

## Pozitif Çarpık Dağılımın Yığın Ortalaması İçin Mutlak Sapmaya Dayalı Güven Aralıkları

Zeliha TÜRKMEN \*

Hamza GAMGAM\*\*

Geliş Tarihi (Received): 10.03.2020 – Kabul Tarihi (Accepted): 04.06.2020

### Öz

Yığın ortalaması için Student-t dağılımına dayalı olan klasik güven aralığı yöntemi yaygın olarak kullanılır. Ancak normallik varsayımı gerektiren bu güven aralığı yöntemi, pozitif çarpık yığınlar için iyi sonuçlar vermemektedir. Literatürde, pozitif çarpık dağılımlı yığınların ortalaması için birçok güven aralığı yöntemi çalışılmıştır. Bu çalışmada klasik güven aralığı yönteminde basit düzenlemeler ile AADM-t, MAAD-t ve MADM-t isimli üç güven aralığı yöntemi tanıtılmıştır. Abu-Shawiesh, Banik ve Kibria (2018) tarafından önerilen bu güven aralığı yöntemleri mutlak sapmalara dayanırlar. Bu güven aralığı yöntemlerini klasik güven aralığı yöntemi ile karşılaştırmak için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu simülasyon çalışmasında farklı çarpıklık katsayılı Gamma, Beta ve Lognormal dağılımlarından veri üretilmiştir. Güven aralığı yöntemlerinin karşılaştırılmaları için kapsama olasılığı ve ortalama aralık genişliği kriterleri kullanılmıştır. Bu simülasyon çalışması, Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralığı yöntemi ve AADM-t güven aralığı yönteminin nominal güven düzeyine yakın kapsama olasılıkları verdiklerini göstermiştir. Fakat, MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemleri kapsama olasılığı bakımından oldukça kötüdür. AADM-t güven aralığı yönteminin ortalama aralık genişliklerinin Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralıklarınıninkilere kıyasla daha dar olması nedeniyle en iyi güven aralığı yöntemi AADM-t bulunmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** *Hipotez Testi, Güven Aralığı, Simülasyon*

---

\*Yüksek Lisans öğrencisi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, zeliha.turkmen1@gazi.edu.tr

\*\* Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, gamgam@gazi.edu.tr

## Confidence Intervals Based On Absolute Deviation For Population Mean Of A Positively Skewed Distribution

### Abstract

The classical confidence interval method, which is based on the Student-t distribution for the mean of the population, is widely used. However, this confidence interval method which requires the assumption of normal distribution, it does not give good results for positive skewed distributions. In this study, three confidence interval methods named the AADM-t, MAAD-t and MADM-t methods which are formed by making simple adjustments in classical confidence interval method of the population mean are introduced. These confidence interval methods proposed by Abu-Shawiesh et al. (2018) are based on absolute deviations. A simulation study was conducted to compare these confidence interval methods with the classical confidence interval method. The data in this simulation study were generated from Gamma, Beta and Lognormal distributions with different skewness coefficients. Coverage probability and average width criteria were used to compare these confidence interval methods. This simulation study showed that the classical confidence interval method based on the Student-t distribution and the AADM-t confidence interval method gave coverage possibilities close to nominal confidence level. But, the coverage possibilities of the MAAD-t and MADM-t confidence interval methods are unsuccessful. Because of the average widths of the AADM-t confidence interval method are narrower than those of the classical confidence intervals based on the Student-t distribution, the best confidence interval method is considered to be the AADM-t.

**Keywords:** *Hypothesis Testing, Confidence Intervals, Simulation*

## Giriş

Literatürde yığın ortalaması için güven aralığını oluşturmak amacıyla birçok çalışma mevcuttur. Bu amaçla Student-t dağılımına dayalı olan güven aralığı yöntemi en çok kullanılan yöntemdir. Normal dağılım varsayımı altında oldukça iyi sonuçlar veren bu güven aralığı yöntemi, özellikle pozitif çarpık dağılımlı yığınlar için iyi sonuçlar vermemektedir. Bu nedenle pozitif çarpık yığınların ortalamaları için güven aralığı oluşturmak amacıyla literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Normal dağılım varsayımının sağlanmadığı durumlar için Abu-Shawiesh ve diğerleri (2018) yığın ortalaması için AADM-t, MAAD-t ve MADM-t isimli güven aralığı yöntemlerini önermişlerdir. Bu güven aralığı yöntemleri medyan mutlak sapma istatistiklerine dayanırlar ve Student-t klasik güven aralığı yönteminde basit düzenlemeler ile elde edilirler.

Bu çalışmanın birinci bölümünde pozitif çarpık dağılımın yığın ortalamasına ilişkin güven aralıkları ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde Student-t klasik güven aralığı yöntemi ile AADM-t, MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemleri kısaca tanıtılmıştır. Üçüncü bölüm bu güven aralığı yöntemlerinin performanslarının karşılaştırılması amacıyla gerçekleştirilen simülasyon çalışmasını ve sonuçlarını içermektedir. Dördüncü bölümde ise bu güven aralığı yöntemlerinin gerçek yaşam verisi üzerinde çalışmasını görmek için Perez-Meloand ve Kibria (2016) tarafından kullanılan gerçek veri ile bir uygulama yapılmıştır. Son bölümde de genel değerlendirmelere yer verilmiştir.

### 1. Literatür Taraması

Çarpık dağılımların yığın ortalamasının güven aralığı üzerine Johnson (1978), Diccio, Hall ve Romano (1991), Hall (1992) ve Chen (1995) tarafından ilk çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra, Wang (2001), Zhou ve Dinh (2005), Kibria (2006), Shi ve Kibria (2007), Baklizi ve Kibria (2009), Banik ve Kibria (2011), Banik ve Kibria (2013), Banik ve Kibria (2014), Banik ve diğerleri (2014) çarpık dağılımlarında yığın ortalaması için güven aralığını çalışmışlardır. Yakın zamanda bir çalışma da Abu-Shawiesh ve diğerleri (2018) tarafından yapılmıştır.

### 2. Yığın Ortalaması İçin Güven Aralığı Yöntemleri

Bağımsız ve benzer dağılımlı bir rasgele örnek  $X_1, \dots, X_n$  olsun ve bilinmeyen ortalaması  $\mu$  ve varyansı da  $\sigma^2$  olan pozitif çarpık bir dağılımdan geldiği varsayalım. Yığın ortalaması için güven aralığı yöntemlerinden Student-t dağılımına dayanan güven aralığı yöntemi ile Abu-Shawiesh ve diğerleri (2018) tarafından önerilen klasik güven aralığı yöntemleri aşağıda kısaca verilmiştir.

