2. Analiz (Analysis)

Şekil (1)'de görülen  $L$  uzunluğunda dairesel kesite sahip kısmi yayılı yük etkisi altındaki nano-kiriş ele alınmış olsun. Kirişin  $z$  doğrultusundaki hareketinin yönetici denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$EI \left( \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \right) = -\rho A \left( \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \right) - q(x, t) \quad (1)$$

burada  $E$  kirişin elastisite modülünü,  $I$  kirişin atalet momentini,  $\rho$  kirişin yoğunluğunu,  $A$  kirişin kesit alanını,  $w(x,t)$   $z$  doğrultusundaki düşey yer değiştirme fonksiyonunu,  $q(x,t)$  ise kısmi yayılı yükü ifade etmektedir. Şekil (1)'de görülen  $\eta L$  ise yayılı yükün başlangıç noktasını belirtmektedir. Kısmi yayılı yükün tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir:

$$q(x, t) = q_0(x)e^{j\omega t} \text{ ve } q_0 = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < \eta L \\ q_0 & \text{eğer } x \geq \eta L \end{cases} \quad (2)$$



**Şekil 1.** Kısmi Yayılı Yük Etkisindeki KNT Nano-Kiriş Modeli (CNT Nanobeam Model under the Effect of Partial Uniform Load)

Eşitlik (1)'de yer alan hareketin yönetici denkleminin çözümü literatürde yer alan çalışmalarda sürekli yapının parçalara ayrılarak her bir parça için hareketin diferansiyel denkleminin ayrı ayrı yazılması ve çözülmesiyle elde edilmektedir. Bu yöntem alternatif olarak kısmi yayılı yükün süreklilik içinde fonksiyonel olarak tanımlanmasıyla hareketin diferansiyel denklemi çözülebilir. Nano-kiriş için hareketin yönetici denklemi Hamilton prensibi ve yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak sonraki bölümde elde edilecektir.

## 2.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi (Nonlocal Elasticity Theory)

Elastik sürekli ortamın modellenmesine boyut etkisini dahil etmek için yerel olmayan temel bağıntıyı ifade etmek gerekirse (Eringen, 1983; 2004):

$$(1 - \mu \nabla^2) \tau_{kl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

burada  $\tau_{kl}$  ve  $\varepsilon_{kl}$  yerel olmayan gerilme ve gerinme tensörlerini,  $\nu$  Poisson oranını,  $\varepsilon_{rr}$  hacimsel genleşmeyi ( $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ),  $\delta_{kl}$  kroneker delta'yı,  $\mu = (e_0 a)^2$  yerel olmayan parametreyi,  $a$  karakteristik uzunluğu ve  $e_0$  ise Eringen sabitini ifade etmektedir. Eringen  $e_0$  sayısını atomik kafes dinamiği aksenal dalga yayılımı sonuçlarından faydalanarak 0.39 olarak belirlemiştir (Eringen, 2004). (Aydogdu, 2012)  $e_0$  parametresinin aksenal dalga yayılımı için malzeme ve uzunluğa bağlı olduğunu göstermiştir.

Eşitlik (3) bir boyutlu olarak ifade edilirse:

$$\left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (4)$$

burada  $\varepsilon_{xx}$  aksenal doğrultudaki uzamayı,  $\sigma_{xx}$  ise aksenal doğrultudaki gerilmeyi ifade etmektedir. Nano-kiriş için aksenal kuvvet ve moment bileşikleri yazılacak olursa:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \quad (5a)$$

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA \quad (5b)$$

burada  $A$  nano-kirişin kesit alanını ifade etmektedir. Kuvvet ve moment bileşikleri, yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak yazılırsa yerel aksenal kuvvet ve moment bileşikleri elde edilir:

$$N - \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = N^L \quad (6a)$$

$$M - \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = M^L \quad (6b)$$

burada  $N^L$  ve  $M^L$  yerel kuvvet ve moment bileşikleridir.

## 2.2. Nano-Kirişin Parçalara Ayrılarak Çözümü (Multisegmented Analysis of Nanobeam)

Nano-kirişin  $z$  doğrultusundaki hareketinin yönetici denklemi ve sınır şartları, Hamilton prensibi kullanılarak elde edilecektir. Nano-kiriş için toplam enerji değişimi Hamilton prensibine göre ifade edilecek olursa (Reddy, 2002):

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta E_W + \delta E_K - \delta E_P] dt = 0 \quad (7)$$

burada  $E_W$  dış kuvvetlerin yaptığı toplam işi,  $E_K$  toplam kinetik enerjiyi ve  $E_P$  toplam potansiyel enerjiyi ifade eder.  $t_1$  ve  $t_2$  sınırları ise varyasyonel analiz yapıldığı zaman aralığını ifade etmektedir. Enerjiler yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak nano-kiriş için yazıldığı takdirde (Adali, 2008):

$$E_W = - \int_{\eta L}^L q w dx - \int_{\eta L}^L \left[ \mu \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] w dx \quad (8a)$$

$$E_K = \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^L \left[ \mu \rho A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \quad (8b)$$

$$E_P = \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (8c)$$

burada  $I$  nano-kirişin atalet momentini ve  $\rho$  yoğunluğunu ifade etmektedir. Eşitlikler (8a)-(8c), Eşitlik (7)'de yerine yazılırsa:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\eta L}^L \left\{ -q + \left[ \mu \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) \right] \right\} \delta w dt dx - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\mu \left[ \frac{\partial q}{\partial x} \right] \right\} [\delta w(L) - \delta w(\eta L)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -\left[ \rho A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] + \left[ \mu \rho A \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \right] - \left[ EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \right] \right\} \delta w dt dx - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ EI \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right] - \left[ \mu \rho A \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) \right] \right\} [\delta w(L) - \delta w(0)] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\left[ EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right\} \left[ \frac{\partial \delta w(L)}{\partial x} - \frac{\partial \delta w(0)}{\partial x} \right] dt = 0 \quad (9)$$

