NÖHÜ Müh. Bilim. Derg. / NOHU J. Eng. Sci., 2021; 10(1): 255- 265

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi
Niğde Ömer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences
ISSN: 2564-6605
Araştırma / Research

Farklı uç sınır koşullarına sahip kirişin Carrera Birleşik Formulasyon (CUF) çerçevesinde statik analizi

Static analysis of a beam with different end boundary conditions via Carrera Unified Formulation (CUF)

Esra Eylem Karataş[1,*]

[1] Gaziantep Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 27310, Gaziantep Türkiye

Özet

Bu çalışma kapsamında düzgün yayılı yük etkisinde farklı uç sınır koşullarına sahip dikdörtgen kesitli bir kirişin, birleşik kiriş teorilerinden biri olan Carrera Birleşik Formulasyon (CUF) çerçevesinde lineer statik analizi incelenmiştir. Kesit yer değiştirme alanının birleşik formulasyonu, kesit düzlemi üzerinde tanımlanmış eşdeğer Taylor ve Lagrange tipi açılım fonksiyonları ile ayrı ayrı ifade edilmiştir. Yönetici denklemler ve sonlu elemanlar formulasyonunun elde edilmesinde virtüel iş prensibi kullanılmıştır. İlk olarak, hem Taylor tipi hem de Lagrange tipi açılım fonksiyonlarının ayrı ayrı kullanılması ile farklı uç sınır koşullarına ait dikdörtgen kesitli kiriş için bir yakınsama çalışması ve elde edilen sayısal sonuçların güvenilirliğini test etmek amacı ile literatürden alınan analitik çözümler ile bir karşılaştırma çalışması yapılmıştır. Daha sonra, uygun olan açılım fonksiyonu kullanılarak CUF çerçevesinde, örnek problemlerin lineer statik analizi yapılmış, sayısal sonuçlar tablo ve grafikler ile sunulmuştur. Bu çalışmada kullanılan bilgisayar algoritması MUL2 grubu tarafından geliştirilmiş olup, literatürde mevcut olan pek çok çalışma ile test edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Geliştirilmiş kiriş teorisi, Carrera birleşik formulasyon (*CUF*), Sonlu elemanlar yöntemi

Abstract

In this study, lineer static analysis of a rectangular beam with compact cross-section for different end boundary conditions subjected to uniformly distributed load is analyzed within the framework of Carrera Unified Formulation (CUF), which is one of the unified beam theory. The unified formulation of cross-section displacement field is expressed by employing both Taylor and Lagrange type expansion functions defined over the cross-section. The Principle of Virtual Displacements (PVD) is used to obtain the governing differential equations and the Finite Element formulation. First, by using separately both Taylor and Lagrange types of expansion functions for a rectangular beam with compact cross-section with different end boundary conditions study of convergence and comparison with results obtained from the analytical solutions in the literature is performed in order to examine the reliability of the results obtained. Then, using the appropriate expansion function, lineer static analysis of sample problems is made within the framework of CUF and numerical results are presented with the help of tables and graphics. The computer algorithm used in the present paper is developed by MUL2 group and tested by many studies, available in the relevant literature.

Keywords: Refined beam theory, Carrera unified formulation (*CUF*), Finite element method

1 Giriş

Son iki yüzyıldan bu yana çok sayıda üç boyutlu mühendislik problemlerinin çözümünde bir boyutlu kiriş teorileri kullanılmıştır. Euler–Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri bilinen ilk klasik kiriş teorileri olup sadece eğilme etkilerinin dikkate alındığı ve malzemenin izotrop kabul edildiği teorilerdir. Euler–Bernoulli kiriş teorisi enine kayma deformasyonlarını dikkate almayan buna karşılık ince cidarlı kirişler için oldukça iyi sonuçlar veren bir teoridir. Timoshenko kiriş teorisi ise kiriş kesiti boyunca düzgün yayılı bir kayma dağılımını dikkate alırken öngörülen bu kaymanın, bir kayma düzeltme faktörü kullanılarak düzeltilmesini gerektirmektedir. Her iki teorinin ortak özelliği; kesit çarpılması, burulma-eğilme çifti ve bölgesel geometrik ve mekanik sınır koşulları gibi klasik olmayan etkileri dikkate almamalarıdır [1]. Klasik olmayan bu etkiler genellikle malzemenin anizotrop olmasından ve yapı elemanının küçük narinlik katsayısına sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Fakat son yıllarda sayısal yöntemler özellikle de sonlu elemanlar yöntemi, klasik kiriş teorilerinin kullanımını çok daha başarılı ve çekici hale getirmiştir. Geometrik ve mekanik olarak çok farklı sınır koşullarına sahip kompleks yapıları çözme olasılığı, binlerce serbestlik derecesi içeren pek çok karmaşık problemin kabul edilebilir bir doğrulukla analiz edilmesini mümkün kılmıştır [2]. Bununla birlikte, karmaşık kesit geometrisine sahip yapı elemanları için kesin bir gerilme-şekil değiştirme alanı elde etmenin zorluğu hala bir sorun olarak güncelliğini korumakta olup bu sebeple birleşik kiriş teorilerine ya da yüksek mertebe/geliştirilmiş kiriş teorilerine olan ihtiyaç artmaktadır. Yüksek mertebe kiriş teorileri, yer değiştirme bileşenlerinin kiriş kalınlığı boyunca açılımlarında yüksek mertebe polinomlar kullanmaktadırlar.

Fonksiyonel derecelenmiş kirişlerin serbest titreşim analizi problemleri, literatürde çeşitli yüksek mertebe kayma deformasyonu teorileri kullanılarak ele alınmıştır [3, 4]. Levinson [5, 6], 3. mertebe kayma deformasyonu teorisine dayanarak izotrop plak ve kirişlerin denge denklemlerini elde etmek için bir vektör yaklaşımı kullanmıştır. Wang ve Wang [7] ve Gao ve Wang [8] tarafından önerilen geliştirilmiş kiriş teorisi, dördüncü mertebeden bir diferansiyel denklem ve ikinci mertebeden bir transandant denklemden oluşmasına karşın, bu kompleks kiriş teorisi ankastre uç için yer değiştirme kısıtlarını düzgün bir şekilde ele almakta yetersiz kalmaktadır. Literatürde, kayma düzeltme faktörü, varyasyonel asimptotik çözüm, genelleştirilmiş kiriş teorisi ve kesit çarpılması gibi yüksek

* Sorumlu yazar / Corresponding author, e-posta / e-mail: ekaratas@yildiz.edu.tr (E. E. Karataş)
Geliş / Recieved: 24.07.2020 Kabul / Accepted: 23.11.2020 Yayımlanma / Published: 15.01.2021
doi: 10.28948/ngumuh.764252

mertebe etkileri dikkate alan diğer çalışmalar da mevcuttur [9-14].

Bu çalışmada kullanılan Carrera Birleşik Formulasyonu (*CUF*), değişken sayıda yer değiştirme bilinmeyeni içeren çok sayıda kiriş teorisinin, kısa bir gösterim yoluyla ve birkaç temel çekirdeğe referans gösterilmesi aracılığı ile geliştirilmesine ve elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Ayrıca, yüksek mertebe kiriş teorileri de oldukça kolay bir şekilde *CUF* çerçevesinde ele alınabilmektedir. İlaveten, çok çeşitli kiriş teorilerinin doğruluğu, bu formulasyonun bünyesinde modern tekniklerin kullanılmasına imkan sağlaması sebebi ile hiyerarşik ve/veya aksiyomatik anlamda test edilebilmektedir. Sahip olduğu bu özellikler sebebiyle *CUF*, yapılan sayısal hesaplamalarda araştırmacıya hem kolaylık sağlamakta hem de zamandan ciddi anlamda tasarruf sağlanmasına imkan sağlamaktadır. Bu formulasyon çerçevesinde, bilinmeyen değişken sayısı problemin serbest parametresi olarak tanımlanmaktadır. Ele alınan herhangi bir kiriş problemi için (dolu kesitler, ince cidarlı kesitler, statik ve dinamik problemler, vs.) bilinmeyen değişkenlerden uygun bir seçim yapılarak üç boyutlu gerilme-şekil değiştirme alanı elde edilebilmektedir [2].

Bu çalışma kapsamında düzgün yayılı yük etkisinde farklı uç sınır koşullarına sahip dikdörtgen kesitli bir kirişin lineer statik analizi *CUF* çerçevesinde yapılmıştır. Kesit yer değiştirme alanının birleşik formulasyonu, kesit düzlemi üzerinde tanımlanmış eşdeğer Taylor ve Lagrange tipi açılım fonksiyonları ile ayrı ayrı tanımlanmıştır. Yönetici denklemler ve sonlu elemanlar formulasyonunun elde edilmesinde Virtüel İş Prensibi kullanılmıştır. Öncelikle faklı uç sınır koşulları için bir yakınsama çalışması ve elde edilen sayısal sonuçların güvenilirliğini test etmek amacı ile literatürden alınan bazı analitik ve sayısal sonuçlar ile bir karşılaştırma çalışması yapılmıştır. Daha sonra aynı kirişin, Taylor ve Lagrange tipi açılım fonksiyonlarının ayrı ayrı kullanılması durumuna ait sayısal çalışma yapılmış, sonuçlar tablo ve grafikler ile sunulmuştur.