## 2.1. Student-t Dağılımına Dayalı Klasik Güven Aralığı

Yığının dağılımı normal iken bu güven aralığı yöntemi oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Yığın varyansı biliniyorken, bu yöntem ile ortalama için güven aralığı, örnek ortalaması  $\bar{X}$ , I. tip hata  $\alpha$ , örnek hacmi  $n$  ve standart normal dağılımda üst  $\alpha/2$ 'nci yüzdelik değeri de  $Z_{\alpha/2}$  olmak üzere,

$$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

ile bulunur.

Yığın varyansı bilinmiyorsa Student-t güven aralığı yöntemi olarak bilinen  $\mu$  için güven aralığı aşağıdaki gibi verilir.

$$P\left(\bar{X} - t_{(n-1, \alpha/2)} S/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + t_{(n-1, \alpha/2)} S/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

Burada  $t_{(n-1, \alpha/2)}$  (n-1) serbestlik dereceli Student-t dağılımının üst  $\alpha/2$ 'nci yüzdelik değeri ve S de örnek standart sapmasıdır.

## 2.2. Medyan Mutlak Sapmalara Dayalı Güven Aralıkları

Bu bölümde Abu-Shawiesh ve diğerleri (2018) tarafından önerilen medyan mutlak sapma istatistiklerine dayanan üç güven aralığı yöntemi tanıtılmıştır. Bu güven aralığı yöntemlerinde standart hata hesabında aritmetik ortalamaya göre daha sağlam bir tahmin edici olması nedeniyle örnek medyayı kullanılmıştır.

### 2.2.1. AADM-t güven aralığı.

Bu güven aralığı yöntemlerinin birincisi AADM-t güven aralığı yöntemi olarak isimlendirilmiştir ve Student-t klasik güven aralığı yönteminde basit düzenlemeler ile elde edilmiştir. Örnek medyayı MD ve

$$AADM = \frac{\sqrt{\pi/2}}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - MD|$$

olmak üzere,  $\mu$  için  $(1 - \alpha)100\%$  AADM-t güven aralığı

$$P\left(\bar{X} - t_{(n-1, \alpha/2)} AADM/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + t_{(n-1, \alpha/2)} AADM/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

olarak verilmiştir (Abu-Shawiesh ve diğerleri, 2018, s. 2).

### 2.2.2. MAAD-t güven aralığı.

Bu güven aralığı yöntemlerinden ikincisi MAAD-t güven aralığı yöntemi olarak isimlendirilmiştir ve Student-t klasik güven aralığının başka bir değiştirilmiş biçimidir. Ortalamadan mutlak sapmaların medyanı

$$MAAD = Medyan\{|X_i - \bar{X}|\}, i=1,2,\dots,n$$

olmak üzere,  $\mu$  için  $(1-\alpha)$ 100% MAAD-t güven aralığı,

$$P\left(\bar{X} - t_{(n-1,\alpha/2)} MAAD/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + t_{(n-1,\alpha/2)} MAAD/\sqrt{n}\right) = 1-\alpha$$

olarak verilmiştir (Abu-Shawiesh ve diğerleri, 2018, s. 2).

### 2.2.3. MADM-t güven aralığı.

Abu-Shawiesh ve diğerleri (2018) tarafından pozitif çarpık yığınların ortalaması için önerilen bir diğer güven aralığı MADM-t güven aralığı yöntemi olarak isimlendirilmiştir. Bu güven aralığı yöntemi, Hampel (1974) tarafından tanıtılan ve

$$MADM = medyan\{|X_i - MD|\}, i = 1, 2, \dots, n$$

olarak tanımlanan örnek medyanından mutlak sapmaların medyanı tahmin edicisini kullanır. Buna göre,  $\mu$  için  $(1-\alpha)$ 100% MADM-t güven aralığı,

$$P\left(\bar{X} - t_{(n-1,\alpha/2)} MADM/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + t_{(n-1,\alpha/2)} MADM/\sqrt{n}\right) = 1-\alpha$$

olarak verilmiştir.

## 3. Simülasyon Çalışması

Abu-Shawiesh ve diğerleri (2018) tarafından ikinci bölümdeki güven aralıklarının karşılaştırılması için sadece bir dağılıma dayalı olan dar kapsamlı bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Yaptığımız çalışmada bu güven aralıklarının karşılaştırılmasında çok daha geniş kapsamlı bir simülasyon tasarımı kullanılmıştır. Simülasyon çalışması için farklı çarpıklık katsayılı Gamma, Beta ve Lognormal dağılımlarından veri üretilmiştir. Bu veriler üretilirken çarpıklık katsayısı 0,60 olan Gamma (11, 2), çarpıklık katsayısı 0,70 olan Gamma (8, 4), çarpıklık katsayısı 0,60 olan Beta (2, 5), çarpıklık katsayısı 0,70 olan Beta (2, 6), çarpıklık katsayısı 0,60 olan Lognormal (0, 0,20) ve çarpıklık katsayısı 1,75 olan Lognormal (0, 0,50) dağılımları seçilmiştir. Örnek hacimleri de 5(1)15, 20(5)50, 60(10)100 olarak alınmıştır. İterasyon sayısı 2500 ve nominal I. tip hata da 0,05 alınmıştır. Simülasyon çalışmasında güven

aralıklarını karşılaştırırken güven aralığının yığın ortalamasını kapsama olasılığı ve güven aralığının ortalama genişliği kriterleri kullanılmıştır.