Hareketin yönetici denklemi ve sınır şartları  $0 \leq x < \eta L$  ve  $\eta L \leq x \leq L$  aralığı için ayrı ayrı elde edilmelidir:

$$0 \leq x < \eta L \rightarrow -EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \rho A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \quad (10a)$$

$$\eta L \leq x \leq L \rightarrow -EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \rho A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + q - \mu \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) \quad (10b)$$

ve sınır şartları:

$$0 \leq x < \eta L \rightarrow \begin{cases} \left[ EI \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) \right] = 0 \text{ veya } w = 0 \\ \left[ -EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \text{ veya } \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (11a)$$

$$\eta L \leq x \leq L \rightarrow \begin{cases} \left[ EI \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) - \mu \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right] = 0 \text{ veya } w = 0 \\ \left[ -EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \text{ veya } \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (11b)$$

Eşitlik (10a) ve (10b), boyutsuz nano-kiriş uzunluğu ( $\bar{x} = \frac{x}{L}$ ) ve harmonik titreşim ( $w(\bar{x}, t) = W(\bar{x})e^{j\omega t}$ ) varsayımıyla yeniden düzenlenirse:

$$\frac{d^4 W_1}{d\bar{x}^4} + \frac{d^2 W_1}{d\bar{x}^2} \left[ \frac{\mu}{L^2} \Omega^4 \right] - W_1 [\Omega^2] = 0 \quad (12a)$$

$$\frac{d^4 W_2}{d\bar{x}^4} + \frac{d^2 W_2}{d\bar{x}^2} \left[ \frac{\mu}{L^2} \Omega^4 \right] - W_2 [\Omega^2] = -\frac{Q}{\Omega^2} \quad (12b)$$

burada  $W_1$  ve  $W_2$  birinci ve ikinci bölümlere ait yer değiştirme genlik fonksiyonlarını ifade etmektedir.  $j^2 = -1$ ,  $\omega$  titreşim frekansı ve  $t$  ise zamandır.  $\Omega$  boyutsuz frekans parametresini ve  $Q$  boyutsuz yayılı yük parametresini ifade eder ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}}, \quad Q = \frac{q_0 L^4}{EI} \quad (13)$$

Eşitlik (12a) ve (12b)'deki diferansiyel denklemlerin genel çözümü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$W_1(\bar{x}) = C_1 e^{r_1 \bar{x}} + C_2 e^{r_2 \bar{x}} + C_3 e^{r_3 \bar{x}} + C_4 e^{r_4 \bar{x}} \quad (14a)$$

$$W_2(\bar{x}) = C_5 e^{r_1 \bar{x}} + C_6 e^{r_2 \bar{x}} + C_7 e^{r_3 \bar{x}} + C_8 e^{r_4 \bar{x}} - \frac{Q}{\Omega^2} \quad (14b)$$

Eşitlik (14a) ve (14b)'de belirtilen yer değiştirme genlik fonksiyonlarının süreklilik şartını sağlayabilmeleri için yayılı yükün başlangıç noktasında ( $x = \eta L$ ) süreklilik sınır şartları yazılır. Her iki yer değiştirme fonksiyonunun

bu şartları sağlaması gerekir. Nano-kiriş problemi için dört olan sınır şartı sayısı, sürekli yapının ikiye bölünmesiyle dört adet fazladan süreklilik şartı gerektirir. Aşağıda bahsi geçen sekiz sınır şartı belirtilmiştir:

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} W_1(0) = 0 \\ \frac{\partial W_1(0)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (15a)$$

$$x = \eta L \rightarrow \begin{cases} W_1(\eta L) = W_2(\eta L) \\ \frac{\partial W_1(\eta L)}{\partial x} = \frac{\partial W_2(\eta L)}{\partial x} \\ -EI \frac{\partial^2 W_1(\eta L)}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 W_2(\eta L)}{\partial x^2} \\ EI \left( \frac{\partial^3 W_1(\eta L)}{\partial x^3} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^3 W_1(\eta L)}{\partial x \partial t^2} \right) = EI \left( \frac{\partial^3 W_2(\eta L)}{\partial x^3} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^3 W_2(\eta L)}{\partial x \partial t^2} \right) \end{cases} \quad (15b)$$

$$x = L \rightarrow \begin{cases} -EI \frac{\partial^2 W_2(L)}{\partial x^2} = 0 \\ EI \left( \frac{\partial^3 W_2(L)}{\partial x^3} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^3 W_2(L)}{\partial x \partial t^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (15c)$$

Eşitlik (15a)-(15c)'de belirtilen sınır ve süreklilik şartları matris formunda yazılırsa doğrusal denklemler sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} & P_{36} & P_{37} & P_{38} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} & P_{46} & P_{47} & P_{48} \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} & P_{56} & P_{57} & P_{58} \\ P_{61} & P_{62} & P_{63} & P_{64} & P_{65} & P_{66} & P_{67} & P_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{75} & P_{76} & P_{77} & P_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{85} & P_{86} & P_{87} & P_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{q}{\Omega^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Burada dikkati çeken husus sürekli yapının her parçalara ayrılma işleminde süreklilik şartının sağlanması için dört adet fazladan süreklilik şartı eklenmektedir. Bu şekilde birden fazla bölgede yayılı yük etkisini modellerken daha fazla süreklilik şartı gerekecek ve katsayılar matrisinin boyutları büyüyecektir. Karmaşık problemlerin modellenmesi ve çözümünde geçen süre artacaktır. Bu nedenle kısmi yayılı yük gibi etkilerin süreklilik içinde modellendiği yöntemler daha kullanışlı olacaktır.

