KESİNLİKTEN UZAK CÜMLELERLE (FUZZY SETS) KARAR VERME*

Ronald VAGER
David BASSOW

Çeviren:
Ass. B. Fethi ŞENİŞ

Özet

Amaç ve zorunlukların kesinlikle belirtilemediği durumlarda, özellikle karmaşık ve sosyal sistemlerde, karar verme önemli ölçüde zorlaşmaktadır. Bu yazıda Zadeh'in belirsiz cümlelerle (Fuzzy Sets) karar kuramının kısa bir özeti ve küçük uygulamaları sunulacaktır.

GİRİŞ

Amaç ve zorunlukların kesinlik ve katılıkla belirtilememesi ya da kaba bir deyimle «yuvarlak» olmaları, karar yönünden büyük zorluklar yaratmaktadır. Kesinlikten uzak cümlelere örnek olarak; «x, y'den **çok daha** büyüktür; «**en uygun** adamı seçiniz», «satış politikamız bu yıl **oldukça** başarılı ve benzeri cümleler verilebilir. Bu cümlelerde **koyu yazılmış** sözcükler kesinlikten uzaklığa sebep olmakta ve böylece, bu tür cümleler için niceliksel hesap yöntemlerinin kullanılması olanaksızlaşmaktadır. Karar kuramı ge-

(*) Ronald, Y., David, B. «Decision Making with Fuzzy Sets», **Decision Sciences,** Vol. 6., No. 3, July, 1975, s. 590-600.

lişip sosyal ve karmaşık sistemleri de kapsamına aldıkça «kesinlikten uzaklık» bu sistemlerin incelenmesinde üzerinde durulması gereken bir nokta olarak belirmektedir. Bu çalışmada dayanak, Zadeh'in «uygun olamayış» ilkesidir. Zadeh bu ilkeyi şöyle tanımlar:

«Karmaşıklığı arttıkça sistemin davranışları hakkında **Kesin** ve **duyarlı** yargılara varmak güçleşir. Bu güçleşme sistemin öyle bir eşiğe varmasına değin sürer ki, eşiğin sonrasında **kesinlik** ve **duyarlılık** yekdiğerini kısıtlayıcı bir duruma gelir.»

İnsan beyni kesinlikten uzak cümle ve kararları yargılama yeteneğine sahiptir. Sözgelimi, «uzun boylular öne, kısa boylular arkaya» emrinde, **uzun** ve **kısa** kesinlikten uzak kavramlar olmasına rağmen insanlar bu emri kolaylıkla uygulayabilirler. Oysa bilgisayarlar ve normal hesap yöntemleri bu tür kararlar için yetersez kalmaktadır. Karar için gerekli unsurlar giderek insan beyni için fazla büyük hale geldikçe; araştırıcılar kesinlikten uzak, değişik kavramları bilgisayarlar kullanarak yargılamalarını sağlayacak kesin ve duyarlı teknikler geliştirme durumunda kalmışlardır. İlk olarak 1965 yılında Zadeh «Fuzzy Sets» isimli makalesiyle, karmaşık sistemlerle çalışmada geçerli olacağını umduğu bulgularını gözler önüne sermiştir.

Bu yazıda «kesinlikten uzaklık kuramı»nın bazı kavramları ve bu kavramların karar teorisine uygulanışının bazı örnekleri üzerinde durulacak, ayrıca kuramın yeterli olamadığı bazı konular sıralanacaktır. Şunu hatırlamak gerekir ki bu kuram bugün henüz gelişme dönemindedir. Bu nedenle yazıya kuramın tam bir açıklaması yerine, bu günkü aşaması ile ilgili bir rapor olarak bakmak gerekir. Karar kuramının tüm dalları için geçerli olan kesinlikten uzaklık (kuramı) günümüzde en çok öğrenim sistemleri (Learning Systems) konusunda uygulama olanağı bulmaktadır.

KESİNLİKTEN UZAK CÜMLELER VE BAZI TEMEL İŞLEMLER

Tanım 1. $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ elemanlarından oluşmuş bir $\bar{X}$ seçenekler ana cümlesi düşünelim. Yani

$$X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \text{ olsun(1).}$$

$\bar{X}$'in «kesinlikten uzak» bir alt cümlesi,

(1) Anlatım kolaylıkları nedeniyle burada yalnız sonlu kümelerle ilgilenilecektir. İlkenin sonsuz kümelere genellenmesi hiç bir güçlük yaratmaz.

$$U_A : \bar{X} \rightarrow \{0,1\}$$

şeklende bir $U_A(\bar{X})$ üyelik fonksiyonu ile belirtilir.