2 Carrera birleşik formulasyon (*CUF*) ve sonlu eleman formulasyonu

Ele alınan dikdörtgen kirişin çözüm bölgesi (Şekil 1) aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilmektedir.

$$-b/2 \leq x \leq b/2.0 \leq y \leq L, -h/2 \leq z \leq h/2 \tag{1}$$

Burada L, b ve h sırası ile ilgili kirişin açıklık uzunluğu, kesit genişliği ve yüksekliğidir. Genel yer değiştirme vektörü

$$u(x,y,z) = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \tag{2}$$

eşitliği ile kurulmuştur. Gerilme şekil değiştirme bileşenleri Denklem (3)'de verilen ifadeler şeklinde gruplandırılmışlardır.

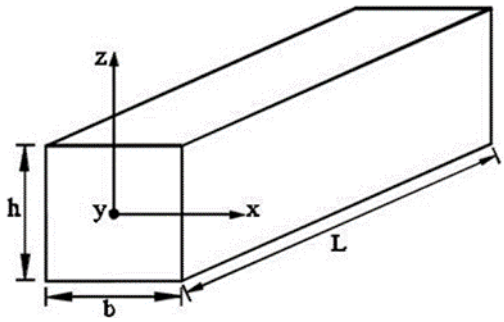
$$\begin{gathered}\sigma_p = [\sigma_{zz} \quad \sigma_{xx} \quad \sigma_{zx}]^T, \; \varepsilon_p = [\varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{zx}]^T \\ \sigma_n = [\sigma_{zy} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yy}]^T, \; \varepsilon_n = [\varepsilon_{zy} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yy}]^T\end{gathered} \tag{3}$$

Burada alt indis ''p'' ve ''n'' sırası ile kesit düzlemine dik düzlemlerdeki terimleri ve kesit düzlemindeki terimleri temsil etmektedirler. Yer değiştirmelerin küçük kabul edilmesi durumları için şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri Denklem (4)'de ifade edildiği gibidir.

$$\begin{gathered}\varepsilon_p = D_p u \\ \varepsilon_n = D_n u = (D_{n\Omega} + D_{ny})u\end{gathered} \tag{4}$$

Burada Ω sembolü kiriş kesitini; D_p, $D_{n\Omega}$ ve D_{ny} sembolleri ise Denklem (5) ile verilen lineer diferansiyel operatörleri temsil etmektedir.

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, D_{n\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{n\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$



Şekil 1. Ele alınan dikdörtgen kirişin geometrisi

Kiriş malzemesinin lineer elastik olması durumunda Genelleştirilmiş Hooke Kanunu geçerli olduğu için bünye denklemleri, Denklem (6)'da verildiği gibidir.

$$\sigma = C\varepsilon \tag{6}$$

Burada σ gerilme vektörünü, ε şekil değiştirme vektörünü ve C katsayılar matrisini temsil etmektedir. Denklem (3) ve Denklem (6) ifadelerinden aşağıda verilen eşitlik elde edilir.

$$\sigma_p = \tilde{C}_{pp}\varepsilon_p + \tilde{C}_{pn}\varepsilon_n, \quad \sigma_n = \tilde{C}_{np}\varepsilon_p + \tilde{C}_{nn}\varepsilon_n \tag{7}$$

Malzemenin izotrop olması durumu için $\tilde{C}_{pp}$, $\tilde{C}_{pn}$, $\tilde{C}_{np}$ ve $\tilde{C}_{nn}$ matrisleri aşağıda verildiği gibidir.

$$\tilde{C}_{pp} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\tilde{C}_{pn} = \tilde{C}_{np}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{C}_{13} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{nn} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{55} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix}$$

$[\tilde{C}]_{ij}$ katsayıları malzeme özelliklerine bağlı olup Young Modülü ve Poisson oranı ile olan ilişkisine bu çalışma kapsamında yer verilmemiştir. Bu konuda detaylı bilgiler Tasi [15] ve Reddy [16] çalışmalarında verilmiştir.

CUF çerçevesinde, üç boyutlu yer değiştirme alan denklemleri, Denklem (9) şeklinde ifade edilir.

$$u = F_{\tau}(x,z)u_{\tau}(y),\ \tau = 1,2,3,\ldots,M = M(N) \tag{9}$$

Burada $F_{\tau}(x,z)$ kesit düzlemi üzerinde tanımlanmış açılım fonksiyonunu, $u_{\tau}(y)$ kiriş eksenine bağlı genelleştirilmiş yer değiştirme vektörünü, M açılımda kullanılan terim sayısını, τ ise Einstein toplama kuralına göre toplamı ve N formulasyonun serbest bir parametresi olup açılım mertebesini (kiriş modeli mertebesi) ifade etmektedir. Yapı elemanının kesit düzlemi üzerindeki yer değiştirme alanını modellemek için kullanılacak $F_{\tau}(x,z)$ açılım fonksiyonunun ve M terim sayısının seçimi tamamen keyfi olduğu için farklı sınıflardan ve herhangi bir mertebeden fonksiyonların kullanılması mümkündür.

Bu çalışma kapsamında $F_{\tau}(x,z)$ açılım fonksiyonunu tanımlamak için hem Taylor tipi hem de Lagrange tipi polinomlar kullanılmıştır. Taylor tipi modellerde, temel olarak kesit düzlemi koordinatlarına bağlı polinomları kullanan bir MacLaurin serisinden oluşan açılım fonksiyonları kullanılır. Taylor tipi modellerde açılım mertebesi (kiriş modeli mertebesi) N arttıkça, terim sayısı M de artacağı için burulma, kesit çarpılması ve enine kayma deformasyonları gibi yüksek mertebe etkiler dikkate alınmış olacaktır. Taylor tipi açılım modellerinde polinom mertebesi, açılım mertebesi (kiriş modeli mertebesi) N ile belirlenirken, Lagrange tipi açılım modellerinde ise kesit düzlemi üzerinde alınan düğüm noktası (nod) sayısı ile belirlenir.

Genelleştirilmiş yer değiştirme vektörü $u_{\tau}(y)$, aşağıda verildiği gibi $N_i(y)$ şekil fonksiyonu ve $q_{\tau i}$ nodal yer değiştirme vektörü kullanılarak ifade edilebilir.

$$u_{\tau}(y) = N_i(y)q_{\tau i},\quad i = 1,2,\ldots\ldots,N_{NE} \tag{10}$$

Burada N_{NE} kiriş ekseni boyunca alınan düğüm noktası (nod) sayısıdır. Şekil fonksiyonları hakkında herhangi bir açıklamaya yer verilmemiş olup bu konu hakkında daha detaylı bilgi Carrera vd. [2], Thai ve Vo [3] ve Bathe [17] çalışmalarından elde edilebilir.

Bu çalışma kapsamında kiriş ekseni boyunca, klasik 4 nodlu bir boyutlu $B4$ sonlu eleman modellemesi (kübik elemanlar) yapılmıştır. Belirtilmelidir ki, açılım mertebesi (kiriş modeli mertebesi) N, kesit üzerinde tanımlanmış açılım fonksiyonunun mertebesi ile ilişkili iken; her bir sonlu elemana ait düğüm noktası sayısı N_{NE} ise bu noktalarda tanımlı şekil fonksiyonlarının mertebesi ile ilişkilidir. Yine bu çalışma kapsamında Lagrange tipi açılım modellemeleri için, 9 nodlu Lagrange kuadratik elemanları ($L9$) kullanılmıştır.

Statik problemler için virtüel iş prensibi aşağıda verildiği gibi ifade edilir:

$$\delta L_{int} = \int \left(\delta\varepsilon_p^T \sigma_p + \delta\varepsilon_n^T \sigma_n\right) dV = \delta L_{ext} \tag{11}$$

Burada δ, L_{int} ve L_{ext} sırasıyla virtüel varyasyon operatörü, şekil değiştirme enerjisi ve dış kuvvetlerin işi şeklinde tanımlanır. Denklem (4), (7), (9) ve (10) ifadeleri, Denklem (11)'de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\delta L_{int} = \delta q_{\tau i}^T K^{ij\tau s} q_{sj} \tag{12}$$

Burada $K^{ij\tau s}$ rijitlik matrisidir.