### 2.3. Nano-Kirişin Tek Parça Olarak Çözümü (Analysis of Nanobeam as a Whole)

Eşitlik (8)'de yayılı yükün yaptığı iş ( $\eta L - L$ ) aralığında tanımlanmıştı. Kısmi olan yayılı yük etkisini sürekliliğin tamamında ( $0 - L$ ) tanımlamak için aşağıda belirtildiği şekliyle ifade etmek gerekir:

$$-EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \rho A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + qH(x - \eta L) - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} qH(x - \eta L) \right) \quad (17)$$

burada  $H$ , Heaviside fonksiyonunu belirtmektedir. Bölgesel veya noktasal yayılı yük, kuvvet veya moment gibi etkilerin tanımlanmasında Heaviside ve Dirac Delta fonksiyonları (Civalek vd., 2009) ve Laplace dönüşümleri (Yaylı, 2017) kullanılmaktadır. Statik analizlerde uygulamaları bulunmakla birlikte dinamik modellemelerde kullanımları yaygın değildir (Eftekhari ve Young, 2014; Eftekhari, 2016). Heaviside ve Dirac Delta fonksiyonlarının tanımı ve aralarındaki bağıntı aşağıda belirtilmiştir:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 0 \\ 1 & \text{eğer } x \geq 0 \end{cases} \quad (18a)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 0 \\ \infty & \text{eğer } x = 0 \end{cases} \quad (18b)$$

Heaviside ve Dirac Delta fonksiyonları arasındaki bağıntı aşağıda belirtilmiştir:

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x) \quad (19)$$

Dirac Delta fonksiyonunun türevi ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$g(x) \left[ \frac{d}{dx} \delta(x) \right] = - \left[ \frac{d}{dx} g(x) \right] \delta(x) \quad (20)$$

burada  $g(x)$  sürekli bir fonksiyonu ifade etmektedir. Bu çalışmada ele alınan problemde  $g(x)$  fonksiyonu olarak sabit yayılı yük ele alınmıştır ve türevi sıfır olur. Mevcut problem için Dirac Delta fonksiyonunun türevi sıfır olarak elde edilir.

Heaviside fonksiyonu kullanılarak yayılı yük etkisi hareketin yönetici denkleminde eklendikten sonra, Eşitlik (17)'deki diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıda ifade edildiği gibidir:

$$W(\bar{x}) = C_9 e^{r_1 \bar{x}} + C_{10} e^{r_2 \bar{x}} + C_{11} e^{r_3 \bar{x}} + C_{12} e^{r_4 \bar{x}} - \frac{Q}{\Omega^2} H(\bar{x} - L) \quad (21)$$

İntegrasyon sabitleri nano-kirişin ankastre serbest sınır şartları kullanılarak belirlenir:

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} W(0) = 0 \\ \frac{\partial W(0)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (22a)$$

$$x = L \rightarrow \begin{cases} -EI \frac{\partial^2 W(L)}{\partial x^2} = 0 \\ EI \left( \frac{\partial^3 W(L)}{\partial x^3} \right) - \mu \rho A \left( \frac{\partial^3 W(L)}{\partial x \partial t^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (22b)$$

Yukarıda belirtilen sınır şartları matris formunda yazılırsa Heaviside fonksiyonu değerinin 0 olduğu durumda homojen denklem sistemi, 1 olduğu durumda ise homojen olmayan denklem sistemi elde edilir. İki denklem sistemi de belirli bir titreşim frekansında integrasyon katsayıları için çözümlerse yer değiştirme genlik fonksiyonu tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q}{\Omega^2} H(\bar{x} - L) \\ \frac{Q}{\Omega^2} \delta(\bar{x} - L) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Yer değiştirme genlik değerleri parametrik analizde elde edilen en büyük genlik değerine bölünerek normalize edilmiştir. Sonraki bölümde bahsi geçen genlikler Eşitlik (24)'de belirtildiği şekliyle normalize edilerek sunulmuştur:

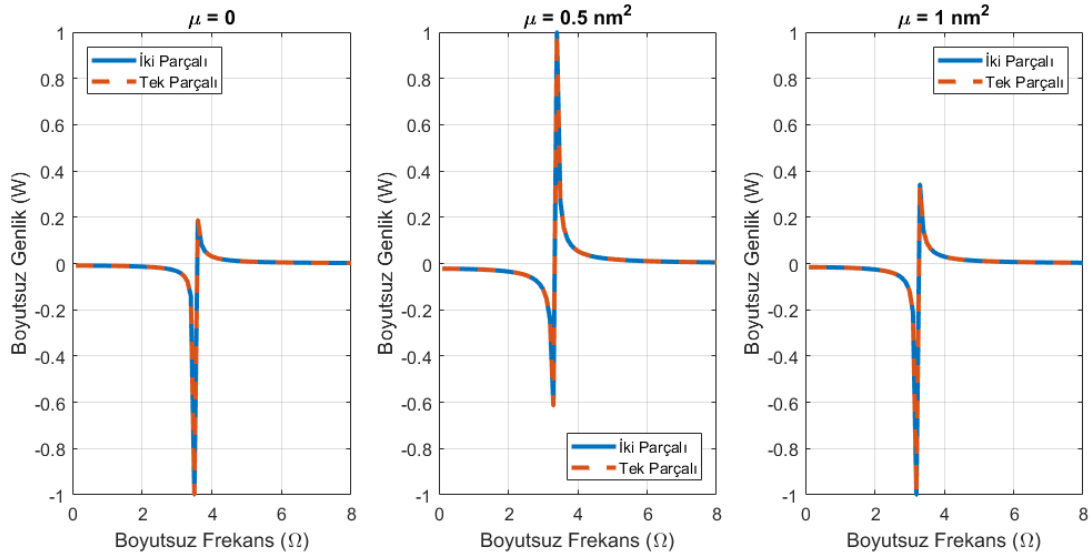
$$\bar{W} = \frac{W}{\text{maksimum}(|W|)} \quad (24)$$