Bu üyelik fonksiyonu X'in her X_i elemanını, $\{0,1\}$ aralığındaki bir $U_A(X_i)$ sayısı ile eşlemektedir.

A cümlesi aşağıdaki şekilde ikililer kullanılarak yazılabilir.

$$A = \left\{ \frac{U_A(X_1)}{X_1}, \frac{U_A(X_2)}{X_2}, \ldots \frac{U_A(X_n)}{Xn} \right\}$$

$U_A(X_i)$ sayısının büyüklüğü X_i elemanının A alt cümlesine uygunlugunun büyük olması anlamına gelir.

Örnek : X ana cümlemiz,

$$X = \{1,2,3,4,5\}$$

X'in bir A alt cümlesi ise

A : X yaklaşık olarak 2,5 olsun.

Bu durumda, A cümlesi öznel olarak,

$$A = \left\{ \frac{0.6}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.8}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.2}{5} \right\}$$

şeklinde belirtilebilir.

Örnek : Uygunluk dereceleri kişilerin boyları ile ilgili olmak üzere

$$B = \left\{ \frac{0.5}{\text{John}}, \frac{0.7}{\text{Bill}}, \frac{0.2}{\text{Joe}}, \frac{0.9}{\text{Tom}} \right\}$$

cümlesi başka bir «kesinlikten uzak» cümle örneğidir.

Bir elemanın, kesinlikten uzak bir cümleye uygunluk derecesi belirlenirken genellikle öznel (subjektif) bir yöntem kullanmak zorunda kalınır. Bu öznellik aslında kesinlikten uzaklığın bir sonucu hatta gereği olup sorun kesinlikten uzak problemlerin çözümünde kullanılacak bir yöntem bulunmasıdır. Karar teorisinde en çok kullanılan yöntemler olan Bayesian ve Fayda kuramları da öznellikten arınamamışlardır. Kesinlikten uzaklık teorisinde de en büyük sorunlar, uygunluk derecesinin belirlenmesinde ortaya çıkmakta olup elde edilen çözümler üyelik fonksiyonundaki değişikliklere karşı çok duyarlı olmaktadır. Bu nedenle kesinlikten uzaklık teorisinin daha kullanışlı hale gelmesinde, uygunluk derecelerini belirlemekte kullanılacak yöntemler geliştirilmesinin önemi açıktır.

Herhangi bir X_i elemanının, kesinlikten uzak bir cümleye uygunluk derecesi belirlenirken, cümlenin şartlarını daha iyi bir şekilde sağlayan X_i'lere, daha büyük uygunluk derecesi verilir. Şimdi, değerlendirme probleminin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacak çok önemli bir kesinlikten uzak cümle üzerinde durulacaktır.

Üzerinde çalışılacak cümle «iyi bir kâr» cümlesidir. Bu problemde, n adet seçenek ve bunlara karşıt n adet kâr değerinin bulunduğu varsayılıyor. Kâr sıralarını değiştirmeden (daha büyük kâra, daha büyük bir uygunluk derecesi verilmesi yöntemini bozmadan) uygunluk derecelerinin belirbelirlenmesi için herhangi bir üyelik fonksiyonu kullanılabilir.

Örnek olarak, beş adet kâr seçeneği X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ve bunlara karşıt kârların 4,8,10,3,7 olduğunu varsayalım.

Seçenekler ana cümlesi,

$$X = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

olarak tanımlanabilir.

Eldeki seçeneklere göre kesinlikten uzak «iyi bir kâr» cümlesi,

$$A = \left\{\frac{0.4}{X_1}, \frac{0.8}{X_2}, \frac{1}{X_3}, \frac{0.3}{X_4}, \frac{0.7}{X_5}\right\}$$

veya

$$A = \left\{\frac{0}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.8}{X_3}, \frac{0}{X_4}, \frac{0.3}{X_5}\right\}$$

şeklinde ya da kâr büyüklük sıralarını değiştirmeyecek herhangi bir şekilde tanımlanabilir.(2) Bu örnekte şöyle bir genel kural belirtilmek istenmiştir. «Eğer seçeneklerin sayısal değerleri varsa, uygunluk katsayıları belirlenirken seçenekler arasında sayısal olarak belirtilmiş ilişkilerin (büyüklük sıralarının) değiştirilmemesi gerekir.» Bu kurala dikkat etmek koşuluyla, uygun-