3 Sayısal sonuçlar

Bu çalışma kapsamında düzgün yayılı yük etkisinde farklı uç sınır koşullarına sahip dikdörtgen kesitli bir kirişin lineer statik analizi *CUF* çerçevesinde incelenmiştir. Üç boyutlu yer değiştirme alan denklerindeki açılım fonksiyonu $F_{\tau}(x,z)$ için iki farklı kiriş modelinin (Taylor ve Lagrange tipi açılım modelleri) ayrı ayrı tanımlanması durumları ele alınmıştır. Birinci problemde basit kiriş durumu, ikinci problemde ise aynı kirişin iki ucunun ankastre olması durumu ele alınmıştır. Sayısal hesaplamalarda, ele alınan kirişe ait geometrik parametreler $b = 0.2\ m$, $h = 2m$ ve $L = 10\ m$, homojen- izotrop malzeme parametreleri Elastisite modülü $E = 71.7\ GPa$ ve Poisson oranı $\upsilon = 0.3$. ve şiddeti $q = 10\ N/m$ olan düzgün yayılı yük seçilmiştir. Problemlere ait sayısal sonuçlara geçmeden önce, bir yakınsama çalışması ve elde edilen sayısal sonuçların güvenilirliğini test etmek amacı ile literatürden alınan analitik çözümler ile bir karşılaştırma çalışması yapılmıştır. Yakınsama kriteri olarak, ele alınan kirişin açıklık ortasındaki kesitinin ağırlık merkezindeki düşey yer değiştirme dikkate alınmıştır. Ele alınan problemlerde yakınsama çalışması öncelikle kiriş modelinin keyfi mertebeden bir Taylor tipi açılım modeli (TE) olması durumu, ardından ise Lagrange tipi bir açılım modeli (LE) olması durumu için ayrı ayrı yapılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar aşağıda verilmiştir.

3.1 *Basit kiriş problem*

3.1.1 *Yakınsama çalışması*

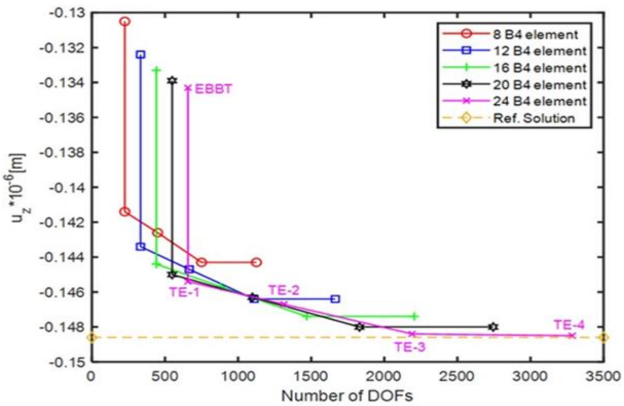
Kiriş modelinin keyfi mertebeden bir TE olması durumuna ait elde edilen sayısal sonuçlar ve bu sonuçların literatürden alınan analitik çözümler ile karşılaştırılması Tablo 1'de verilmiştir. *CUF*, kiriş modeli mertebesini serbest bir parametre olarak ele alan bir formulasyon olduğu için, yüksek mertebeden kiriş teorilerini elde etmek için ilave bir formulasyona ihtiyaç duyulmamaktadır. Euler–Bernoulli ve Timoshenko gibi klasik kiriş teorileri de *CUF* çerçevesinde, TE modelinin özel durumları olarak elde edilmektedirler [2]. Tablo 1 ve 2'de, elde edilen sayısal sonuçlar, Denklem(13)'de Timoshenko ve Goodier [18] çalışmasında verilen analitik çözümden elde edilen kesin çözüm ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, *CUF* formulasyonunun özel bir hali olarak Euler-Bernoulli kiriş teorisi ($EBKT$)'ne ait sayısal sonuçlarda örnek olması bakımından Tablo 1'de verilmiştir.

$$\delta=\frac{5}{24}\frac{q\left(\frac{L}{2}\right)^4}{EI_x}\left[1+\frac{12}{5}\frac{(h/2)^2}{(L/2)^2}\left(\frac{4}{5}+\frac{v}{2}\right)\right] \qquad (13)$$

Tablo 1. Farklı mertebeden TE modelleri ve sonlu eleman sayısı için düşey yer değiştirme (u_z) yakınsaması ($x=0, y=L/2, z=0$)

Model	$u_z \times 10^{-6}$ (m)	*Hata* (%)	*Serbestlik Serecesi Sayısı* (SDS)	*Sonlu eleman sayısı*
Analitik çöz. (13)	-0.1486	$-$	$-$	
$EBKT$	-0.1305	12.1803	225	
$TE-1$	-0.1414	4.8452	225	
$TE-2$	-0.1426	4.0377	450	$8\ B4$
$TE-3$	-0.1443	2.8937	750	
$TE-4$	-0.1443	2.8937	1125	
$EBKT$	-0.1324	10.9017	333	
$TE-1$	-0.1434	3.4993	333	
$TE-2$	-0.1447	2.6245	666	$12\ B4$
$TE-3$	-0.1464	1.4805	1110	
$TE-4$	-0.1464	1.4805	1665	
$EBKT$	-0.1333	10.2961	441	
$TE-1$	-0.1444	2.8264	441	
$TE-2$	-0.1457	1.9515	882	$16\ B4$
$TE-3$	-0.1474	0.8075	1470	
$TE-4$	-0.1474	0.8075	2205	
$EBKT$	-0.1339	9.8923	549	
$TE-1$	-0.1450	2.4226	549	
$TE-2$	-0.1463	1.5478	1098	$20\ B4$
$TE-3$	-0.1480	0.4038	1830	
$TE-4$	-0.1480	0.4038	2745	
$EBKT$	-0.1343	9.6231	657	
$TE-1$	-0.1454	2.1534	657	
$TE-2$	-0.1467	1.2786	1314	$24\ B4$
$TE-3$	-0.1484	0.1346	2190	
$TE-4$	-0.1485	0.0673	3285	

Tablo 1'deki sayısal verilerden, TE modeli için, açılım mertebesinin artması ile analitik çözüme yakınsamanın oldukça iyi sağlandığı görülmektedir. Örneğin, kiriş ekseni boyunca alınan 24 adet 4 nodlu $B4$ tipi sonlu eleman modellemesi (24 $B4$) için 4.mertebeden TE modeli ($TE-4$) kullanılması durumunda, analitik çözüme yakınsama %0.0673 hata ile gerçekleşmektedir. Yine aynı tip sonlu eleman modellemesi için (24 $B4$), $EBKT$ ile analitik çözüme yakınsama %9.6231hata ile gerçekleşmektedir. Dolayısıyla klasik kiriş teorilerinin, yüksek mertebeden etkileri (kesit çarpılması, kayma şekil değiştirmesi, burulma,vs.) dikkate almadığı bu karşılaştırmadan da görülmektedir.



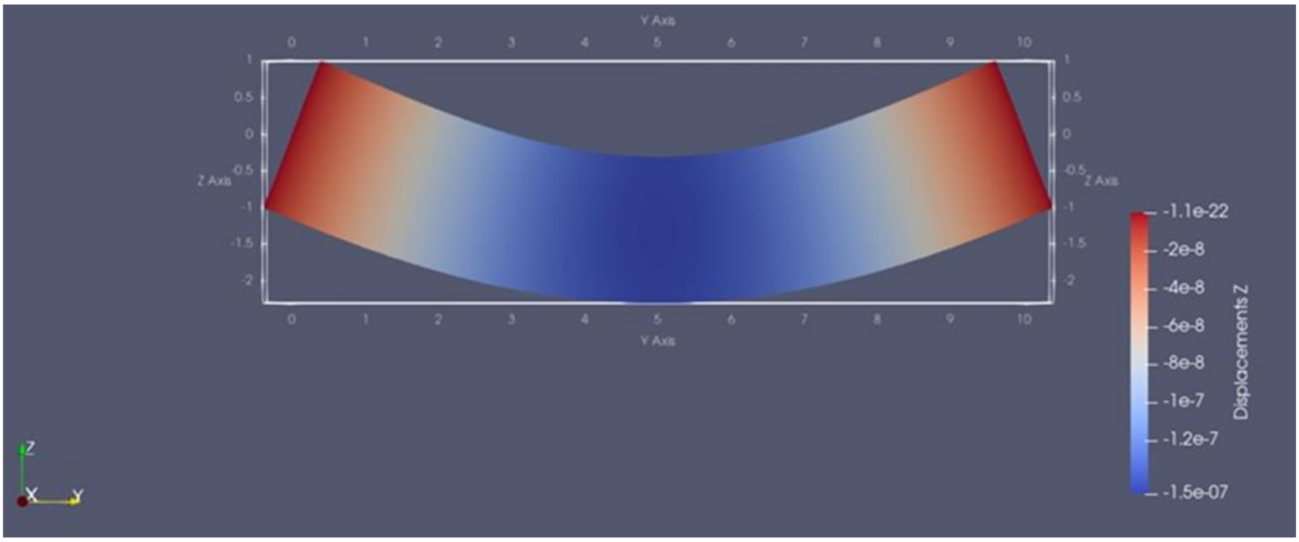
Şekil 2. Farklı mertebeden TE modelleri ve sonlu eleman sayısı için düşey yer değiştirme (u_z) yakınsaması ($x=0, y=L/2, z=0$)

Şekil 2, TE modeli kullanılması durumunda açılım mertebesinin artması ile SDS'de de artış olacağını göstermektedir. Bu durum hesaplama yükünün ve süresinin artmasına sebep olacaktır.