### 3. Sayısal Sonuçlar (Numerical Results)

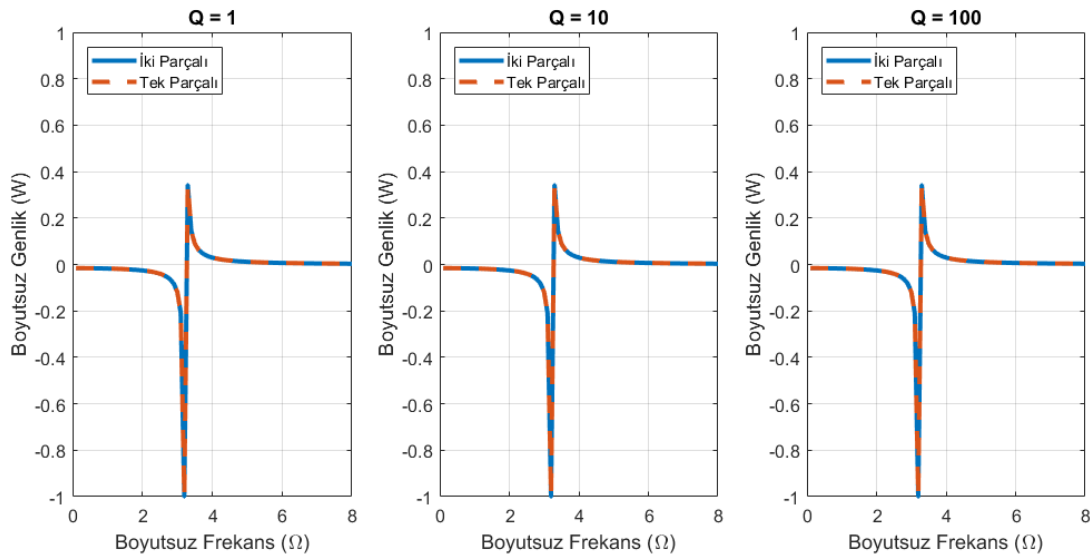
Kısmi yayılı yük etkisindeki nano-kirişin dinamik davranışı bu bölümde incelenecektir. İlk olarak yerel olmayan parametre, boyutsuz yayılı yük parametresi ve yükün uygulanmaya başlandığı noktanın rezonans frekansına olan etkisi incelenecektir. Daha sonra bahsedilen parametrelerin nano-kirişin genlik değerlerine olan etkileri gösterilecektir.

Şekiller 2 ve 3'de yayılı yük etkisiyle zorlanmış titreşim yapan nano-kirişin yer değiştirme genliğinin tahrik frekansıyla değişimi görülmektedir. Ayrıca analiz bölümünde sunulan iki farklı analitik çözümün geçerliliği burada belirtilmiştir. İki ve tek parçalı olarak belirtilen sonuçlar nano-kirişin parçalara bölünmesi ve kısmi yayılı yükün Heaviside fonksiyonu yardımı ile tanımlanmasıyla oluşturulan modellerden elde edilmiştir. Görüldüğü üzere iki model de aynı sonuçları vermektedir. Yerel olmayan ve boyutsuz yayılı yük parametrelerinin etkilerinin dahil edilmesiyle iki model sonuçları arasındaki uyum bozulmamaktadır.

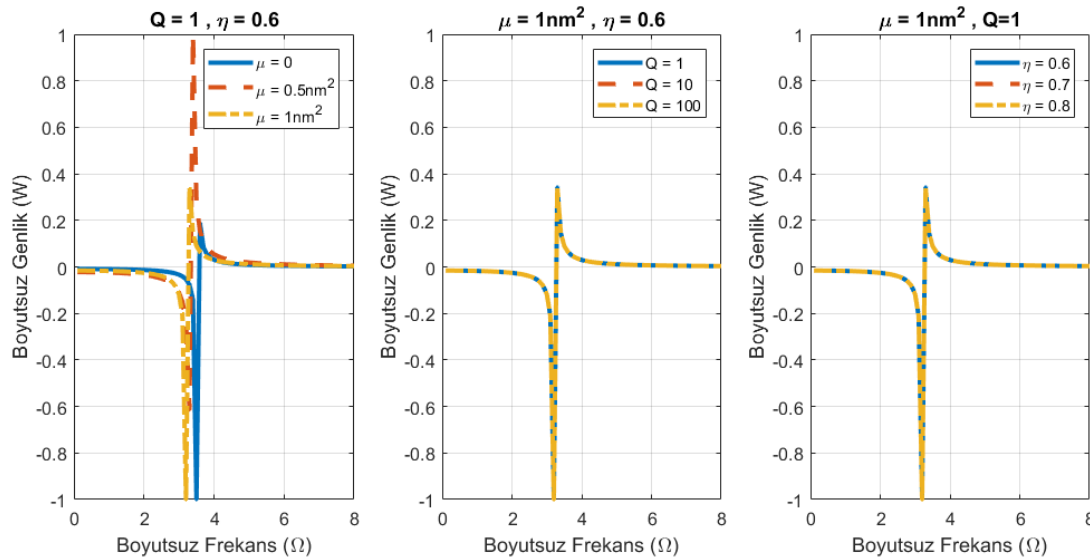
Şekil 4'de dinamik genlik değerinin yerel olmayan parametre, boyutsuz yayılı yük parametresi ve yükün uygulamaya başlama noktası ile değişimi görülmektedir. Bu sonuçlar yayılı yükün Heaviside fonksiyonu kullanılarak sürekli modellendiği yöntemden elde edilmiştir. Yerel olmayan parametre rezonans frekansını azaltmakta ancak yayılı yük parametresi ve yükün başlangıç noktasının rezonans frekansı üzerinde herhangi bir etkisi olmamaktadır. Bu nedenle, Tablo 1'de ilk üç mod frekansının yerel olmayan parametre ile değişimi gösterilmiştir. Dikkat edilirse, yerel olmayan parametrenin sıfır olduğu durumda ( $\mu=0$ ), yayılı yükün tahrik frekansının nano kiriş doğal frekansıyla çakıştığı rezonans frekansı, literatürde (Leissa ve Qatu, 2011) ankastre-serbest kirişlerin Euler-Bernoulli süreklilik mekaniği modeliyle elde edilen sonuçlarla aynıdır. Yerel olmayan etki ile ilk üç mod frekansı azalmakta ve limit değere doğru yaklaşmaktadır (Aydogdu ve Arda 2016). Yayılı yük, Eşitlik (20)'de belirtilen nedenle yerel olmayan etkiye sahip olmadığından, Tablo 1'de verilen sonuçlar üzerinde etkisi yoktur.