### 3.1. Simülasyon Bulguları

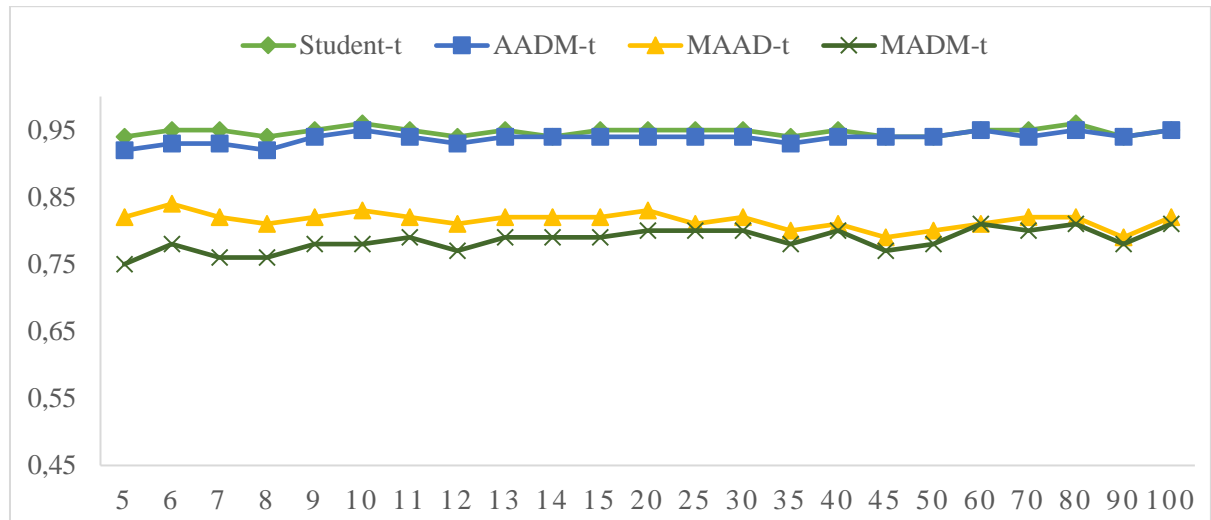
Simülasyon çalışmasında güven aralığı yöntemlerini karşılaştırmak için kullanılan kapsama olasılığı, yığın ortalamasının güven aralığının alt ve üst sınırları arasında olduğu durumların sayısının iterasyon sayısına oranı olarak hesaplanmıştır. Kapsama olasılıklarının testin güven düzeyine yakın olması istenir. Ortalama genişlik ise her iterasyon için güven aralığının alt ve üst sınırları arasındaki farkların toplamlarının iterasyon sayısına oranı olarak hesaplanmıştır. Kapsama olasılığı güven düzeyine yakın birden fazla güven aralığı yöntemi varsa, ortalama genişliği en küçük olan güven aralığı yöntemi yığın ortalaması için en iyi yöntemi verir. Kapsama olasılığı ve ortalama genişliğe ilişkin sonuçlar Tablo 1-6 ve Şekil 1-6' da verilmiştir.

Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Gamma dağılımından üretilen veriye dayanan ve Tablo 1 ile Şekil 1' de verilen simülasyon sonuçları, Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralığı yöntemi ile AADM-t güven aralığı yönteminin diğer güven aralığı yöntemlerine göre nominal güven düzeyine daha yakın kapsama olasılıklarını verdiklerini göstermiştir. Bu kriter bakımından en kötü sonucu ise MADM-t güven aralığı yöntemi vermiştir. Diğer yandan, MADM-t güven aralığı yönteminin diğer güven aralığı yöntemlerine göre daha küçük ortalama genişlikler verdiği görülmüştür.

Çarpıklık katsayısı 0,70 olan Gamma dağılımı için elde edilen sonuçlar Tablo 2 ve Şekil 2'de görülmektedir. Bu sonuçlardan, küçük örnek hacimleri hariç, Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralığı yöntemi ve AADM-t güven aralığı yönteminin kapsama olasılığı bakımından diğerlerine göre daha iyi sonuçlar verdikleri anlaşılmaktadır. Bunun yanında, AADM-t güven aralığı yöntemi için ortalama aralık genişlikleri Student-t dağılımına dayalı güven aralığı yönteminin ortalama aralık genişliklerinden daha dardır. Diğer yandan MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemlerinin ortalama aralık genişlikleri diğerlerine göre oldukça dar olsa da bu yöntemler kapsama olasılığı bakımından oldukça kötüdür.

**Tablo 1.** Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Gamma (11, 2) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları (CP) ve ortalama aralık genişlikleri (AW)

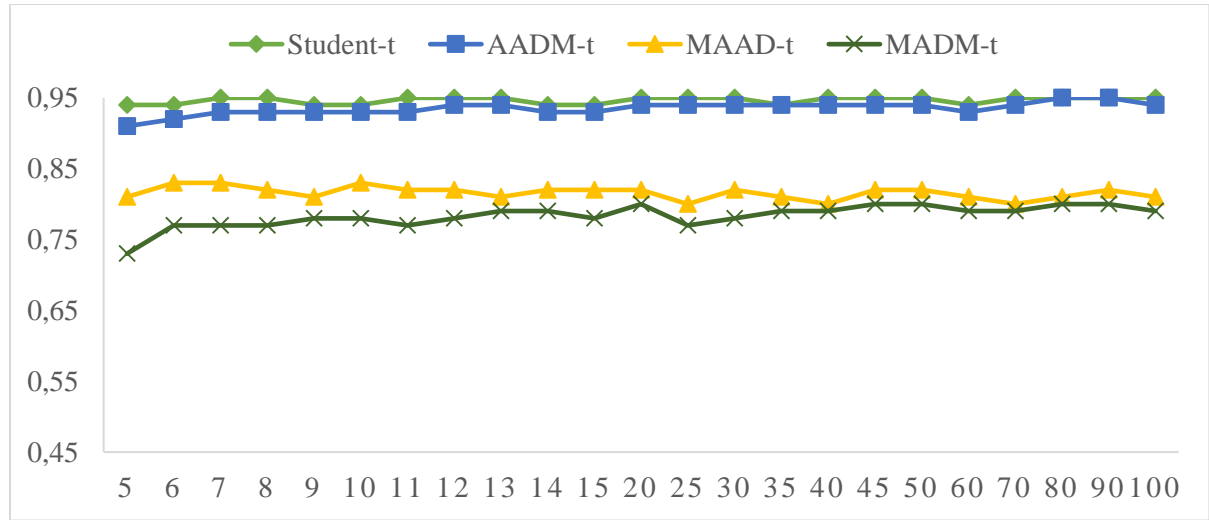
n	Student-t		AADM-t		MAAD-t		MADM-t	
	CP	AW	CP	AW	CP	AW	CP	AW
5	0,94	15,26	0,92	13,43	0,82	10,22	0,75	8,87
6	0,95	13,30	0,93	12,25	0,84	9,10	0,78	7,71
7	0,95	11,65	0,93	10,61	0,82	7,91	0,76	6,97
8	0,94	10,61	0,92	9,94	0,81	7,28	0,76	6,49
9	0,95	9,87	0,94	9,16	0,82	6,62	0,78	6,06
10	0,96	9,24	0,95	8,74	0,83	6,28	0,78	5,74
11	0,95	8,56	0,94	8,08	0,82	5,81	0,79	5,40
12	0,94	8,20	0,93	7,80	0,81	5,55	0,77	5,12
13	0,95	7,81	0,94	7,41	0,82	5,26	0,79	4,93
14	0,94	7,53	0,94	7,21	0,82	5,13	0,79	4,77
15	0,95	7,22	0,94	6,89	0,82	4,88	0,79	4,58
20	0,95	6,14	0,94	5,94	0,83	4,19	0,80	3,96
25	0,95	5,39	0,94	5,22	0,81	3,64	0,80	3,48
30	0,95	4,90	0,94	4,76	0,82	3,30	0,80	3,15
35	0,94	4,44	0,93	4,32	0,80	2,98	0,78	2,88
40	0,95	4,19	0,94	4,09	0,81	2,83	0,80	2,73
45	0,94	3,94	0,94	3,85	0,79	2,65	0,77	2,56
50	0,94	3,73	0,94	3,64	0,80	2,50	0,78	2,41
60	0,95	3,40	0,95	3,33	0,81	2,28	0,81	2,22
70	0,95	3,16	0,94	3,10	0,82	2,12	0,80	2,06
80	0,96	2,95	0,95	2,90	0,82	1,98	0,81	1,93
90	0,94	2,79	0,94	2,74	0,79	1,88	0,78	1,83
100	0,95	2,65	0,95	2,60	0,82	1,78	0,81	1,73