(2) İkinci şık için X 1 ve X 4 'e aynı değerler verilmiş olduğu halde büyüklük sırasının değiştirilmediğine dikkat ediniz.

luk derecelerinin belirlenmesinde ikinci veya daha yüksek dereceden bağıntılar da kullanılabilir. Bazı durumlarda seçenekleri sayısal olarak değerlemek ya da ölçmek mümkün olmayabilir. Örneğin seçenekler ana cümlesi n tane kuruluş olan bir problemi ele alalım. Sorun büro kolaylıklarından yeterince faydalanma olsun. Bu durumda, kullanılacak sayısal bir ölçü olmaması nedeniyle problem çözücü; personel müdüründen, n değişik kuruluşu $\{0.1\}$ aralığında sayılar kullanarak değerlemesini isteyecektir.

Kesinlikten uzaklık yöntemiyle. uygunluk dereceleri için yalnız 0 ve 1 sayıları kullanarak kesin cümlelerle de çalışılabilir Örneğin,

$$X = \{1, 2, 3, 4. 5\}$$

seçenekler ana cümlesi olmak üzere,

A cümlesi $: \{X > 2\}$ olsun

Bu cümle kesinlikten uzaklık simgesiyle

$$A = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \frac{1}{5}\}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2. Bir X seçenekler ana cümlesinin A ve B gibi iki kesinlikten uzak alt cümlesi olsun.

Her $X \varepsilon X$ için $U_A (X) = U_B (X)$ şartı sağlanıyorsa A cümlesi B cümlesine eşit;

Her $X \varepsilon X$ için $U_A (X) \leqslant U_B (X)$ şartı sağlanıyorsa ACB yani A. B'nin alt cümlesidir

Tanım 3. A ve B'nin $\bar{X}$'te tanımlanmış kesinlikten uzak iki cümle olduğunu C'nin de bunların arakesitleri olduğunu varsayalım. $(C = A \cap B)$.

Bu durumda C cümlesi de X'in, üyelik fonksiyonu

Her $X \varepsilon X$ için $U_{A \cap B} (X) = U_C (X) = Min (U_A (X), U_B (X)$

olan, kesinlikten uzak bir alt cümlesidir(3) Arakesit ($\cap$) simgesi dilimizdeki «ve» bağlacı ile benzeşir. $A \cap B$ simgesi «A ve B» (hem A hem B) şeklinde

(3) Min $(U_A (X), U_B (X)$ değeri $U_A (X)$ ve U_B değerlerinin küçüğüdür (Ç.N).

de okunabilir. Kesinlikten uzak cümleler teorisinde Min(U_A (X), U_B (X) yerine U_A (X) $\wedge$ U_B (X) simgesi de kullanılmaktadır.

Örnek:

$$X = \{Bill, Joe, Tom\} \qquad \text{için,}$$

$$\text{Uzun boylu olanların cümlesi} = A = \{\frac{0.7}{Bill}, \frac{0.2}{Joe}, \frac{0.5}{Tom}\}$$

$$\text{Şişman olanların cümlesi} = B = \{\frac{0.3}{Bill}, \frac{0.4}{Joe}, \frac{0.9}{Tom}\}$$

Hem uzun boylu hem şişman olanların cümlesi : C

$$C = A \cap B = \{\frac{0.3}{Bill}, \frac{0.4}{Joe}, \frac{0.9}{Tom}\}$$

Tanım 4. A ve B cümleleri X'te tanımlanmış kesinlikten uzak iki cümle olsun. C = A U B ile simgelenen «A bileşim B» cümlesi de X'in, üyelik fonksiyonu

$$\text{Her } X \varepsilon X \text{ için } \quad U_{AUB} (X) = U_C (X) = \text{Max } U_A (X), U_B (X)$$

olan kesinlikten uzak bir alt cümlesidir.

Kesinlikten uzaklık teorisinde Max (U_A (X), U_B (X)) için ayrıca U_A (X) = U_B (X) simgesi de kullanılmaktadır. Arakesit simgesi ile «ve» bağlacı arasındaki benzerlik gibi bir yakınlık, «bileşim» ile «veya» arasında da vardır. AUB simgesi «A veya B ya da her ikisi» şeklinde de okunabilir.