Tablo 2'de, kiriş modelinin LE olması durumuna ait elde edilen sayısal sonuçlar ve bu sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması verilmiştir. Tablodan görüleceği üzere LE modelinin kullanılması durumunda, kesit düzlemi üzerinde alınan alt bölge sayısının arttırılması (kesit üzerinde nod sayısının arttırılması) analitik çözüme yakınsamayı oldukça iyi sağlamaktadır. $24B4$ sonlu eleman modellemesi ve $LE-3L9$ (3 adet 9 nodlu Lagrange kuadratik eleman) LE modelinin kullanılması durumunda analitik çözüme yakınsama, $TE-4$ Taylor tipi bir açılım modelinin kullanılması durumu ile benzer sonuç vermekte olup, hata %0.0673'dür. TE modelinde bu hata oranına 3285 SDS ile yaklaşılırken, LE modelinde bu sayı 4599'dur.

LE modelleri kullanılması durumunda, kesit düzlemi üzerinde alınan alt bölge sayısı arttırıldıkça, bir başka ifade ile kesit düzlemi üzerinde nod sayısı arttırıldıkça, analitik çözüme yakınsama daha fazla olmakla birlikte SDS'de artış göstermektedir. Bu durum Şekil 4'de açık bir şekilde görülmektedir.

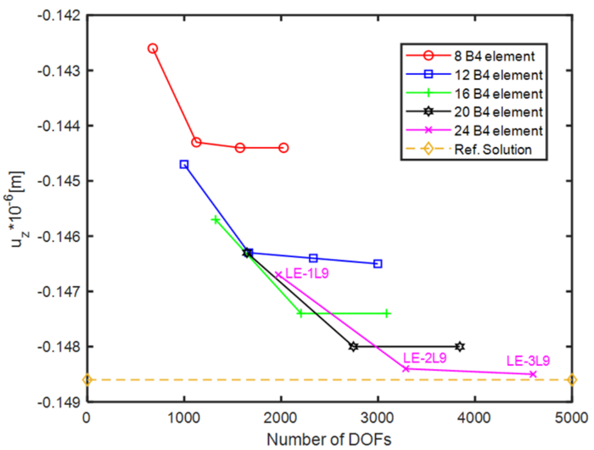
Sonuç olarak ele alınan basit kiriş problemi için, TE modelinin LE modeline göre analitik çözüme aynı hata oranı ve fakat daha az sayıda SDS ile yakınsadığı görülmüştür. Bu sebeple bu çalışmanın bundan sonraki aşamalarında basit kiriş problemi için yapılacak sayısal hesaplamalarda, farklı mertebeden TE modelleri kullanılacaktır. Bu çalışmalarda kiriş ekseni 24 adet $B4$ tipi sonlu elemanlar ($24B4$) ile modellenecek olup, TE modelinin farklı mertebelerinin, ele alınan basit kiriş probleminin statik analizi üzerindeki etkileri incelenecektir.



Şekil 3. 24 $B4$ sonlu eleman modellemesi için $TE-4$ tipi açılımına ait kiriş deformasyonu

Tablo 2. Farklı LE modelleri ve sonlu eleman sayısı için düşey yer değiştirme (u_z) yakınsaması ($x=0, y=L/2, z=0$)

Model	$u_z \times 10^{-6}$ (m)	*Hata* (%)	*SDS*	*Sonlu eleman sayısı*
Analitik çöz. (13)	-0.1486	–	–	–
$LE-1L9$	-0.1426	4.0377	675	
$LE-2L9$	-0.1443	2.8937	1125	8 $B4$
$LE-3L9$	-0.1444	2.8264	1575	
$LE-4L9$	-0.1444	2.8264	2025	
$LE-1L9$	-0.1447	2.6245	999	
$LE-2L9$	-0.1463	1.5478	1665	12 $B4$
$LE-3L9$	-0.1464	1.4805	2331	
$LE-4L9$	-0.1465	1.4132	2997	
$LE-1L9$	-0.1457	1.9515	1323	
$LE-2L9$	-0.1474	0.8075	2205	16 $B4$
$LE-3L9$	-0.1474	0.8075	3087	
$LE-1L9$	-0.1463	1.5478	1647	
$LE-2L9$	-0.1480	0.4038	2745	20 $B4$
$LE-3L9$	-0.1480	0.4038	3843	
$LE-1L9$	-0.1467	1.2786	1971	
$LE-2L9$	-0.1484	0.1346	3285	24 $B4$
$LE-3L9$	-0.1485	0.0673	4599	



Şekil 4. Farklı LE modelleri ve sonlu eleman sayısı için düşey yer değiştirme (u_z) yakınsaması ($x=0, y=L/2, z=0$)

3.1.2 Basit kiriş statik analiz

Ele alınan basit kirişin kritik kesitlerinde gerilme ve şekil değiştirme analizi *CUF* çerçevesinde farklı mertebeden *TE* modeller kullanılarak yapılmıştır. Söz konusu analizlerde gerilme ve şekil değiştirmelerin kalınlık ve genişlik boyunca değişimleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Şekil 5'de enine kayma gerilmesi σ_{YZ} ve enine şekil değiştirme ε_{YZ} dağılımlarının mesnet kesiti için kalınlık boyunca farklı mertebeden TE modelleri ($N=1 \sim 5$) için dağılımı görülmektedir. Kullanılan model mertebesinin (N) hem enine kayma gerilmesi hem de enine şekil değiştirme üzerindeki büyük etkisi (özellikle $N=2$'den sonra) açık bir şekilde görülmektedir. Mertebe değerinin en az $N=3$ olması ile birlikte enine kayma gerilmesi ve enine şekil değiştirme değerlerinde yakınsama gerçekleşmiştir. Daha yüksek mertebeden açılım modeli kullanılması, sadece

SDS'yi ve dolayısı ile hesaplama yükünün artmasına sebep olacaktır. Şekil 5'den görüleceği üzere enine kayma gerilmesi σ_{YZ} ve enine şekil değiştirme ε_{YZ} en büyük değerlerini mesnet kesitinin $(y = 0)$ ağırlık merkezinde almaktadırlar $(x = 0, z = 0)$.

Tablo 3'de bu iki büyüklüğün, kesit genişliği boyunca kritik noktalardaki değerleri, TE kiriş modeli mertebesinin farklı değerleri için verilmiştir. Tablodan görüleceği üzere mertebe değerinin en az $N = 3$ olması durumunda her iki değerde yakınsama görülmekte olup $N = 8$ için bu değerler aşağı yukarı sabit kalmaktadır.

Şekil 6'da eksenel gerilme σ_{YY} ve eksenel şekil değiştirme ε_{YY} dağılımlarının açıklık ortası kesit için kalınlık boyunca farklı mertebeden TE modelleri $(N = 1 \sim 5)$ için dağılımı görülmektedir. Mertebe değerinin en az $N = 3$ olması ile birlikte her iki büyüklük için yakınsama gerçekleşmiştir. Şekil 6'dan görüleceği üzere eksenel gerilmesi σ_{YY} ve eksenel şekil değiştirme ε_{YY}, en büyük değerlerini açıklık ortası kesitinin $(y = L/2)$ alt ve üst liflerinde $(x = 0, z = \pm h/2)$ almaktadır.