**Şekil 1.** Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Gamma (11, 2) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları

**Tablo 2.** Çarpıklık katsayısı 0,70 olan Gamma (8, 4) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları (CP) ve ortalama aralık genişlikleri (AW)

n	Student-t		AADM-t		MAAD-t		MADM-t	
	CP	AW	CP	AW	CP	AW	CP	AW
5	0,94	26,12	0,91	23,02	0,81	17,58	0,73	15,12
6	0,94	22,20	0,92	20,53	0,83	15,35	0,77	13,01
7	0,95	19,97	0,93	18,23	0,83	13,76	0,77	12,06
8	0,95	17,99	0,93	16,83	0,82	12,36	0,77	10,9
9	0,94	16,56	0,93	15,39	0,81	11,24	0,78	10,2
10	0,94	15,45	0,93	14,60	0,83	10,56	0,78	9,59
11	0,95	14,79	0,93	13,85	0,82	9,91	0,77	9,07
12	0,95	14,05	0,94	13,32	0,82	9,55	0,78	8,73
13	0,95	13,32	0,94	12,62	0,81	8,99	0,79	8,38
14	0,94	12,67	0,93	12,11	0,82	8,61	0,79	7,99
15	0,94	12,27	0,93	11,69	0,82	8,32	0,78	7,78
20	0,95	10,41	0,94	10,02	0,82	7,06	0,80	6,64
25	0,95	9,17	0,94	8,84	0,80	6,20	0,77	5,86
30	0,95	8,41	0,94	8,14	0,82	5,67	0,78	5,39
35	0,94	7,59	0,94	7,36	0,81	5,10	0,79	4,86
40	0,95	7,09	0,94	6,90	0,80	4,78	0,79	4,58
45	0,95	6,69	0,94	6,51	0,82	4,50	0,80	4,32
50	0,95	6,38	0,94	6,22	0,82	4,31	0,80	4,13
60	0,94	5,83	0,93	5,68	0,81	3,92	0,79	3,77
70	0,95	5,38	0,94	5,25	0,80	3,60	0,79	3,47
80	0,95	5,05	0,95	4,94	0,81	3,39	0,80	3,28
90	0,95	4,76	0,95	4,65	0,82	3,20	0,80	3,08
100	0,95	4,52	0,94	4,42	0,81	3,04	0,79	2,94



**Şekil 2.** Çarpıklık katsayısı 0,70 olan Gamma (8, 4) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları



Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Beta dağılımı için elde edilen sonuçların yer aldığı Tablo 3 ve Şekil 3, Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralığı yöntemi ve AADM-t güven aralığı yönteminin kapsama olasılıklarının benzer olduğunu ve nominal güven düzeyine oldukça yakın kapsama olasılıkları verdiklerini göstermektedir. Gamma dağılımında olduğu gibi, MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemlerinin kapsama olasılıkları ise nominal güven düzeyinden oldukça uzaktır. Sonuç olarak AADM-t güven aralığı yönteminin ortalama aralık genişliklerinin Student-t güven aralığı yönteminin ortalama aralık genişliklerinden daha küçük olması nedeniyle Beta (2, 5) dağılımı için en iyi yöntem AADM-t güven aralığı yöntemidir.

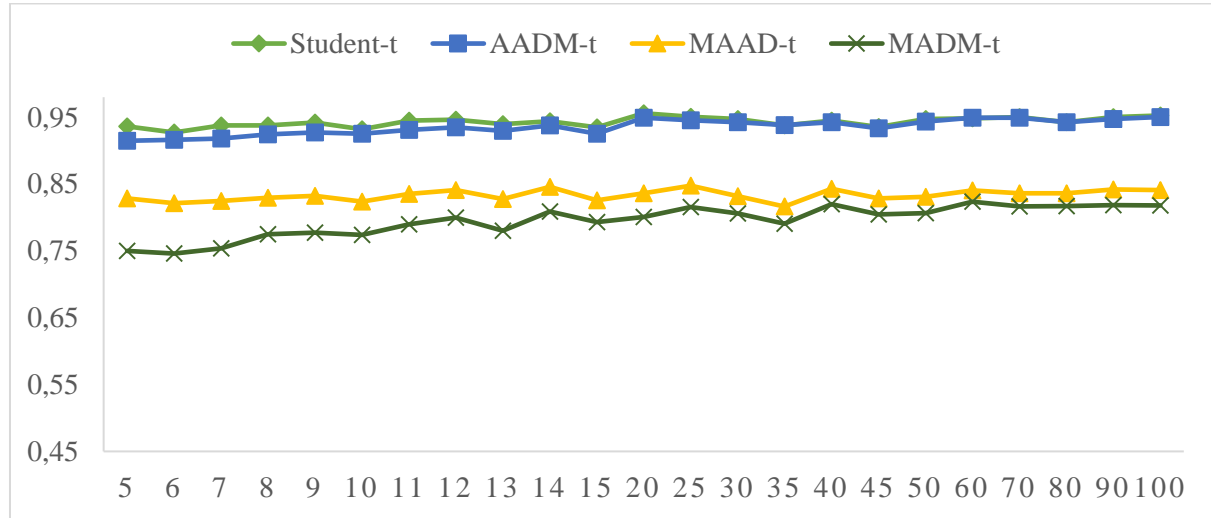
Çarpıklık katsayısı 0,70 olan Beta dağılımı için Tablo 4 ve Şekil 4'te verilen simülasyon sonuçları, Student-t dağılımına dayalı güven aralığı yöntemi ve AADM-t güven aralığı yönteminin kapsama olasılıklarının nominal güven düzeyine yakın olduklarını göstermektedir. Gamma dağılımına ilişkin sonuçlarda olduğu gibi, MADM-t güven aralığı yöntemi Student-t dağılımına dayalı güven aralığı yöntemine göre daha dar ortalama genişlikler vermiştir. Önceki sonuçlarda olduğu gibi MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemleri kapsama olasılığı bakımından oldukça kötüdür. Bu nedenle, Beta dağılımı için en iyi yöntem AADM-t güven aralığı yöntemidir.

Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Lognormal dağılımından üretilen veriye dayanan ve Tablo 5 ile Şekil 5'te verilen simülasyon sonuçları, Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralığı yöntemi ile AADM-t güven aralığı yönteminin nominal güven düzeyine daha yakın kapsama olasılıklarını verdiklerini göstermiştir. Diğer güven aralığı yöntemleri için kapsama olasılıkları oldukça kötüdür. Bu nedenle ortalama aralık genişlikleri de dikkate alındığında bu dağılım için en iyi yöntem AADM-t yöntemidir.

Çarpıklık katsayısı 1,75 olan Lognormal dağılımı için Tablo 6 ve Şekil 6'da verilen simülasyon sonuçları, kapsama olasılığı bakımından, genel olarak, diğer dağılımlar için elde edilen sonuçlar ile benzerlik göstermektedir. Diğer yandan, MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemleri daha dar ortalama aralık genişliklere sahip olsa da kapsama olasılığı bakımından oldukça kötüdür.

**Tablo 3.** Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Beta (2, 5) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları (CP) ve ortalama aralık genişlikleri (AW)

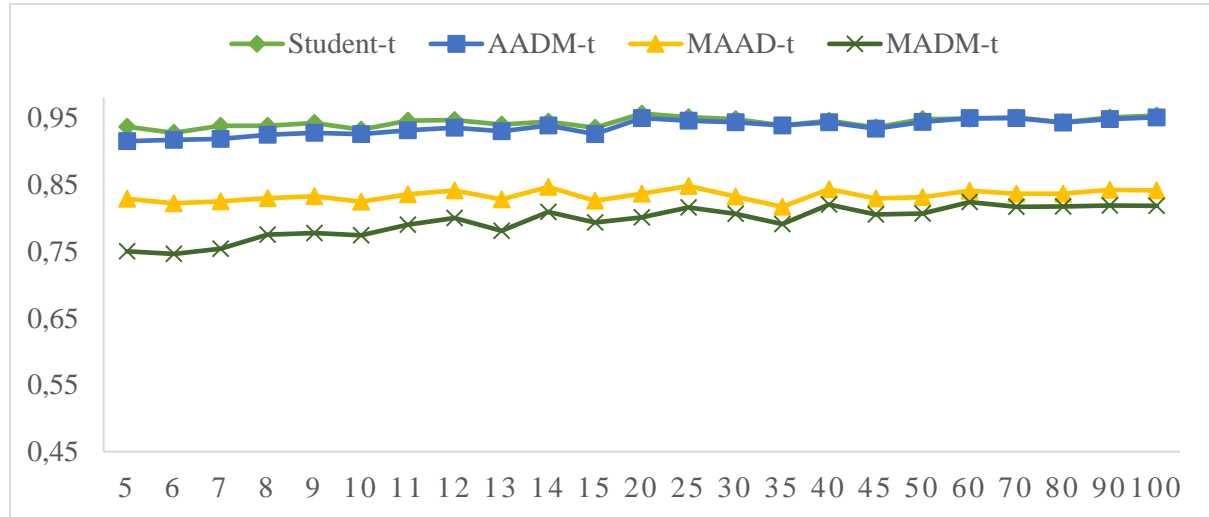
n	Student-t		AADM-t		MAAD-t		MADM-t	
	CP	AW	CP	AW	CP	AW	CP	AW
5	0,9396	0,3743	0,9168	0,3318	0,8348	0,2581	0,7528	0,2189
6	0,9324	0,3157	0,9176	0,2946	0,8320	0,2254	0,7716	0,1907
7	0,9404	0,2828	0,9192	0,2608	0,8184	0,2019	0,7656	0,1763
8	0,9408	0,2585	0,9288	0,2454	0,8452	0,1848	0,7868	0,1615
9	0,9388	0,2394	0,9276	0,2263	0,8320	0,1715	0,7868	0,1550
10	0,9440	0,2208	0,9340	0,2120	0,8252	0,1573	0,7828	0,1415
11	0,9444	0,2101	0,9332	0,2013	0,8340	0,1509	0,7932	0,1378
12	0,9328	0,1982	0,9220	0,1910	0,8152	0,1411	0,7792	0,1289
13	0,9424	0,1899	0,9320	0,1836	0,8360	0,1358	0,8068	0,1247
14	0,9436	0,1800	0,9408	0,1749	0,8408	0,1287	0,8036	0,1185
15	0,9476	0,1734	0,9372	0,1683	0,8308	0,1236	0,7932	0,1139
20	0,9560	0,1474	0,9488	0,1451	0,8324	0,1066	0,8056	0,0996
25	0,9508	0,1307	0,9508	0,1290	0,8420	0,0942	0,8144	0,0890
30	0,9384	0,1186	0,9364	0,1178	0,8268	0,0857	0,8040	0,0814
35	0,9528	0,1073	0,9480	0,1067	0,8436	0,0775	0,8212	0,0737
40	0,9388	0,1005	0,9404	0,1004	0,8460	0,0732	0,8256	0,0694
45	0,9492	0,0949	0,9480	0,0948	0,8500	0,0688	0,8320	0,0657
50	0,9424	0,0898	0,9408	0,0900	0,8276	0,0652	0,8108	0,0622
60	0,9476	0,0823	0,9480	0,0824	0,8452	0,0596	0,8252	0,0568
70	0,9576	0,0762	0,9560	0,0764	0,8404	0,0552	0,8172	0,0527
80	0,9520	0,0714	0,9540	0,0717	0,8492	0,0518	0,8312	0,0496
90	0,9492	0,0673	0,9512	0,0678	0,8576	0,0490	0,8384	0,0470
100	0,9468	0,0637	0,9468	0,0642	0,8428	0,0464	0,8232	0,0445



**Şekil 3.** Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Beta (2, 5) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları

**Tablo 4.** Çarpıklık katsayısı 0,70 olan Beta (2, 6) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları (CP) ve ortalama aralık genişlikleri (AW)