Tanım 5. A cümlesi X'de tanımlanmış kesinlikten uzak bir cümle olsun. A' şeklinde simgelenen «A cümlesinin tümleyeni» kesinlikten uzak başka bir cümle olup, uygunluk fonksiyonu şöyle tanımlanır:

$$\text{Her } X \varepsilon X \text{ için } U_{A'} (X) = 1 - U_A (X)$$

«A'» simgesi ile de «A değil» kavram arasında büyük bir benzerlik bulunur. Bir önceki örneğimiz için «uzun boylu olmayanlar» cümlesi şöyle belirlenecektir.

$$A' = \{\frac{0.3}{Bill}, \frac{0.8}{Joe}, \frac{0.5}{Tom}\}$$

Bileşim ve kesişim işlemleri geçişken ve bir diğeri üzerine dağılabilir, ayrıca De Morgan kuralı kesinlikten uzak cümleler için de geçerlidir.

Tanım 6. X'te tanımlanmış A ve B gibi kesinlikten uzak iki cümlenin $C = A \dotplus B$ şeklinde simgelenen cebrik toplamı yine X'te tanımlanmış kesinlikten uzak bir cümle olup şu üyelik fonksiyonuna sahiptir:

$$U_{A \dotplus B}(X) = U_C(X) = U_A(X) + U_B(X) - U_A(X)\,U_B(X)$$

Cebrik toplam «veya» bağlacının değişik bir durumunu simgelemekte olup «A veya B fakat ikisi birden değil» anlamına gelir.

Tanım 7. A cümlesi X'te tanımlanmış, α da bir sabit olsun. $A\alpha$ işlemi yine X'te tanımlanmış ve şu üyelik fonksiyonuna sahip bir cümle oluşturur.

$$\text{Her } X \varepsilon X \text{ için } \quad U_{A\alpha}(X) = (U_A(X))^{\alpha}$$

A'nın α.ıncı kuvvete yükseltilmesi $\alpha > 1$ için uygunluk derecesi daha büyük olan elemanların diğerlerine oranla daha az kayıba uğramaları sonucunu yaratır. $\alpha > 1$ için ise durum tamamen ters olur.

KARAR VERMEDE KESİNLİKTEN UZAK CÜMLELERİN KULLANILIŞI

Bellman ve Zadeh'e göre {1} karar, amaç ve zorunluluklarla belirlenen hatta oluşturulan bir gruptur. Örneğin $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_3\}$, n seçenekten oluşmuş bir cümle ve G_1 kesinlikten uzak bir amaç olsun —iyi bir kâr, en az sermaye, çevreye en az zarar—. Seçeneklerin bu amaçlara uyuş derecelerine göre bir üyelik fonksiyonu belirlenerek, seçeneklerin herbiri için X (seçenekler ana cümlesi) de tanımlanmış birer kes nlikten uzak cümle tanımlanabilir. Ayrıca Ç ise yine kesinlikten uzak bir zorunluluk olsun. Bu durumda iyi kâr veren, en az yatırım gerektiren, çevreye en az zarar veren bir kuruluşun seçimi şeklinde bir problem ile karşılaşılır.

Bu tür problemlerde amaç ve zorunluluklar «ve» bağlacı ile bağlı olarak kesişir ve kararlar cümlesini oluştururlar.

Tanım 8. $X = \{X_1, X_2, \ldots Xn\}$ seçenekler cümlesi olmak üzere, $G_1, G_2, \ldots, Gp$ bu cümle üzerinde tanımlanabilen kesinlikten uzak cümlelerle belirtilebilen amaçlar; $C_1, C_2, \ldots, Cm$ de yine X'te tanımlanan kesinlikten uzak cümlelerle belirtilebilen zorunluluklar olsun. G'ler ve C'ler kesişerek yine kesinlikten uzak olan D kararını oluştururlar yani,

$$D = C_1 \cap C_2 \cap \ldots\ldots \cap Cm \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots\ldots \cap Gp$$

Bu cümlenin üyelik fonksiyonu ise,

$$U_D(X) = \text{Min}\,(U_{C_1}(X), \ldots\ldots U_{Cm}(X), U_{G_1}(X), \ldots\ldots U_{Gp}(X))$$

$$\wedge\, U_{C_1}(X) \wedge \ldots \wedge U_{Cm}(X) \wedge U_{G_1}(X) \wedge \ldots \wedge U_{Gp}(X) \text{ olur.}$$

(Tüm amaç ve sınırlamaların sağlandığı en küçük derece).