Şekil 2. Rezonans Frekansının Yerel Olmayan Parametre ile Değişimi ( $Q=1$ ,  $\eta=0.60$ ,  $\bar{x} = 1$ ) (Variation of Resonance Frequency with Nonlocal Parameter)



Şekil 3. Rezonans Frekansının Boyutsuz Yayılı Yük Parametresi ile Değişimi ( $\mu=1\text{nm}^2$ ,  $\eta=0.60$ ,  $\bar{x} = 1$ ) (Variation of Resonance Frequency with Dimensionless Distributed Load Parameter)

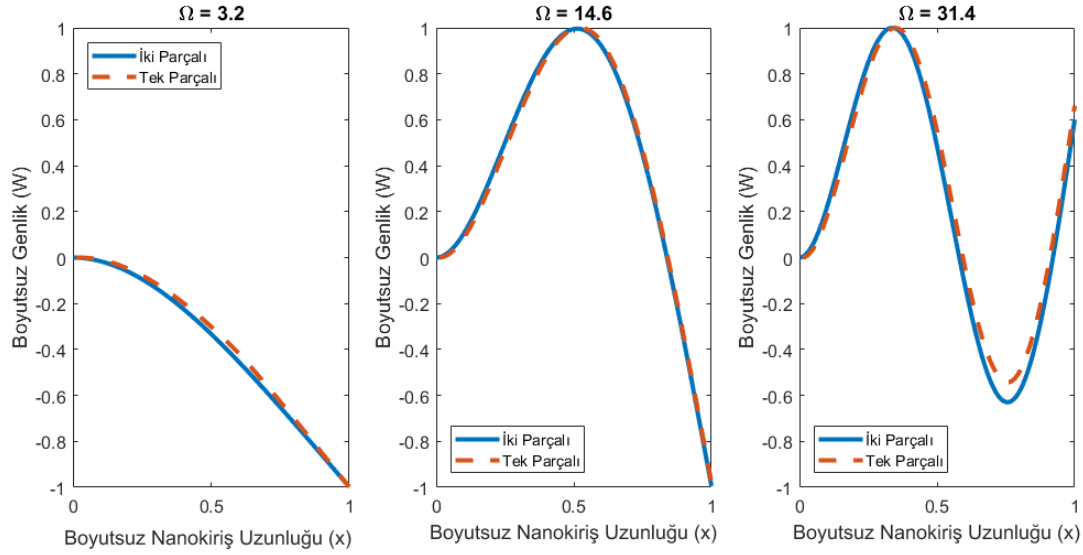


Şekil 4. Rezonans Frekansının  $\mu$ ,  $Q$  ve  $\eta$  ile Değişimi ( $\bar{x} = 1$ ) (Variation of Resonance Frequency with  $\mu$ ,  $Q$  and  $\eta$ )

**Tablo 1.** Rezonans Frekanslarının Yerel Olmayan Parametre ile Değişimi ( $\eta=0.6$ ,  $Q=1$ ,  $\bar{x}=1$ ) (Variation of Resonance Frequencies with Nonlocal Parameter)

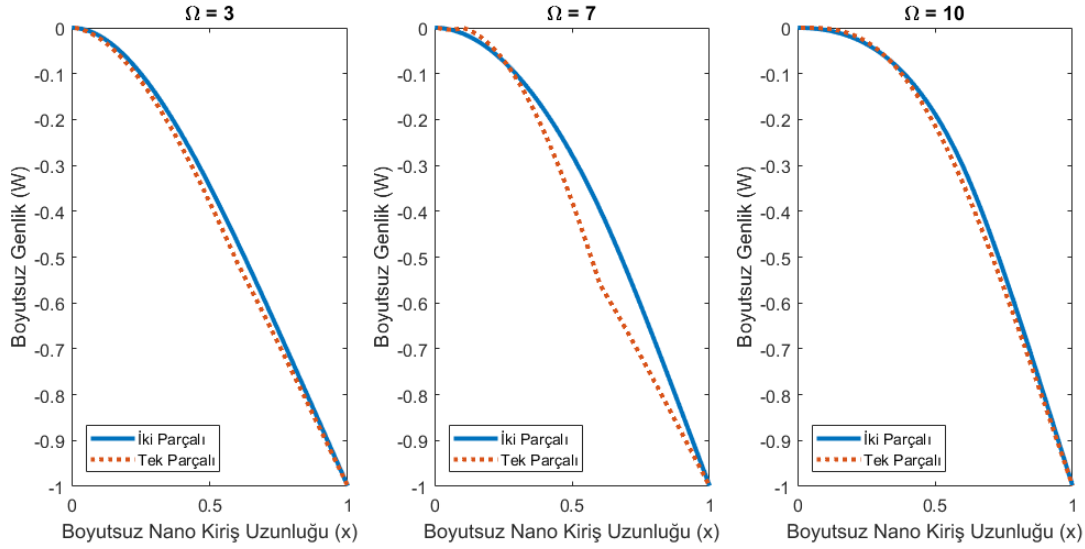
	$\mu=0$	$\mu=0.5\text{nm}^2$	$\mu=1\text{nm}^2$	$\mu=1.5\text{nm}^2$	$\mu=2\text{nm}^2$
1. Mod	3.516	3.364	3.224	3.104	2.992
2. Mod	22.036	17.152	14.576	12.944	11.796
3. Mod	61.696	39.128	31.380	27.068	24.200

Şekil 5’de nano-kirişin dinamik yer değiştirme genlikleri farklı frekanslarda her iki model için gösterilmiştir. Şekil 2’de olduğu gibi iki model sonuçlarının birbirine yakınlığı görülmektedir. Buna ek olarak tek parçalı modelde ( $\Omega=7$ ) frekansında görülmekte olan genlik değerindeki kırılma yayılı yük etkisiyle ilgilidir. Tıpkı statik analizlerde olduğu gibi dinamik analizlerde de bu davranışın görülmesi tek parçalı modelde yayılı yükün fiziki etkisinin modellendiği şeklinde yorumlanabilir. İki parçalı model bu noktada fonksiyonun sürekliliğini korumaya çalıştığı için tekillikleri gösterememektedir.