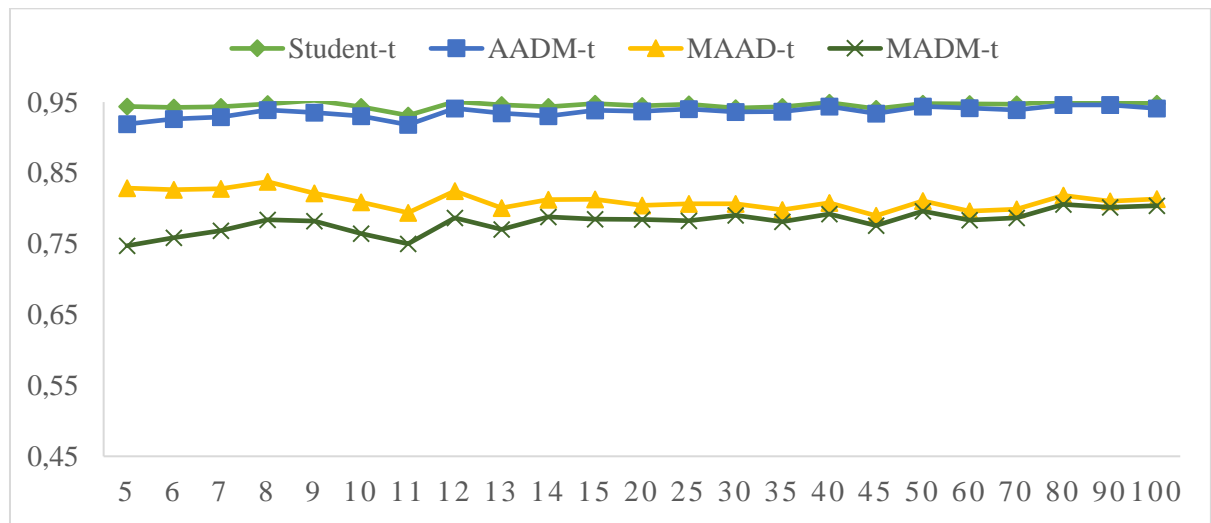
n	Student-t		AADM-t		MAAD-t		MADM-t	
	CP	AW	CP	AW	CP	AW	CP	AW
5	0,9364	0,3346	0,9148	0,2954	0,8284	0,229	0,75	0,1892
6	0,9272	0,2856	0,9164	0,2639	0,8216	0,1993	0,746	0,1664
7	0,9376	0,2576	0,918	0,2359	0,8248	0,1815	0,754	0,1553
8	0,9376	0,2326	0,9244	0,2191	0,8296	0,1651	0,7748	0,1431
9	0,942	0,217	0,9272	0,2045	0,8324	0,1549	0,7772	0,1384
10	0,932	0,1993	0,9252	0,1901	0,824	0,1411	0,774	0,1260
11	0,9452	0,1882	0,9312	0,1791	0,8352	0,134	0,7896	0,1200
12	0,9464	0,1791	0,9348	0,1725	0,8408	0,1281	0,7996	0,1158
13	0,9396	0,1705	0,9296	0,1638	0,8276	0,1228	0,7804	0,1113
14	0,944	0,1633	0,938	0,158	0,846	0,1164	0,8088	0,1069
15	0,9348	0,1572	0,9252	0,152	0,8256	0,1123	0,7932	0,1026
20	0,956	0,1334	0,9492	0,1302	0,836	0,095	0,8008	0,088
25	0,9508	0,1185	0,9456	0,1162	0,8476	0,0848	0,8156	0,0795
30	0,9476	0,1069	0,9428	0,1055	0,832	0,0766	0,806	0,0717
35	0,938	0,0968	0,9384	0,0955	0,8164	0,069	0,7908	0,0649
40	0,9452	0,0905	0,9428	0,0897	0,8428	0,065	0,82	0,0613
45	0,9352	0,0856	0,9336	0,0849	0,8288	0,0616	0,8048	0,0579
50	0,9476	0,0809	0,9436	0,0804	0,8308	0,0583	0,8064	0,055
60	0,9484	0,0742	0,9492	0,074	0,8404	0,0533	0,8236	0,0506
70	0,9504	0,0687	0,9492	0,0684	0,836	0,0493	0,8164	0,0468
80	0,9428	0,0644	0,9424	0,0642	0,836	0,0462	0,8172	0,0439
90	0,95	0,0608	0,9476	0,0606	0,842	0,0436	0,8184	0,0415
100	0,9528	0,0575	0,9504	0,0574	0,8408	0,0414	0,818	0,0393



**Şekil 4.** Çarpıklık katsayısı 0,70 olan Beta (2, 6) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları

**Tablo 5.** Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Lognormal (0, 0,20) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları (CP) ve ortalama aralık genişlikleri (AW)

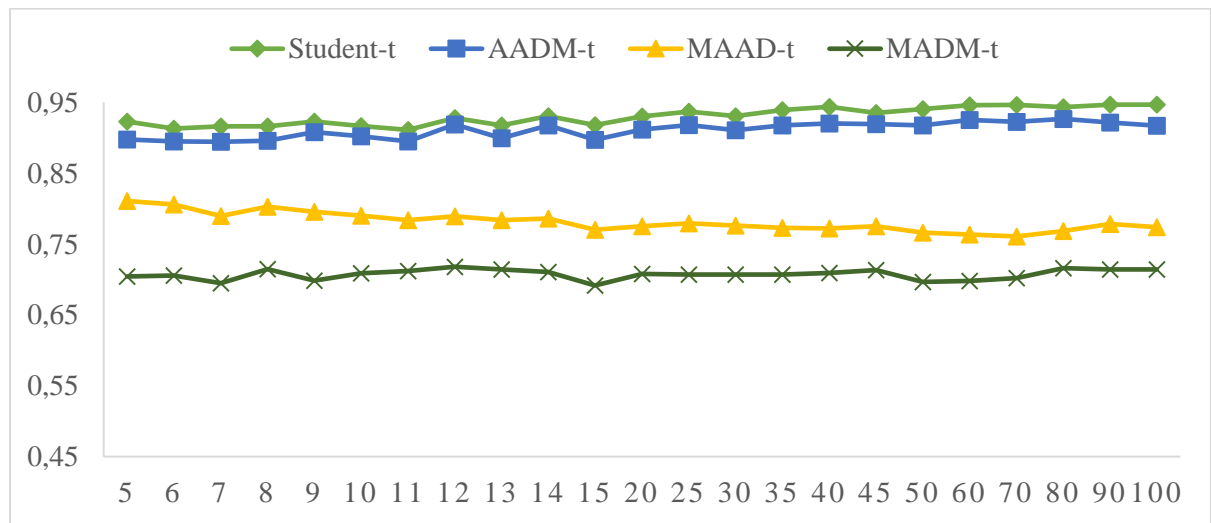
n	Student-t		AADM-t		MAAD-t		MADM-t	
	CP	AW	CP	AW	CP	AW	CP	AW
5	0,944	0,4813	0,9188	0,4248	0,8288	0,3242	0,7472	0,2812
6	0,9424	0,4056	0,9264	0,3726	0,8264	0,2748	0,7584	0,2347
7	0,9436	0,3663	0,9288	0,3342	0,8276	0,2517	0,7684	0,2213
8	0,9476	0,3309	0,9388	0,3098	0,8376	0,2255	0,784	0,2006
9	0,9524	0,3064	0,9352	0,2846	0,8212	0,2055	0,782	0,1885
10	0,9436	0,2859	0,9304	0,2687	0,8088	0,1926	0,7644	0,1753
11	0,9312	0,2703	0,918	0,2532	0,794	0,1804	0,75	0,1665
12	0,9504	0,2557	0,9412	0,2435	0,8244	0,1733	0,7868	0,1601
13	0,946	0,2416	0,9344	0,2282	0,8008	0,1622	0,7704	0,1515
14	0,9436	0,2312	0,9304	0,2215	0,8124	0,1572	0,788	0,1468
15	0,948	0,2227	0,9384	0,212	0,8128	0,1493	0,7848	0,1405
20	0,9448	0,189	0,9372	0,1822	0,8044	0,127	0,7844	0,1206
25	0,9472	0,1688	0,9404	0,1627	0,8064	0,1131	0,7824	0,1077
30	0,9416	0,1517	0,936	0,1471	0,8064	0,1013	0,79	0,0974
35	0,9432	0,138	0,9364	0,134	0,798	0,0922	0,7812	0,0887
40	0,9492	0,1298	0,944	0,1261	0,8076	0,0867	0,792	0,0834
45	0,9408	0,1222	0,934	0,1189	0,7896	0,0814	0,7756	0,0788
50	0,948	0,1154	0,944	0,1125	0,8104	0,0767	0,796	0,0746
60	0,9476	0,1061	0,9416	0,1036	0,796	0,0709	0,7832	0,0689
70	0,9468	0,0982	0,9388	0,0958	0,7988	0,0653	0,7868	0,0635
80	0,9516	0,0917	0,946	0,0897	0,8184	0,0611	0,8056	0,0595
90	0,9504	0,0867	0,946	0,0848	0,81	0,0577	0,8016	0,056
100	0,948	0,0821	0,9412	0,0805	0,8132	0,0547	0,8036	0,0534