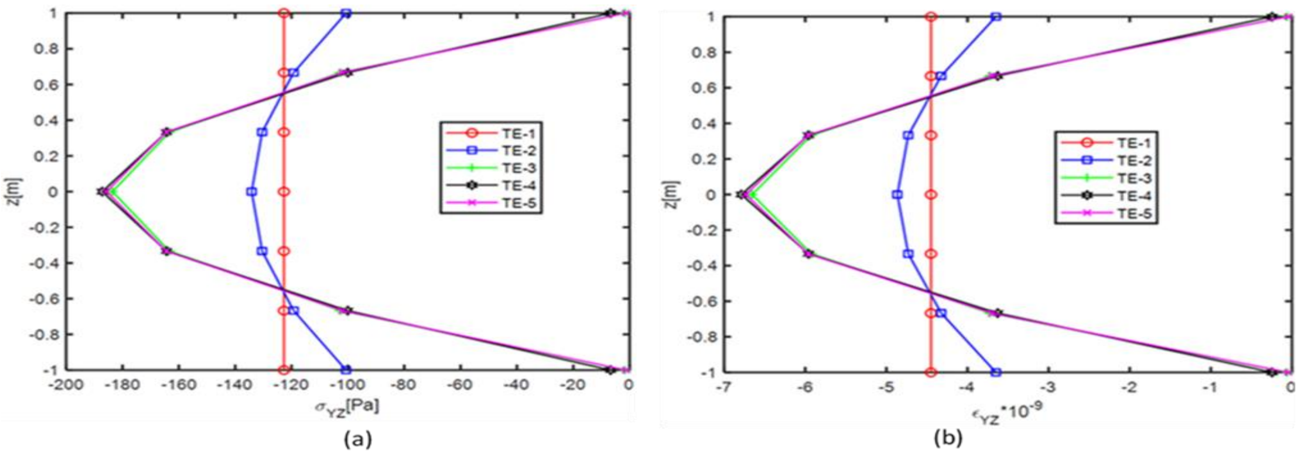
Tablo 4'de bu iki büyüklüğün, üst lifler için kesit genişliği boyunca kritik noktalardaki değerleri, TE kiriş modeli mertebesinin farklı değerleri için verilmiştir. Tablodan görüleceği üzere $N = 3$'den itibaren her iki değerde yakınsama görülmekte olup $N = 4$ değerinde ise bu değerler sabit olarak kalmaktadırlar.

3.2 İki ucu ankastre kiriş problem

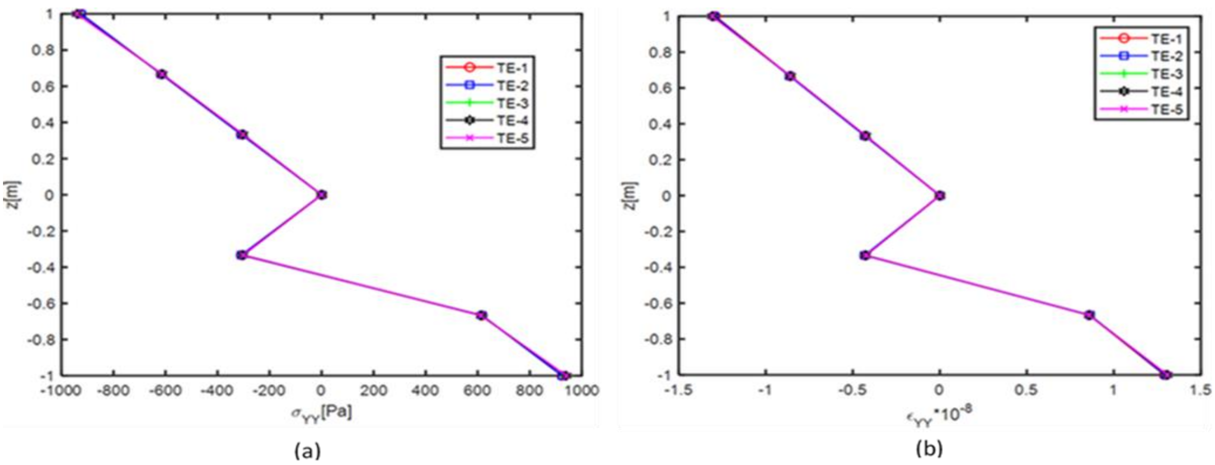
3.2.1 Yakınsama çalışması

Bir önceki bölümde ele alınan basit kiriş problemi için yapılan yakınsama ve elde edilen sayısal sonuçların literatürden alınan analitik çözümler ile karşılaştırılması çalışmaları bu bölümde iki ucu ankastre mesnet olan aynı kiriş için de yapılmıştır. Kiriş modelinin keyfi mertebeden bir TE modeli ve LE modeli olması durumlarına karşılık gelen sayısal sonuçlar ve bu sonuçların literatürden alınan analitik çözüm ile karşılaştırılmaları Tablo 5'de verilmiştir. Shi ve Voyiadjis [19] çalışmasına göre, iki ucu ankastre mesnetli düzgün yayılı yük etkisi altındaki bir kirişin açıklık ortası düşey yer değiştirme değeri, $L/h = 5$ ve Poisson oranı $\vartheta = 0.3$ olması durumlarında, Denklem (14) ile elde edilir.

$$u_z = \frac{qL^4}{384EI_x}(1.47698) \tag{14}$$



Şekil 5. (a) Kalınlık boyunca enine kayma gerilmesi $\boldsymbol{\sigma_{YZ}}$, (b) enine şekil değiştirme $\boldsymbol{\varepsilon_{YZ}}$ dağılımları $(\boldsymbol{x = 0, y = 0, z})$



Şekil 6. (a) Kalınlık boyunca eksenel gerilme $\boldsymbol{\sigma_{YY}}$, (b) eksenel şekil değiştirme $\boldsymbol{\varepsilon_{YY}}$ dağılımları $(\boldsymbol{x = 0, y = L/2, z})$

Tablo 3. Farklı TE modelleri için enine kayma gerilmesi σ_{YZ} ve enine şekil değiştirmesi ε_{YZ} $(x, y = z = 0)$

Model	$(\sigma_{yz}) \times 10^3$ $[Pa]$			$(\varepsilon_{yz}) \times 10^{-8}$		
	$y = 0, z = 0$					
	$x = 0$	$x = \pm b/4$	$x = \pm b/2$	$x = 0$	$x = \pm b/4$	$x = \pm b/2$
$N = 1$	-0.122	-0.122	-0.122	-0.445	-0.445	-0.445
$N = 2$	-0.134	-0.133	-0.133	-0.486	-0.485	-0.483
$N = 3$	-0.183	-0.183	-0.182	-0.665	-0.665	-0.663
$N = 4$	-0.187	-0.186	-0.184	-0.678	-0.675	-0.670
$N = 5$	-0.185	-0.184	-0.183	-0.673	-0.669	-0.664
$N = 6$	-0.188	-0.186	-0.184	-0.684	-0.676	-0.668
$N = 7$	-0.188	-0.185	-0.183	-0.682	-0.673	-0.666
$N = 8$	-0.190	-0.186	-0.184	-0.691	-0.677	-0.667
$N = 9$	-0.190	-0.186	-0.183	-0.689	-0.675	-0.665

Tablo 4. Farklı TE modelleri için eksenel gerilme σ_{YY} ve eksenel şekil değiştirme ε_{YY} $(x, y = L/2, z = h/2)$

Model	$(\sigma_{yy}) \times 10^3$ $[Pa]$			$(\varepsilon_{yy}) \times 10^{-7}$		
	$y = L/2, z = h/2$					
	$x = 0$	$x = \pm b/4$	$x = \pm b/2$	$x = 0$	$x = \pm b/4$	$x = \pm b/2$
$N = 1$	-0.924	-0.924	-0.924	-0.128	-0.128	-0.128
$N = 2$	-0.924	-0.924	-0.924	-0.129	-0.129	-0.129
$N = 3$	-0.939	-0.939	-0.939	-0.130	-0.130	-0.130
$N = 4$	-0.940	-0.940	-0.940	-0.130	-0.130	-0.130
$N = 5$	-0.940	-0.940	-0.940	-0.130	-0.130	-0.130

Tablo 5'de verilen sayısal sonuçlar incelendiğinde, kirişin açıklık ortası kesitinin ağırlık merkezindeki düşey yer değiştirme u_z değeri, aşağı yukarı $-0.40 * 10^{-7}$ $m.$ civarlarında olmaktadır ve bu değerden sonra sonlu eleman sayısının arttırılması, kullanılan kiriş modelinden bağımsız olarak (LE ve/veya TE) sadece SDS'nin önemli ölçüde artmasına sebep olurken, düşey yer değiştirme değerinde çok çok önemsiz artışlara sebep olmaktadır. Yine tablodaki sayısal sonuçlar incelendiğinde, düşey yer değiştirme değerinin aşağı yukarı benzer değerleri için, LE modelinin kullanılması durumunda SDS'nin çok daha az olduğu görülmektedir. Oysa basit kiriş probleminde, bu durumun tam tersi bir sonuç elde edilmiştir. Bir başka deyişle, aynı problemin farklı uç sınır koşullarına sahip olması durumunda, kullanılan kiriş modeli SDS'yi önemli ölçüde etkilemektedir. Ayrıca, basit kiriş probleminde elde edilen düşey yer değiştirme değeri analitik çözüme % 0.0673 'lük bir hata oranı ile yakınsarken, bu problem için bu değer aşağı yukarı % 0.32'ler civarındadır. Yani, ele alınan kirişin iki ucunun ankastre olması durumunda, yakınsama çok daha zor gerçekleşmektedir.