**Şekil 5.** Nano-kirişin Farklı Zorlanmış Titreşim Frekanslarındaki Genlik Değerleri ( $\mu=1\text{nm}^2$ ,  $\eta=0.60$ ,  $Q=1$ ) (Amplitudes of Nanobeam at Various Forced Vibration Frequencies)

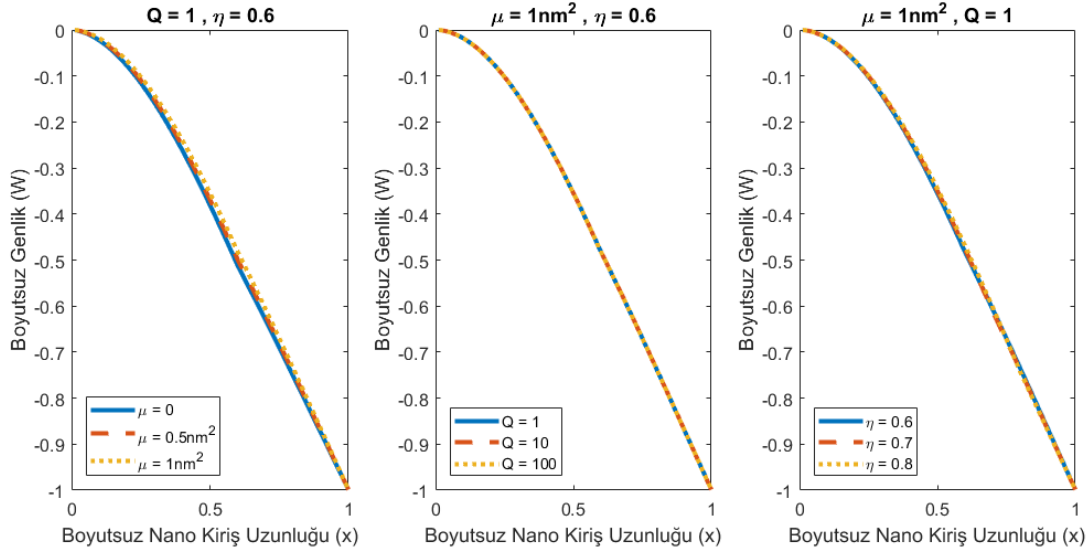
Şekil 6’da yerel olmayan elastisite parametresi, boyutsuz yayılı yük parametresi ve yayılı yükün başlangıç noktasının etkisi görülmektedir. En belirgin etki, yerel olmayan elastisite etkisi ile ortaya çıkmaktadır. Gerilme gradyanı etkisiyle nano-kiriş yapısının sertliği ve rezonans frekansı azalmaktadır. Aynı şekilde yumuşama etkisinden dolayı genlik değerleri de yerel olmayan elastisite yaklaşımıyla artmaktadır. Eşitlik (24)’de belirtilen normalleştirme işleminden dolayı yayılı yük değerinin değişmesiyle genliklerde herhangi bir değişim görülmemektedir. Yayılı yükün başlangıç noktası etkisinin ise çok küçük de olsa genliği artırdığı söylenebilir.



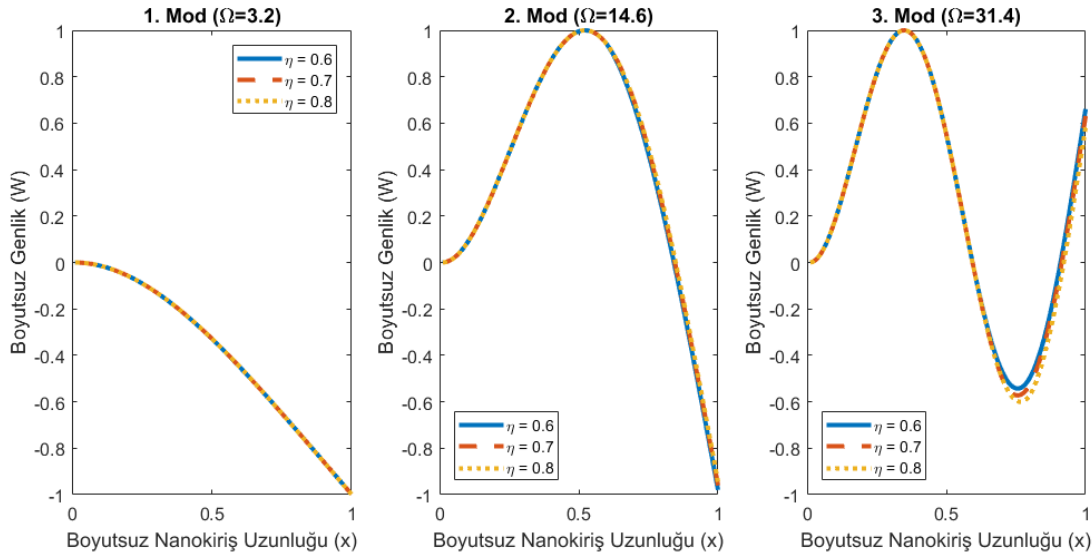


**Şekil 6.** Nano-Kiriş Genlik Değerine  $\mu$ ,  $Q$  ve  $\eta$  Parametrelerinin Etkisi ( $\Omega=3.2$ ) (Effects of  $\mu$ ,  $Q$  and  $\eta$  Parameters to the Amplitudes of Nanobeam)

Şekiller 7 ve 8'de nano-kirişin ilk üç rezonans frekanslarındaki genlik değerleri gösterilmiştir. Şekil 7, iki ve tek parçalı modeller arasındaki uyumu bir kere daha ortaya koymaktadır. Şekil 8'de ise yayılı yükün başlangıç noktasının etkisi görülmektedir. Şekil 6'da belirtildiği üzere birinci rezonans frekansında zorlukla seçilebilen etki üçüncü rezonans frekansında bariz olarak görülmektedir. Özellikle  $\eta$  değerinin arttığı ve yayılı yükün etkisinin sınırlandırıldığı nano-kirişin serbest ucuna doğru maksimum genlik değerleri artış göstermektedir.