**Şekil 5.** Çarpıklık katsayısı 0,60 olan Lognormal (0, 0,20) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları

**Tablo 6.** Çarpıklık katsayısı 1,75 olan Lognormal (0, 0,50) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları (CP) ve ortalama aralık genişlikleri (AW)

n	Student-t		AADM-t		MAAD-t		MADM-t	
	CP	AW	CP	AW	CP	AW	CP	AW
5	0,9228	1,3359	0,8976	1,1398	0,8108	0,8851	0,7044	0,6789
6	0,9132	1,1268	0,8948	1,0024	0,806	0,747	0,7056	0,5804
7	0,9164	1,02	0,8944	0,8905	0,7896	0,6643	0,6948	0,5319
8	0,916	0,9309	0,896	0,8339	0,8028	0,6099	0,7148	0,4922
9	0,9232	0,863	0,908	0,7693	0,7956	0,5648	0,6984	0,4621
10	0,9168	0,8015	0,9024	0,7201	0,79	0,521	0,7088	0,4313
11	0,9112	0,7488	0,8948	0,6729	0,784	0,4857	0,712	0,4077
12	0,928	0,7205	0,9188	0,65	0,7892	0,4668	0,718	0,3936
13	0,9176	0,6913	0,8996	0,6221	0,784	0,4487	0,714	0,3781
14	0,9308	0,6643	0,9176	0,5985	0,786	0,4248	0,7104	0,3571
15	0,918	0,6354	0,8972	0,5715	0,7704	0,4046	0,6916	0,3441
20	0,93	0,5433	0,9116	0,4913	0,7752	0,3455	0,708	0,2973
25	0,9372	0,4845	0,918	0,4363	0,7792	0,3042	0,7072	0,2625
30	0,9308	0,4396	0,9108	0,3967	0,776	0,2755	0,7068	0,2407
35	0,9392	0,3972	0,9176	0,3593	0,7728	0,2497	0,7072	0,2176
40	0,9436	0,3758	0,9204	0,3386	0,772	0,2348	0,7092	0,2028
45	0,9352	0,3525	0,9196	0,3193	0,7752	0,2217	0,7132	0,1936
50	0,9404	0,3351	0,9176	0,3027	0,7664	0,2092	0,6964	0,1821
60	0,946	0,3081	0,9252	0,2777	0,7636	0,1911	0,698	0,1666
70	0,9464	0,285	0,9224	0,2571	0,7608	0,1769	0,702	0,1545
80	0,9432	0,2682	0,9268	0,2422	0,7684	0,1664	0,716	0,1459
90	0,9468	0,2524	0,9216	0,2278	0,7784	0,1567	0,7144	0,1369
100	0,9468	0,2395	0,9172	0,2161	0,774	0,1485	0,714	0,13



**Şekil 6.** Çarpıklık katsayısı 1,75 olan Lognormal (0, 0,50) dağılımı için güven aralığı yöntemlerinin tahmin edilen kapsama olasılıkları

#### 4. Uygulama

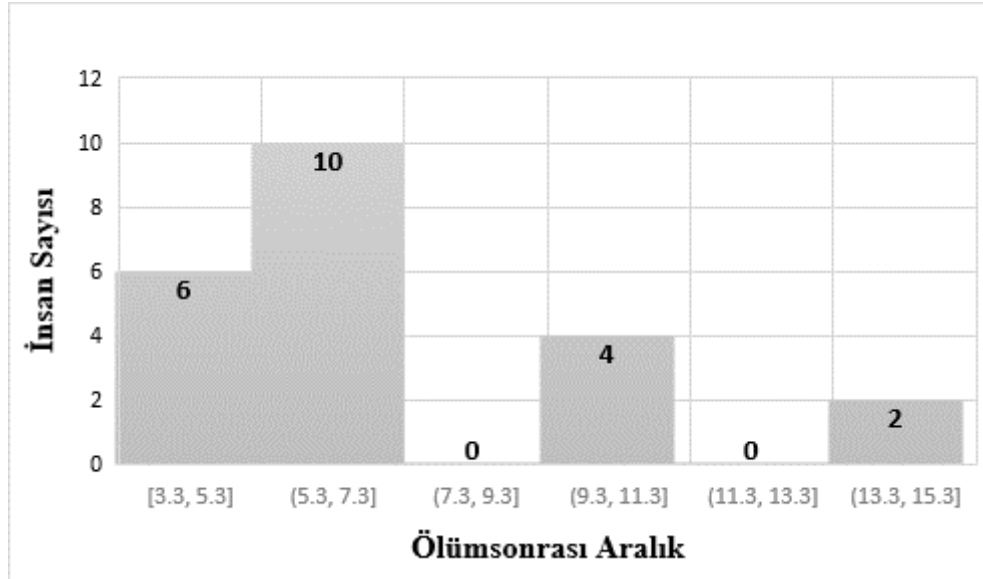
Bu çalışmadaki güven aralığı yöntemlerinin bir gerçek yaşam verisi üzerinde çalışmasını görmek için Perez-Meloand ve Kibria (2016, s. 112) tarafından kullanılan aşağıdaki veri ele alınmıştır.