Şekil 7'den görüleceği üzere TE kiriş modeli için açılım mertebesi N değerinin artması ile SDS'de artış göstermektedir; bu durum hesaplama yükünün ve süresinin artmasına sebep olacaktır.

Şekil 8'de ise LE kiriş modeli için, kesit düzlemi üzerinde alınan alt bölge sayısı arttırıldıkça, analitik çözüme yakınsama daha fazla olmakla birlikte SDS'de artış göstermektedir.

Şekil 9'da, ele alınan dikdörtgen kesitli iki ucu ankastre kirişin, verilen yükleme altında LE kiriş modeli durumuna ait deformasyonu örneklendirilmiştir.

Tablo 5. Farklı LE ve TE modelleri ve sonlu eleman sayısı için düşey yer değiştirme (u_z) yakınsaması ($x = 0, y = L/2, z = 0$)

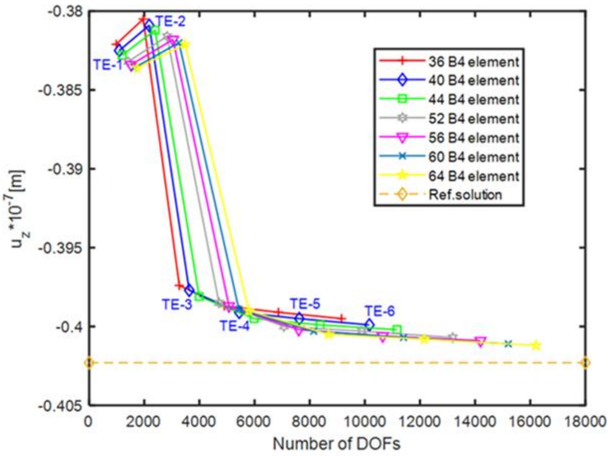
Sonlu eleman sayısı	$-u_z \times 10^{-7}\ (m)$ Kiriş modelleri LE/SDS				TE/SDS					
	$\frac{1L9}{SDS}$	$\frac{2L9}{SDS}$	$\frac{3L9}{SDS}$	$\frac{4L9}{SDS}$	$\frac{TE-1}{SDS}$	$\frac{TE-2}{SDS}$	$\frac{TE-3}{SDS}$	$\frac{TE-4}{SDS}$	$\frac{TE-5}{SDS}$	$\frac{TE-6}{SDS}$
12 $B4$	$\frac{0.3727}{999}$	$\frac{0.3891}{1665}$	$\frac{0.3903}{2331}$	$\frac{0.3912}{2997}$	$\frac{0.3752}{333}$	$\frac{0.3726}{666}$	$\frac{0.3892}{1110}$	$\frac{0.3903}{1665}$	$\frac{0.3907}{2331}$	$\frac{0.3910}{3108}$
16 $B4$	$\frac{0.3757}{1323}$	$\frac{0.3922}{2205}$	$\frac{0.3935}{3087}$	$\frac{0.3944}{3969}$	$\frac{0.3778}{441}$	$\frac{0.3756}{882}$	$\frac{0.3923}{1470}$	$\frac{0.3935}{2205}$	$\frac{0.3939}{3087}$	$\frac{0.3942}{4116}$
20 $B4$	$\frac{0.3775}{1647}$	$\frac{0.3940}{2745}$	$\frac{0.3954}{3843}$	$\frac{0.3962}{4941}$	$\frac{0.3793}{549}$	$\frac{0.3774}{1098}$	$\frac{0.3941}{1830}$	$\frac{0.3954}{2745}$	$\frac{0.3958}{3843}$	$\frac{0.3961}{5124}$
24 $B4$	$\frac{0.3787}{1971}$	$\frac{0.3953}{3285}$	$\frac{0.3966}{4599}$	$\frac{0.3975}{5913}$	$\frac{0.3804}{657}$	$\frac{0.3786}{1314}$	$\frac{0.3954}{2190}$	$\frac{0.3967}{3285}$	$\frac{0.3971}{4599}$	$\frac{0.3974}{6132}$
28 $B4$	$\frac{0.3796}{2295}$	$\frac{0.3962}{3825}$	$\frac{0.3975}{5355}$	$\frac{0.3984}{6885}$	$\frac{0.3811}{765}$	$\frac{0.3794}{1530}$	$\frac{0.3962}{2550}$	$\frac{0.3976}{3825}$	$\frac{0.3980}{5355}$	$\frac{0.3983}{7140}$
32 $B4$	$\frac{0.3802}{2619}$	$\frac{0.3968}{4365}$	$\frac{0.3981}{6111}$	$\frac{0.3990}{7857}$	$\frac{0.3817}{873}$	$\frac{0.3800}{1746}$	$\frac{0.3969}{2910}$	$\frac{0.3982}{4365}$	$\frac{0.3986}{6111}$	$\frac{0.3990}{8148}$
36 $B4$	$\frac{0.3806}{2943}$	$\frac{0.3973}{4905}$	$\frac{0.3986}{6867}$	$\frac{0.3995}{8829}$	$\frac{0.3821}{981}$	$\frac{0.3805}{1962}$	$\frac{0.3974}{3270}$	$\frac{0.3987}{4905}$	$\frac{0.3991}{6867}$	$\frac{0.3995}{9156}$
40 B4	$\frac{0.3810}{3267}$	$\frac{0.3976}{5445}$	$\frac{0.3990}{7623}$	$\frac{0.3998}{9801}$	$\frac{0.3825}{1089}$	$\frac{0.3809}{2178}$	$\frac{0.3977}{3630}$	$\frac{0.3991}{5445}$	$\frac{0.3995}{7623}$	$\frac{0.3999}{10164}$
44 $B4$	$\frac{0.3813}{3591}$	$\frac{0.3980}{5985}$	$\frac{0.3994}{8379}$	$\frac{0.4002}{10773}$	$\frac{0.3828}{1197}$	$\frac{0.3812}{2394}$	$\frac{0.3981}{3990}$	$\frac{0.3995}{5985}$	$\frac{0.3999}{8379}$	$\frac{0.4002}{11172}$
52 $B4$	$\frac{0.3818}{4239}$	$\frac{0.3984}{7065}$	$\frac{0.3998}{9891}$	$\frac{0.4006}{12717}$	$\frac{0.3832}{1413}$	$\frac{0.3816}{2826}$	$\frac{0.3985}{4710}$	$\frac{0.4000}{7065}$	$\frac{0.4003}{9891}$	$\frac{0.4007}{13188}$
56 $B4$	$\frac{0.3819}{4563}$	$\frac{0.3986}{7605}$	$\frac{0.4000}{10647}$	$\frac{0.4008}{13689}$	$\frac{0.3834}{1521}$	$\frac{0.3818}{3042}$	$\frac{0.3987}{5070}$	$\frac{0.4002}{7605}$	$\frac{0.4006}{10647}$	$\frac{0.4009}{14196}$
60 $B4$	$\frac{0.3821}{4887}$	$\frac{0.3988}{8145}$	$\frac{0.4002}{11403}$	$\frac{0.4010}{14661}$	$\frac{0.3836}{1629}$	$\frac{0.3820}{3258}$	$\frac{0.3989}{5430}$	$\frac{0.4003}{8145}$	$\frac{0.4007}{11403}$	$\frac{0.4011}{15204}$
64 $B4$	$\frac{0.3822}{5211}$	$\frac{0.3989}{8685}$	$\frac{0.4003}{12159}$	$\frac{0.4011}{15633}$	$\frac{0.3836}{1737}$	$\frac{0.3821}{3474}$	$\frac{0.3990}{5790}$	$\frac{0.4005}{8685}$	$\frac{0.4008}{12159}$	$\frac{0.4012}{16212}$
Analitik çöz. (14)	0.4023									

Sonuç olarak iki ucu ankastre mesnet kiriş problemi için, LE tipi bir açılım modelinin TE tipi bir açılım modeline göre analitik çözüme hemen hemen aynı hata oranı ve fakat daha az sayıda SDS ile yakınsadığı görülmüştür. Bu problem için bundan sonra yapılacak statik analiz çalışmalarında daha az sayıda SDS sağlaması sebebiyle LE kiriş modelinin tercih edilmesi daha uygun olmasına karşın, bir önceki problem ile karşılaştırma olanağı sağlanabilmesi amacıyla farklı mertebelerden TE kiriş modeli kullanılacaktır. Ayrıca kiriş ekseni 60 adet $B4$ tipi sonlu elemanlar ($60B4$) ile modellenecektir.