Karar verme durumunda olan bir kişi, en iyi olabilmesi için seçenegini nasıl belirleyecektir. K'nın, U_D (X)'in en uygun değerlerine ulaştığı seçeneklerden oluşan bir kesin cümle olduğunu varsayalım. Bu durumda K, «en iyileyen cümle»; K'nın elemanları ise «en iyileyen karar» olarak isimlendirilir. Yukardaki sorunun cevabı bu şartlarla oldukça basittir. Karar verici, seçeneğin en iyi olması için D'ye uygunluk derecesi en yüksek olan seçeneği seçecektir.

Şimdi şu örneği ele alalım. Bir şahıs X_1, X_2, X_3, bölgelerinden birine bir müessese kurmak arzusunda olup ayrıca kuruluş masraflarını en düşük yapmak, G_1 ; hammaddeye yakın olmak, C_1 ; pazara yakın olmak, C_2 ; istemektedir.

$$X = \{X_1, X_2, X_3,\} \qquad \text{olsun.}$$

İlgili üyelik fonksiyonlarının herhangi nesnel ya da öznel bir yolla

$$G_1 = \{\frac{0.5}{X_1}, \frac{0.8}{X_2}, \frac{0.3}{X_3}\}$$

$$C_1 = \{\frac{0.7}{X_1}, \frac{0.9}{X_2}, \frac{0.5}{X_3}\}$$

$$C_2 = \{\frac{0.4}{X_1}, \frac{0.2}{X_2}, \frac{0.9}{X_3}\}$$

şeklinde hesaplandığını varsayarsak.

$$D = G_1 \cap C_1 \cap G_2$$

$$D = \frac{0.4}{X_1}, \frac{0.2}{X_2}, \frac{0.3}{X_3}\}$$

olacak ve böylece de en iyi kararın X_1 olacağı belirlenecektir.

Bu örnekte kullanılan yöntem, temel maksimum bulma yöntemidir. Seçeneklerden her birinin amaç ve kısıtlamalara uygunluk derecelerinin en küçük değerleri hesaplanarak D bulunmuş, D için uygunluk derecesi en yüksek olan seçenek en iyi karar olarak seçilmiştir.

Uygunluk derecelerinin belirlenmesi, en iyi kararın seçilmesinde son derece etkindir. Örneğin, eğer

$$C_1 = \{\frac{0.07}{X_1}, \frac{0.09}{X_2}, \frac{0.05}{X_3}\}$$

olsaydı X_3 en iyi karar olarak karşımıza çıkacaktı.

Bu örnekte kullanılan yöntemde amaç ve kısıtlamaların karar için eşit önemde ve belirlenen uygunluk katsayılarının oranlı oldukları varsavar sayılmıştır. Bu kez amaç ve kısıtlamaların karardaki etkinlik derecelerinin farklı olduğu bir problem için kullanılabilecek bir yöntem geliştirmek üzere karar yöntemini bir kez daha gözden geçirelim.

1) Seçeneklerin her biri için amaç ve kısıtlamalara uygunluk derecelerinin en küçüğü alınarak D karar cümlesi oluşturulur. başka bir deyişle

$$X \text{ için } U_D(X_i) = \text{Min } U(Xi) \quad \text{olur.}$$

2) D'ye uygunluk derecesi en yüksek olan seçenek en iyi karar olarak seçilir.

Amaç ve kısıtlamalardan belirli birinin karara etkinliğinin çok fazla olduğu durumlarda, bu amaç veya kısıtlamaya uygunluk derecesi çok küçük olan bir seçeneği problemin çözümü olarak seçme hatasından kesinlikle kaçınmak gerekir. Bunun yolu ise çözüme etkinliği düşük olan amaç ve kısıtlamalara ait uygunluk dereceleri düşük seçeneklerin D cümlesine uygunluk derecelerini de düşük tutmaktır.((2) numaralı adıma bakınız). Bu durumda, önemli amaç ve zorunlulukları daha az sağlayan seçeneklerin uygunluk derecelerini daha da düşürmekle zayıf bir seçeneğin çözüm olarak seçilmesi önlenecektir. Bu amaçla, amaç ve kısıtlamaların her birine karara etkinliklerini simgelemek üzere bir α üstel kuvveti verilir. Amaç ya da kısıtlamanın etkinliği arttıkça α büyütülür. Amacın (ya da kısıtlamanın) etkinliğini belirtmek için tanım 7'de oldu gibi bu kuvvete yükseltilerek (ya da indirgenerek) işlem sürdürülür.