**Şekil 7.** Nano-Kirişin İlk Üç Rezonans Frekansındaki Genlik Değerleri ( $\mu=1\text{nm}^2$ ,  $\eta=0.60$ ,  $Q=1$ ) (Amplitudes of Nanobeam at First Three Resonance Frequencies)



**Şekil 8.** Nano-Kirişin İlk Üç Rezonans Frekansındaki Genlik Değerlerine  $\eta$  Etkisi ( $\mu=1\text{nm}^2$ ,  $Q=1$ ) (Effect of  $\eta$  on Amplitudes at First Three Resonance Frequencies of Nanobeam)

#### 4. Sonuç ve Tartışma (Results and Discussion)

Bu çalışmada nano-kirişlere etki eden sürekli olmayan yayılı yük problemlerinde problemin sürekli olarak tanımlanması Heaviside fonksiyonu kullanılarak yapılmıştır. Nano-kiriş için hareketin yönetici denklemi ve sınır şartları Hamilton prensibi ve yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Hareketin yönetici denkleminin analitik çözümü gerçekleştirilmiştir. Oluşturulan modelin geçerliliği literatürde yer alan parçalara ayırma yöntemiyle karşılaştırılarak sağlanmıştır. Nano-kiriş dinamiğinin yerel olmayan parametre, boyutsuz yayılı yük ve yayılı yükün başlangıç noktası parametreleriyle değişimi incelenmiştir. Farklı rezonans frekanslarında bahsi geçen parametrelerin etkileri incelenmiştir. Yapılan bu çalışma ile elde edilen sonuçları özetlemek gerekirse:

- Literatürde kullanılan parçalara ayırma yöntemi yerine oluşturulan modelin kullanımı daha kolay ve hızlıdır.
- Genlik değerlerindeki yayılı yük etkisi, oluşturulan modelde statik davranışa benzer olarak daha belirgin görülmektedir.
- Yerel olmayan parametre yumuşama etkisiyle rezonans frekansını azaltmakta ve genlik değerlerini artırmaktadır.
- Yayılı yük başlangıç noktasının nano-kiriş serbest ucuna doğru yaklaşması yüksek rezonans frekanslarında genlikleri artırmaktadır.

Bu çalışmanın sonuçları ile bakteri veya virüs gibi nano-kütle sensörlerinin modellenmesi daha kolay ve hızlı olacaktır.

#### Çıkar Çatışması (Conflict of Interest)

Yazar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir. No conflict of interest was declared by the author.

#### Kaynaklar (References)

- Adali, S., 2008. Variational Principles for Multi-Walled Carbon Nanotubes Undergoing Buckling Based on Nonlocal Elasticity Theory. *Physics Letters A*, 372 (35), 5701-5.
- Akbaş, Ş.D., 2019. Longitudinal Forced Vibration Analysis of Porous a Nanorod. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 7 (4), 736-43.
- Akgöz, B., Civalek, Ö., Demir, C., 2011. Buckling Analysis of Cantilever Carbon Nanotubes Using the Strain Gradient Elasticity and Modified Couple Stress Theories. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 8 (9), 1821-27.
- Akgöz, B., Civalek, Ö., 2012. Investigation of Size Effects on Static Response of Single-Walled Carbon Nanotubes Based on Strain Gradient Elasticity. *International Journal of Computational Methods*, 09 (02), 1240032.
- Akgöz, Bekir, 2019. Ritz Yöntemi İle Değişken Kesitli Kolonların Burkulma Analizi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 7 (2), 452-58.
- Akgöz, Bekir, Civalek, Ö., 2016. Bending Analysis of Embedded Carbon Nanotubes Resting on an Elastic Foundation Using Strain Gradient Theory. *Acta Astronautica*, 119 (February), 1-12.