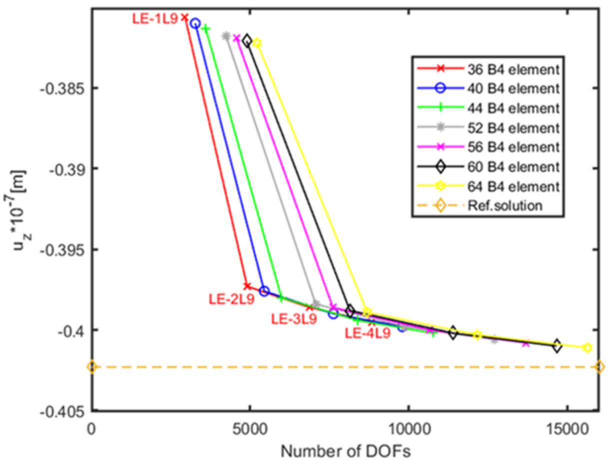
3.2.2 İki ucu ankastre kiriş static analiz

Ele alınan iki ucu ankastre kirişin kritik kesitlerinde gerilme ve şekil değiştirme analizi *CUF* çerçevesinde farklı mertebeden TE modelleri kullanılarak yapılmıştır. Söz konusu analizlerde gerilme ve şekil değiştirmelerin kalınlık ve genişlik boyunca değişimleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

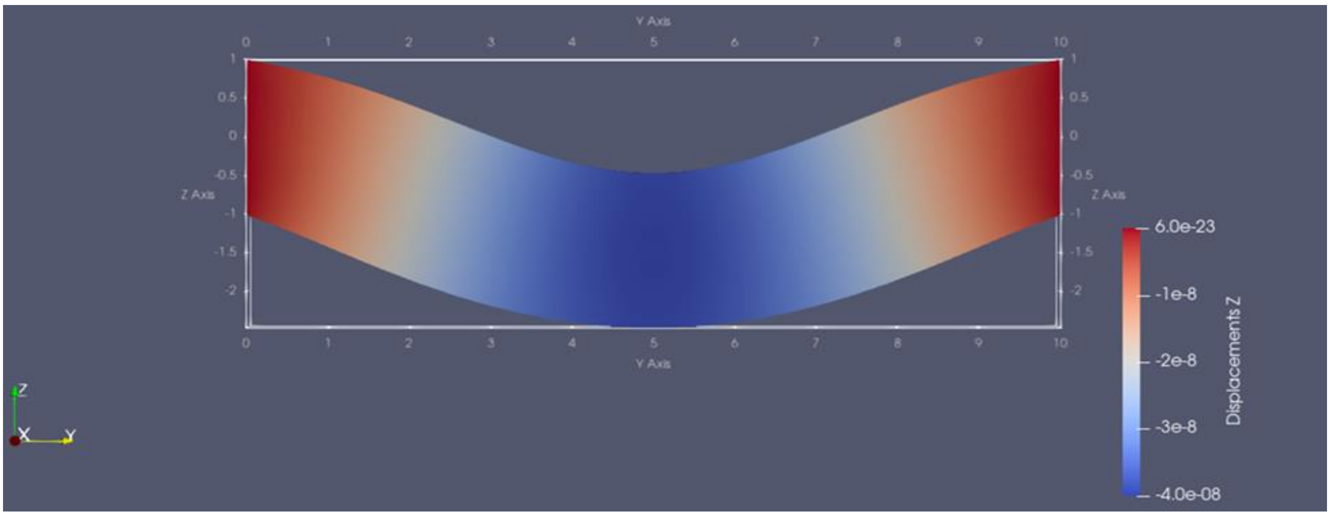
Şekil 10'da enine kayma gerilmesi σ_YZ ve enine şekil değiştirme ε_YZ dağılımlarının y=0.1L kesiti için kalınlık boyunca farklı mertebeden TE modelleri (N=2~6) için dağılımı görülmektedir. Kullanılan model mertebesinin (N), hem enine kayma gerilmesi hem de enine şekil değiştirme üzerindeki büyük etkisi (özellikle N=2'den sonra) açık bir şekilde görülmektedir. Mertebe değerinin en az N=3 olması ile birlikte enine kayma gerilmesi ve enine şekil değiştirme değerlerinde yakınsama gerçekleşmiştir. Daha yüksek mertebeden açılım modeli kullanılması, sadece SDS'yi ve dolayısı ile hesaplama yükünün artmasına sebep olacaktır. Şekil 10'dan görüleceği üzere enine kayma gerilmesi σ_{YZ} ve enine şekil değiştirme ε_{YZ} en büyük değerlerini $y = 0.1L$ kesitinin ağırlık merkezinde almaktadırlar ($x = 0, z = 0$).



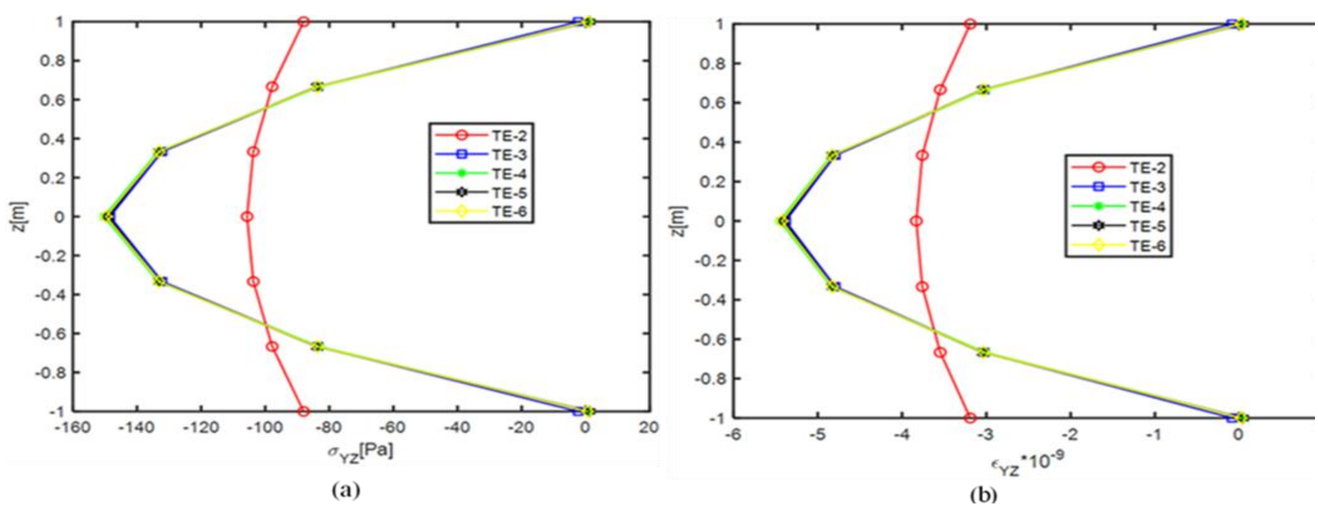
Şekil 7. Farklı mertebeden TE modelleri ve sonlu eleman sayısı için düşey yer değiştirme (u_z) yakınsaması ($x = 0, y = L/2, z = 0$)



Şekil 8. Farklı LE modelleri ve sonlu eleman sayısı için düşey yer değiştirme (u_z) yakınsaması ($x = 0, y = L/2, z = 0$)



Şekil 9. 60 $B4$ sonlu eleman modellemesi için $LE - 4L9$ tipi açılıma ait kiriş deformasyonu



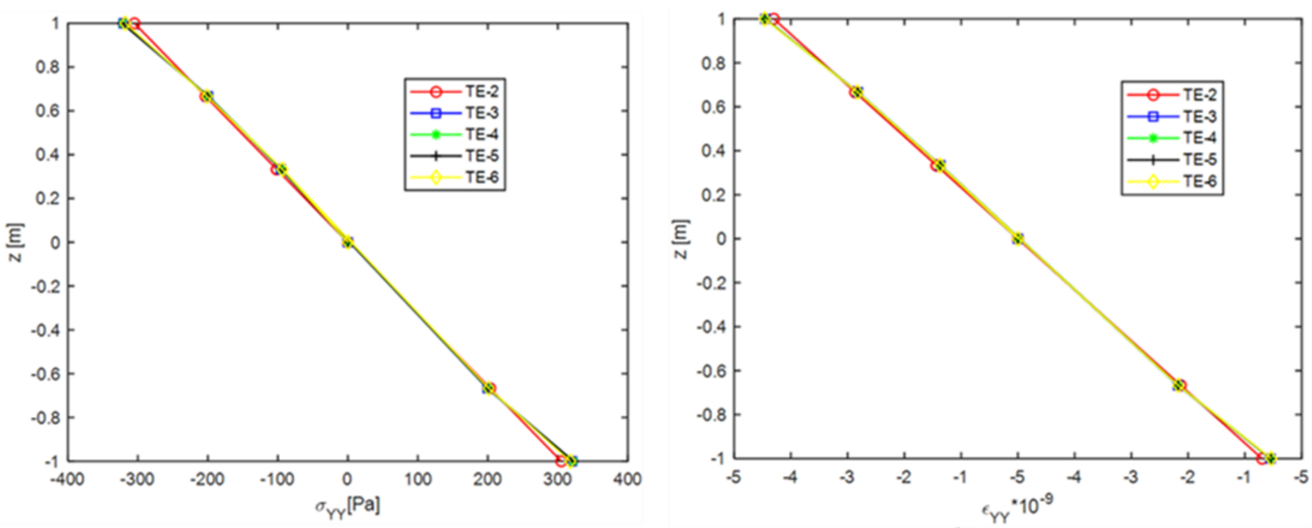
Şekil 10. (a) Kalınlık boyunca enine kayma gerilmesi $\boldsymbol{\sigma_{YZ}}$, (b) enine şekil değiştirme $\boldsymbol{\varepsilon_{YZ}}$ dağılımları (b)$(\boldsymbol{x = 0, y = 0.1L, z})$