Bir önceki örneğimizde G_1 amacının etkinliği büyük ($\alpha = 2$), C_2 kısıtlamanın etkinliği küçük ($\alpha = 1/2$) olsaydı şu cümleler elde edilecekti.

$$D = G_1^2 \cap C_1 \cap C_2^{1/2}$$

$$G_1 = \left\{ \frac{0.5}{X_1}, \frac{0.8}{X_2}, \frac{0.3}{X_3} \right\}$$

$$G_1^2 = \left\{ \frac{0.25}{X_1}, \frac{0.64}{X_2}, \frac{0.09}{X_3} \right\}$$

$$C_1 = \left\{ \frac{0.7}{X_1}, \frac{0.9}{X_{12}}, \frac{0.5}{X_3} \right\}$$

$$C_2 = \left\{ \frac{0.4}{X_1}, \frac{0.2}{X_2}, \frac{0.9}{X_3} \right\}$$

$$C_2^{1/2} = \left\{ \frac{0.63}{X_1}, \frac{0.45}{X_2}, \frac{0.95}{X_3} \right\}$$

Böylece etkinliği az olan kısıtlamanın üyelik dereceleri arttırılarak D cümlesinin seçilmesindeki etkisi azaltılmış oldu. Aynı şekilde önemli bir amacın uygunluk derecelerini azaltarak D cümlesine seçilme olanağını da çoğaltmış bulunmaktayız. G_1 ve G_1^2'in kıyaslanmasıyla da uygunluk dereceleri küçük olan seçeneklerin daha fazla bir küçülme oranına sahip oldukları görülür. Bu işlemlerden sonra,

$$D = \left\{ \frac{0.25}{X_1}, \frac{0.45}{X_2}, \frac{0.09}{X_3} \right\}$$

bulunur. En iyi karar X_2 olmaktadır. Bu sonuç aynı zamanda şu noktayı da belirtmektedir. G_1'in etkinliği fazladır. ve X_2'nin G_1'e uygunluk derecesi büyüktür.

FARKLI UZAYLARDA KISITLAMALAR

Kesinlikten uzaklık niteliğine sahip bir kararda kısıtlamalar seçenekler için tanımlanmış, kesinlikten uzak cümleler olmalıdırlar. Bir çok durumlarda ise amaç ve kısıtlamalardan bazıları, seçenekler cümlesine direkt olarak bağlı olmayan karmaşık ilişkiler şeklinde ortaya çıkabilir. Buraya kadar ele alınan problemlerde, üretim maliyetinin seçilen kuruluşa değil de kullanılan hammadde türüne bağlı olması veya çevreye verilen zararın seçilen kuruluş türünden çok, fabrika artıklarının yok edilmesi yöntemiyle ilişkili olması, karmaşık ilişkilere birer örnek oluşturur. Bu durumlarda kullanılacak bazı yöntemler tanıtıp örnekler üzerinde durmaya başlamadan önce, kesinlikten uzak cümlelerin birkaç özelliğini daha incelemek gerekir.

Tanım 9. X ve Y iki ana seçecekler cümlesi; f, Y'den X'e tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

$$f : Y \to X$$

$$f(Y) = X$$

Eğer A, Y'de tanımlanmış $U_A(Y)$ üyelik fonksiyonuna sahip kesinlikten bir cümle ise, f fonksiyonu X'de

$$U_A(X) = \operatorname{Sup}_{y \varepsilon f^{-1}(X)} U_A(Y)$$

üyelik fonksiyonuna sahip, kesinlikten uzak bir A cümlesi oluşturulacaktır. Bu tanımda supremum(4) Y'nin f fonksiyonu ile X'e iletilmiş $f^{-1}(X)$ noktaları arasında alınacaktır.

Böylece değişik uzaylarda kesinlikten uzak cümleler olarak tanımlanmış amaç ve kısıtlamaları aynı uzayda —seçenekler uzayında— tanımlanmış hale getirme olanağına sahip olunur.