- Arda, M., Aydogdu, M., 2016. Bending of CNTs Under The Partial Uniform Load. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 8 (2), 21–21.
- Avcar, M., 2010. Elastik Zemin Üzerinde Bulunan Her İki Ucu Ankastre Mesnetli Rastgele ve Sürekli Homojen Olmayan Kirişin Serbest Titreşimi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 1 (1), 33–38.
- Avcar, M., Mohammed, W.K.M., 2017. Winkler Zemin ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme Özelliklerinin Kirişin Frekans Parametrelerine Etkilerinin İncelenmesi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 5 (3), 573–80.
- Aydogdu, M., 2009. A General Nonlocal Beam Theory: Its Application to Nanobeam Bending, Buckling and Vibration. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 41 (9), 1651–55.
- Aydogdu, M., 2012. Longitudinal Wave Propagation in Nanorods Using a General Nonlocal Unimodal Rod Theory and Calibration of Nonlocal Parameter with Lattice Dynamics. *International Journal of Engineering Science*, 56 (July), 17–28.
- Aydogdu, M., Arda, M., 2016. Forced Vibration of Nanorods Using Nonlocal Elasticity. *Advances in Nano Research*, 4 (4), 265–79.
- Civalek, Ö., Demir, Ç., Akgöz, B., 2009. Static Analysis of Single Walled Carbon Nanotubes (SWCNT) Based on Eringen's Nonlocal Elasticity Theory. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 1 (2), 47–56.
- Demir, Ç., Civalek, Ö., 2016. Tek Katmanlı Grafen Tabakaların Eğilme ve Titreşimi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 4 (3), 173.
- Dequesnes, M., Tang, Z., Aluru, N.R., 2004. Static and Dynamic Analysis of Carbon Nanotube-Based Switches. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 126 (3), 230.
- Eftekhari, S.A., 2016. A Differential Quadrature Procedure with Direct Projection of the Heaviside Function for Numerical Solution of Moving Load Problem. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13 (9), 1763–81.
- Eftekhari, S.A., Young, 2014. A Differential Quadrature Procedure with Regularization of the Dirac-Delta Function for Numerical Solution of Moving Load Problem. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 121241–65.
- Elishakoff, I., Pentaras, D., Dujat, K., Versaci, C., Muscolino, G., Storch, J., Bucas, S., et al., 2012. *Carbon Nanotubes and Nanosensors. Carbon Nanotubes and Nanosensors: Vibration, Buckling and Ballistic Impact*. ISTE. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Eringen, A.C., 1983. On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves. *Journal of Applied Physics*, 54 (9), 4703–10.
- Eringen, A.C., 2004. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Edited by A. Cemal Eringen. New York, NY: Springer New York.
- Eringen, A.C., Edelen, D.G.B., 1972. On Nonlocal Elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10 (3), 233–48.
- Feynman, R.P., 2011. There's Plenty of Room at the Bottom. *Resonance*, 16 (9), 890–905.
- Gong, N., Liang, Y.C., Yao, Y.X., Liu, B.G., 2008. Static and Dynamic Analysis of Carbon Nanotube Cantilever Based on Molecular Dynamics Simulation. *Key Engineering Materials*, 375–376 (August), 631–35.
- Gul, U., Aydogdu, M., 2017. Wave Propagation in Double Walled Carbon Nanotubes by Using Doublet Mechanics Theory. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 93345–57.
- Gul, U., Aydogdu, M., 2018. Structural Modelling of Nanorods and Nanobeams Using Doublet Mechanics Theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 14 (2), 195–212.
- Gul, U., Aydogdu, M., Gaygusuzoglu, G., 2017. Axial Dynamics of a Nanorod Embedded in an Elastic Medium Using Doublet Mechanics. *Composite Structures*, 1601268–78.
- Hosseini, M., Gorgani, H.H., Shishesaz, M., Hadi, A., 2017. Size-Dependent Stress Analysis of Single-Wall Carbon Nanotube Based on Strain Gradient Theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 9 (6), .
- Iijima, S., 1991. Helical Microtubules of Graphitic Carbon. *Nature*.
- Janghorban, M., Zare, A., 2012. Harmonic Differential Quadrature Method for Static Analysis of Functionally Graded Single Walled Carbon Nanotubes Based on Euler-Bernoulli Beam Theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 9633–41.
- Leissa, A.W., Qatu, M.S., 2011. *Vibrations of Continuous Systems*. New York: McGraw-Hill Education.
- Li, C., Chou, T.-W., 2006. Atomistic Modeling of Carbon Nanotube-Based Mechanical Sensors. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 17 (3), 247–54.
- Mohammad-Abadi, M., Daneshmehr, A.R., 2014. Size Dependent Buckling Analysis of Microbeams Based on Modified Couple Stress Theory with High Order Theories and General Boundary Conditions. *International Journal of Engineering Science*, 741–14.
- Oterkus, E., Diyaroglu, C., Zhu, N., Oterkus, S., Madenci, E., 2015. Utilization of Peridynamic Theory for Modeling at the Nano-Scale. In , 1–16.
- Reddy, J.N., 2002. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. Wiley.
- Reddy, J.N., Pang, S.D., 2008. Nonlocal Continuum Theories of Beams for the Analysis of Carbon Nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103 (2), 023511.
- Shaban, M., Alibeigloo, A., 2014. Three Dimensional Vibration and Bending Analysis of Carbon Nano- Tubes Embedded in Elastic Medium Based on Theory of Elasticity. *Latin American Journal of Solids and Structures*, no. 20052122–40.
- Wang, Q., Shindo, Y., 2006. Nonlocal Continuum Models for Carbon Nanotubes Subjected to Static Loading. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1 (4), 663–80.
- Wu, Q., Volinsky, A.A., Qiao, L., Su, Y., 2015. Surface Effects on Static Bending of Nanowires Based on Non-Local Elasticity Theory. *Progress in Natural Science: Materials International*, 25 (5), 520–24.
- Yayli, M.Ö., 2016. Buckling Analysis of a Rotationally Restrained Single Walled Carbon Nanotube Embedded In An Elastic Medium Using Nonlocal Elasticity. *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, 8 (2), 40–50.
- Yayli, M.Ö., 2013. Torsion of Nonlocal Bars with Equilateral Triangle Cross Sections. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 10 (2), 376–79.
- Yayli, M.Ö., 2014. On the Axial Vibration of Carbon Nanotubes with Different Boundary Conditions. *Micro & Nano Letters*, 9 (11), 807–11.
- Yayli, M.Ö., 2016. A Compact Analytical Method for Vibration Analysis of Single-Walled Carbon Nanotubes with Restrained

- Boundary Conditions. *Journal of Vibration and Control*, 22 (10), 2542–55.
- Yayli, M.Ö., 2017. Buckling Analysis of a Cantilever Single-Walled Carbon Nanotube Embedded in an Elastic Medium with an Attached Spring. *Micro & Nano Letters*, 12 (4), 255–59.
- Yayli, M.Ö., 2018. Torsional Vibration Analysis of Nanorods with Elastic Torsional Restraints Using Non-Local Elasticity Theory. *Micro & Nano Letters*, 13 (5), 595–99.
- Yayli, M.Ö., 2017. Bending Analysis of A Cantilever Nanobeam With End Forces By Laplace Transform. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 9 (2), 103–103.