Tablo 6. Farklı TE modelleri için enine kayma gerilmesi σ_{YZ} ve enine şekil değiştirmesi ε_{YZ} $(x, y = 0.1L, z = 0)$

$Model$	$y = 0.1L, z = 0$					
	$(\sigma_{yz}) \times 10^2$ $[Pa]$			$(\varepsilon_{yz}) \times 10^{-8}$		
	$x = 0$	$x = \pm b/4$	$x = \pm b/2$	$x = 0$	$x = \pm b/4$	$x = \pm b/2$
$N = 2$	-1.056	-1.055	-1.053	-0.383	-0.382	-0.381
$N = 3$	-1.483	-1.483	-1.482	-0.538	-0.537	-0.537
$N = 4$	-1.502	-1.498	-1.494	-0.544	-0.543	-0.542
$N = 5$	-1.490	-1.486	-1.482	-0.540	-0.539	-0.537
$N = 6$	-1.496	-1.486	-1.481	-0.542	-0.539	-0.537
$N = 7$	-1.494	-1.484	-1.479	-0.541	-0.538	-0.536
$N = 8$	-1.502	-1.484	-1.479	-0.544	-0.538	-0.536
$N = 9$	-1.502	-1.484	-1.479	-0.544	-0.538	-0.536

Şekil 11'de eksenel gerilme σ_{YY} ve eksenel şekil değiştirme ε_{YY} dağılımlarının açıklık ortası kesiti için kalınlık boyunca farklı mertebeden TE modelleri $(N = 2{\sim}6)$ için dağılımı görülmektedir. Söz konusu kesitin özellikle alt ve üst liflerinde mertebe değerinin en az $N = 3$ olması ile birlikte her iki büyüklük için yakınsama gerçekleşmiştir. Şekil 11'den görüleceği üzere eksenel gerilme σ_{YY} ve eksenel şekil değiştirme ε_{YY}, en büyük değerlerini bu kesitin alt ve üst liflerinde $(x = 0, z = \pm h/2)$ almaktadır.

Tablo 7'de bu iki büyüklüğün, üst lifler için kesit genişliği boyunca kritik noktalardaki değerleri, TE kiriş modeli mertebesinin farklı değerleri için verilmiştir. Tablodan görüleceği üzere $N = 3$'den itibaren her iki değerde yakınsama görülmekte olup $N = 4$ değerinde ise bu değerler sabit olarak kalmaktadırlar.



(a) (b)

Şekil 11. (a) Kalınlık boyunca eksenel gerilme σ_YY, (b) eksenel şekil değiştirme ε_YY dağılımları (x=0,y=L/2,z)

Tablo 7. Farklı TE modelleri için eksenel gerilme σ_{YY} ve eksenel şekil değiştirme ε_{YY} $(x, y = L/2, z = h/2)$

	$y = L/2, z = h/2$					
Model	$(\sigma_{yy}) \times 10^3$ $[Pa]$			$(\varepsilon_{yy}) \times 10^{-8}$		
	$x = 0$	$x = \pm b/4$	$x = \pm b/2$	$x = 0$	$x = \pm b/4$	$x = \pm b/2$
$N = 2$	-0.304	-0.3049	-0.3049	-0.4302	-0.4302	-0.4302
$N = 3$	-0.320	∓ 0.320	-0.320	-0.445	∓ 0.445	-0.445
$N = 4$	-0.322	∓ 0.322	-0.322	-0.445	∓ 0.445	-0.445
$N = 5$	-0.322	∓ 0.322	-0.322	-0.445	∓ 0.445	-0.445

4 Sonuçlar

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

- *CUF* çerçevesinde kullanılacak açılım modelinin tipi, problemin uç sınır koşullarına daha az sayıda serbestlik derecesi bakımından bağlıdır.
- Ele alınan basit kiriş probleminde, TE kullanılması ile analitik çözüme yakınsama çok daha az sayıda SDS ile gerçekleşmektedir.
- Ele alınan ankastre kiriş probleminde, LE kullanılması ile analitik çözüme yakınsama çok daha az sayıda SDS ile gerçekleşmektedir.
- Enine kayma gerilmesi σ_{YZ} ve enine şekil değiştirme ε_{YZ} için Taylor tipi bir kiriş modelinde TE açılım mertebesinin en az $N = 3$ olması gerekmektedir.
- Eksenel gerilme σ_{YY} ve eksenel şekil değiştirme ε_{YY} için Taylor tipi bir kiriş modelinde TE açılım mertebesinin en az $N = 3$ olması gerekmektedir.

Teşekkür

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli katkılarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Erasmo Carrera'ya en derin saygılarımı sunarım.

Çıkar çatışması

Yazar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

Benzerlik oranı (iThenticate): %13

Kaynaklar

[1] D. T. Mucichescu, Bounds for stiffness of prismatic beams. Journal of Structural Engineering, 110, 1410-14, 1984.

[2] E. Carrera, G. Giunta and M. Petrolo, Beam Structures: Classical and Advanced Theories. JohnWiley & Sons, United Kingdom: Chichester, West Sussex, 2011.

[3] H. T. Thai and T. P. Vo, Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams Using Various Higher-order Shear Deformation Beam Theories. International Journal of Mechanical Sciences, 62(1), 57-66, 2012. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014.

[4] K. K. Pradhan and S. Chakraverty, Effects of Different Shear Deformation Theories on Free Vibration of Functionally Graded Beams. International Journal of Mechanical Sciences, 82, 149-60, 2014. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.03.014.

[5] M. A. Levinson, An accurate simple theory of statics and Dynamics of elastic plates. Mech. Res. Commun., 7(6), 343-50, 1980.https://doi.org/10.1016/0093-6413(80)90049-X.

[6] M. A. Levinson, A new rectangular beam theory. Journal of Sound and Vibration, 74(1), 81-7, 1981. https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90493-4.

[7] M. Z. Wang and W. Wang, A refined theory of beams. J. Eng. Mech., Suppl., 324-327, 2003.

[8] Y. Gao and M. Wang, A refined theory of rectangular deep beams based on general solutions of elasticity. Sci. China Ser. G, 36(3), 286-97, 2006.

[9] A. Bekhadda, et al., Static buckling and vibration analysis of continuously graded ceramic-metal beams using a refined higher order shear deformation theory. Multidiscipline Modeling In Materials And Structures, 15(6), 1152-69, 2019.

[10] J. Cai and C. D. Moen, Elastic buckling analysis of thin-walled structural members with rectangular holes using generalized beam theory. Thin-Walled Structures, 107, 274-86, 2016. https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.06.014.

[11] E. Carrera, A. Pagani, M. Petrolo, et al., Recent developments on refined theories for beams with applications. Mechanical Engineering Reviews, 2 (2), 14-00298, 2015.https://doi.org/10.1299/mer.14-00298.

[12] E. Carrera, A. G. de Miguel, and A. Pagani, Extension of MITC to higher-order beam models and shear locking analysis for compact, thin-walled, and composite structures. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 112(13), 1889-908, 2017.https://doi.org/10.1002/nme.5588.

[13] S. Richard, Generalized Beam Theory-an adequate method for coupled stability problems. Thin-Walled Structures, 19(2-4), 161-80, 1994.

[14] G. Taig and G. Ranzi, Generalised Beam Theory (GBT) for composite beams with partial shear interaction. Engineering Structures, 99, 582-602, 2015. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.05.025.

[15] S. W. Tsai, Composites Design. Dayton, Think Composites, 1988.

[16] J. N. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and Analysis. CRC Press, 2004.

[17] K. Bathe, Finite element procedure. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.

[18] S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1951.

[19] G. Shi and G. Z. Voyiadjis, A sixth-order theory of shear deformable beams with variational consistent boundary conditions. J. Appl. Mech. 78(2), 021019-1-021019-11, 2011.