Bu yöntemin uygulaması olarak bir önceki örneği aşağıdaki değiştirilmiş şekliyle ele alalım. X seçenekler cümlesi; Y, ise yönetici adayları cümlesi olsun.

$$Y = \{John, Bill, Tom, All\}$$

Ayrıca şu bilgilerin elde edildiğini varsayalım :

John	X_1	Kuruluşunu	yönetmek	istemektedir
Bill	X_1	«	«	«
Tom	X_2	«	«	«
All	X_2 veya X_3	«	«	«

Böylece,

$$f(J) = X_1$$
$$f(B) = X_1$$
$$f(T) = X_2$$
$$f(A) = X_2 \text{ veya } X_3$$

---

(4) Supremum değerlerin en büyüğü olarak tanımlanır (Ç.N.).

şeklinde tanımlanan

$$f : Y \rightarrow X$$

fonksiyonu elde etmiş oluruz. Şimdi probleme yeni bir zorunluluk ekleyelim. C_3 : Yetenekli bir yönetici seçmek istiyoruz. Bu zorunlulukla ilgili Y'de tanımlanmış ve yöneticilerin yeteneklerini ölçen kesinlikten uzak cümle,

$$\underset{C_3}{U}(Y) = \left\{ \frac{0.4}{J}, \frac{0.7}{B}, \frac{0.8}{T}, \frac{0.6}{A} \right\}$$ olsun.

Kesinlikten uzaklıkta karar tekniğini uygulayabilmek için seçenekler uzayında ($\bar{X}$'te) tanımlanmış kesinlikten uzak bir C_3 zorunluluğu (yetenekli bir yönetici) tanımlamak gerekmektedir. Bunun için tanım 9..da belirtilen kuralı uygulayarak fonksiyonla oluşturulan cümle için,

$$\underset{\bar{C}_3}{U}(X_1) = \underset{Y \varepsilon f^{-1}(X_1)}{\mathrm{Sup}} U_{C_3}(Y)$$

bulunur. X_1 için,

$$Y \varepsilon f^{-1}(X_1) = \{J,B\}$$ ve

$$U_{C_3}(J) = 0.4 \,, U_{C_3}(B) = 0.7$$

böylece de

$$\underset{\bar{C}_3}{U}(X_1) = \mathrm{Sup}\,\{0.4\,,0.7\} = 0.7$$

bulunur. X_2 için,

$$Y \varepsilon f^{-1}(X_2) = \{T,A\}$$

$$U_{C_3}(T) = 0.8 \,,\; U_{C_3}(A) = 0.6$$ ve

$$\underset{\bar{C}_3}{U}(X_2) = \mathrm{Sup}\,\{0.8\,,\,0.6\} = 0.8$$

bulunacaktır. Son olarak da,

X_3 için,

$$Y \varepsilon f^{-1}(X_3) = \{A\}$$

$$\underset{\bar{C}_3}{U}(X_3) = \mathrm{Sup}\,\{0.6\} = 0.6$$

bulunur.

Böylece seçenekler uzayında tanımlanmış yetenekli yönetici zorunluluğu şu şekli alacaktır.

$$\bar{C}_3 = \left\{ \frac{0.7}{X_1}, \frac{0.8}{X_2}, \frac{0.6}{X_3} \right.$$

Bundan sonraki adım ise,

$$D = G_1 \cap C_1 \cap \quad \cap C_2 \cap C_3$$

şeklinde belirlenen kararı bulmaktır.

Başka bir uygulama ise karar etkenlerinden bazılarının başka bir uzayda koşullu olması şeklinde ortaya çıkar. Bu uygulamaya giriş için şimdi kesinlikten uzak cümlelerin diğer özellikleri üzerinde duralım.

Tanım 10. $X = \{X\}$'teki bir B (y) kesinlikten uzak cümlesinin üyelik fonksiyonunda y bir parametre olarak kullanılıyorsa B (y) cümlesi y'ye koşulludur denir ve bu koşulluluk U_B (X/y) şeklinde simgelenir. y'nin $\bar{Y}$ uzayının bir elemanı olduğunu ve her y ε Y için $\bar{X}$'te tanımlanmış bir B (y) kesinlikten uzak cümlesi bulunduğunu varsayalım. Böylece Y'den $\bar{X}$'teki kesinlikten uzak cümlelere bir fonksiyon tanımlanmış olmaktadır. Bu fonksiyon U_B ve U_A üyelik fonksiyonları olmak üzere Y'deki kesinlikten uzak kesinl kten uzak bir A cümlesini, $\bar{X}$'deki bir B cümlesine şu şekilde iletilecektir.