5.5, 14.5, 6.0, 5.5, 5.3, 5.8, 11.0, 6.1, 7.0, 14.5, 10.4,

4.6, 4.3, 7.2, 10.5, 6.5, 3.3, 7.0, 4.1, 6.2, 10.4, 4.9

Bu verideki ölçüm değerleri ölümsonrası aralık (postmortem interval) değerleridir. Ölümsonrası aralık, ölüm ile otopsi arasında geçen süredir. Bu bilgi, insan kadavraları üzerinde tıbbi araştırma yapılırken oldukça önemlidir. Yukarıdaki veri yakın tarihli bir çalışmada otopside elde edilen 22 insan beyni örneğinin ölüm sonrası aralık değerleridir.

Bu veri için ortalama, standart sapma ve çarpıklık katsayısı, sırasıyla, 7.3, 3.18 ve 1.06'dır. Diğer yandan bu veriye ilişkin Şekil 7'deki histogram grafiği, dağılımın sağa çarpık ve normal olmadığı fikrini vermektedir.



Şekil 7. Ölümsonrası Aralık Değerleri Verisinin Histogramı

Perez-Meloand ve Kibria (2016) bu verinin  $\alpha = 5.25$  ve  $\beta = 1.39$  parametrelili Gamma dağılımından gelip gelmediğini belirlemek için Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testini kullanmışlardır. Bu test işleminde Kolmogorov-Smirnov istatistik değeri 0.18 ve bu teste ilişkin p-değeri de 0.41 hesaplanmıştır. Bu sonuç, bu örnek verisinin  $\alpha = 5.25$  ve  $\beta = 1.39$  parametrelili Gamma dağılımından geldiğini belirtir. Sonuç olarak, bu örnek verisinin çarpıklık katsayısı  $2/\sqrt{\alpha} = 0.88$  olan Gamma dağılımından geldiği anlaşılır (Perez-Meloand ve Kibria, 2016, s.

112). Bu veri ile Student-t klasik güven aralığı yöntemi, AADM-t, MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemleri için bulunan güven aralıkları ve bu güven aralıklarının genişlikleri Tablo 7’de verilmiştir. Bu hesaplamalarda nominal I. tip hata 0.05 alınmıştır.

**Tablo 7.** Ölümsonrası Aralık Verisi İçin %95 Güven Aralıkları ve Güven Aralıklarının Genişlikleri

Güven Aralığı Yöntemi	Güven Aralığı	Genişlik
Student-t	(5.89,8.71)	2.82
AADM-t	(6.05,8.55)	2.50
MAAD-t	(6.32,8.27)	1.95
MADM-t	(6.81,7.79)	0.49

Simülasyon çalışmasında kapsama olasılığı bakımından Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralığı yöntemi ve AADM-t güven aralığı yönteminin oldukça iyi ve MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemlerinin de oldukça kötü oldukları anlaşılmıştı. Ayrıca AADM-t güven aralığı yönteminin, genel olarak, Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralığı yöntemine göre daha dar aralık genişliği verdiği saptanmıştı. Yukarıdaki Tablo 7’deki uygulama sonuçları bu bulguları desteklemektedir.

### Sonuçlar

Bu çalışma, 0,60 ve 0,70 çarpıklık katsayılı Gamma ve Beta dağılımları ile 0,60 ve 1,75 çarpıklık katsayılı Lognormal dağılımlarının ortalamaları için Student-t dağılımına dayalı klasik güven aralığı yöntemi ve AADM-t güven aralığı yönteminin kapsama olasılıklarının benzer olduğunu ve nominal güven düzeyine oldukça yakın kapsama olasılıklarını verdiğini göstermektedir. Bunun yanında, AADM-t güven aralığı yöntemi için ortalama aralık genişlikleri Student-t dağılımına dayalı güven aralığı yönteminin ortalama aralık genişliklerinden daha dardır. Diğer yandan, MAAD-t ve MADM-t güven aralığı yöntemlerinin kapsama olasılıkları ise nominal güven düzeyinden oldukça uzaktır. Bu nedenle, bu simülasyon tasarımı için AADM-t en iyi güven aralığı yöntemidir. Ayrıca, gerçek yaşam verisi ile yapılan uygulama da simülasyon sonuçlarını desteklemiştir.

## Kaynakça

- Abu-Shawiesh, M.O.A., Banik, S. ve Kibria, B.M.G. (2018). Confidence Intervals based on Absolute Deviation for Population Mean of a Positively Skewed Distribution. *International Journal of Computational and Theoretical Statistics*, 5(1), 1-13. DOI: <http://dx.doi.org/10.12785/IJCTS/050101>
- Baklizi, A. ve Kibria, B.M.G. (2009). One and two sample confidence intervals for estimating the mean of skewed populations: an empirical comparative study. *Journal of Applied Statistics*, 36(6), 601-609. DOI: <https://doi.org/10.1080/02664760802474298>
- Banik, S., Albatineh, A., Abu-Shawiesh, M.O.A. ve Kibria, B.M.G. (2014). Estimating the population standard deviation with confidence interval: A simulation study under skewed and symmetric conditions. *International Journal of Statistics in Medical Research*, 3, 356-367.
- Chen, L. (1995). Testing the Mean of Skewed Distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 767-772.
- Diciccio, T. (1991). Empirical likelihood is Bartlett-correctable. *The Annals of Statistics*, 19, 1053-1061.
- Hall, P. (1992). On the removal skewness by transformation. *Journal of Royal Statistical Society B*, 54, 221-228.
- Johnson, N.J. (1978). Modified t-test and Confidence Intervals for Asymmetrical Populations. *Journal of the American Statistical Association*, 73, 536-544.
- Kibria, B.M.G. (2006). Modified Confidence Intervals for the Mean of the Asymmetric Distribution. *Pakistan Journal of Statistics*, 22(2), 111-123.
- Kibria, B.M.G. ve Banik, S. (2013). Parametric and nonparametric confidence intervals for estimating the difference of means of two skewed populations. *Journal of Applied Statistics*, 40(12), 2617-2636, DOI: 10.1080/02664763.2013.822478
- Perez-Meloand, S. ve Kibria, B.M.G. (2016). Comparison of Some Confidence Intervals for Estimating the Skewness Parameter of a Distribution. *Thailand Statistician*, 14(1), 93-115.
- Shi, W. ve Kibria, B.M.G. (2007). On some confidence intervals for estimating the mean of a skewed population. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 412-421. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207390601116086>
- Student (1908). The probable error of a mean. *Biometrika*, 1-25.
- Wang, F.K. (2001). Confidence interval for the mean of non- normal data. *Quality and Reliability Engineering International*, 17, 257-267.
- Zhou, X.H. ve Dinh, P. (2005). Nonparametric confidence intervals for the one- and two-sample problems. *Biostatistic*, 6, 187-200. DOI: <https://doi.org/10.1093/biostatistics/kxi002>