$$U_B\ (X) = Sup_y\ Min\ (U_A\ (y),\ U_B\ (X/y))$$

Önceki örnekte karar verme durumunda olan yöneticimiz işçi bulunmasındaki kolaylığı arttırmak istemekte ve bu konu ile ilgili olarak yalnız şunu bilmektedir. «İşçi bulunmasındaki kolaylık kuruluşun şehre uzaklığı ile ilgilidir.» Bu durumda;

Y = {Şehre yakın, Şehirden orta uzaklıkta, Şehirden uzak}

Yazış kolaylığını sağlamak için : Y = {Y, O, U} ;

X seçenekler cümlesi : $X = \{X_1, X_2, X_3,\}$ düşünülen üç kuruluş

A : İşçi bulma kolaylığı ve,

$$U_A\ (y) = \{\frac{1}{Y}, \frac{0.7}{O}, \frac{0.2}{U}\}$$

Ayrıca, «Kuruluşun şehirden uzaklığı» kesinlikten uzak cümleleri, uzaklığın nesnel veya öznel bir yolla derecelendirilmesiyle şöyle verilmiş olsun.

$$U\ (X/Y) = \{\frac{0.7}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.3}{X_3}\}$$

$$U\ (X/O) = \{\frac{0.5}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.6}{X_3}\}$$

$$U(X/U) = \left\{ \frac{0.3}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.7}{X_3} \right\}$$

U (X/Y) = , şehre yakındır; U (X/U) = X , şehre uzaktır.

Bu koşullarda, tanım, 10.da anlatılan özellikler kullanılarak, C_4 : İşçi bulunması kolaylığı cümlesi,

$$U_{C_4}(X) = \left\{ \frac{0.7}{X_1}, \frac{0.5}{X_2}, \frac{0.6}{X_3} \right\}$$

şeklini alacaktır.

SONUÇ

Bu yazıda kesinlikten uzak cümlelerin karar teorisine uygulanmasının bazı küçük örnekleri tanıtılmaya çalışılmıştır. Konumuzda, üzerinde çalışılmasını, araştırma yapılmasını en çok gerektiren nokta, üyelik fonksiyonlarının belirlenmesidir. Bayesien kuramında kullanılana benzer, tutarlı bir yöntemin kesinlikten uzak cümlelerde kullanılmak üzere geliştirilmesi temenni edilir.

Kesinlikten uzaklık teorisinin uygulandığı çeşitli dallar vardır. Pazarlıklar, hastalık tanınması, tüketicilerin satınalma sistemleri ve bilgi işlem sistemleri bu dalların önemlilerindendir. Kesinlikten uzak cümleler için daha geniş bilgi edinmek isteyen okuyuculara {1} ve {8} numaralı kaynaklar salık verilir. {1} özellikle kesinlikten uzak cümlelerin dinamik programlamada kullanışının incelenmesi bakımından ilginçtir. {3} ve {7} ise kesinlikten uzak cümlelere olasılıklı ve «entropy» yapılar sağlanması ve örnek tanınması (pattern recognition) problemlerindeki uygulanışı nedeniyle ilgi toplar.

KAYNAKLAR

(1) Bellman, R.E. and L. A. Zadeh : «Decision Making in a Fuzzy Environment», **Management Sci.,** Vol. 17 (1970), pp. B-141 - B - 164.

(2) Chang, S.S.L. : «Fuzzy Mathematics, Man and His Environ - ment», **IEEE Trans. Systems, Man an Cybernetics,** (Jan 1972), pp. 92-93.

(3) Luca, A. and S. Termini : «A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory» **Information and Control** Vol. 20 (1972), pp. 302-312.

(4) Wee, W.G. and K.S. Fu. : «A Formulation of Fuzzy Automata and ıts Application As a Model Learning Systems.» **Man and Cybernetics,** Vol. SSC-5 (1969), pp. 215-225.

(5) Zadeh, L.A. : «Fuzzy Sets», **Information and Control,** Vol. 8 (1965), pp. 338-353.

(6) Zadeh, L.A. : «Fuzzy Algorithms», **Information and Control,** Vol. 12(1968), pp. 94-102.

(7) Zadeh, L.A. : «Probability Measure of Fuzzy Events», **Jour, Math, and Appl.,** Vol. 10(1968), pp. 421-427.

(8) Zadeh, L.A. : «Qutline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes», **IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics,** Vol. 3 (Jan 1973), pp. 28-44.