

Fibonacci Sayılarında Gizli Üçgensel Sayılar

Hidden Triangle Numbers in Fibonacci Numbers



ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

Yiğit HESAPTAR^{1*}

Beste DENİZ¹

Nursen YILMAZ¹

¹Amasya Şehit Ferhat Üneli Bilim ve Sanat Merkezi, Amasya / Türkiye

¹Amasya Şehit Ferhat Üneli Science and Art Center, Amasya / Turkey

*yigithesaptar@hotmail.com

ORCID: 0000-0001-5835-124X

ORCID: 0000-0002-3044-4388

ORCID: 0000-0001-6708-0656

MAKALE BİLGİSİ / ARTICLE INFORMATION

Geliş Tarihi / Date Received

15.10.2019

Kabul Tarihi / Date Accepted

09.06.2020

Yayın Tarihi / Date Published

Temmuz / July 2020

Yayın Sezonu / Pub Date Season

Haziran - Aralık / June - December

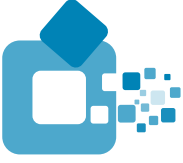
ATIF / CITE as

Hesaptar, Y., Deniz, B. ve Yılmaz, N. (2020). "Fibonacci Sayılarında Gizli Üçgensel Sayılar" / "Hidden Triangle Numbers in Fibonacci Numbers". bilar: Bilim Armonisi Dergisi, 3 (1): 25-35. doi: 10.37215/bilar.633484.

<https://dergipark.org.tr/tr/pub/bilar>

Copyright © Published by Antalya İl Millî Eğitim Müdürlüğü Since 2018, Antalya, 07100 Turkey. All rights reserved.





Fibonacci Sayılarında Gizli Üçgensel Sayılar

Hidden Triangle Numbers in Fibonacci Numbers



ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

ÖZET

Bu araştırmada, “ $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ kümesinin herhangi iki ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?” probleminden yola çıkılarak Fibonacci Sayılarında gizli olan Üçgensel Sayılar keşfedilmiştir. “n. Fibonacci Sayısını oluşturan Üçgensel Sayıların düzeni nasıldır?” problemine cevap aranmıştır. $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ kümesinin eleman sayısı sıfırdan başlatılarak $n = 12$ 'ye kadar incelenmiştir. Ardışık herhangi iki elemana sahip olmayan tüm alt kümeler sistematik olarak düzenlenerek çizelgeler oluşturulmuştur. n. Fibonacci Sayısını oluşturan Üçgensel Sayıların düzeni gösterilmiş ve Tümevarım Yöntemiyle ispat edilmiştir. Sonuç olarak Fibonacci Sayılarının Üçgensel Sayıların toplamı şeklinde yazılabildiği ve bu yazımda Üçgensel Sayıların katsayılarının da yine Fibonacci Sayılarından oluştuğu görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Fibonacci sayıları, Üçgensel sayılar, Alt küme.

ABSTRACT

In this research, “How many subsets of set $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ have no two consecutive integers?” based on the problem, the Triangular Numbers hidden in the Fibonacci Numbers were discovered. The answer to the problem was sought “How should we write Triangular Numbers to compose n. Fibonacci?”. The number of elements of: $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ set is examined from $n = 0$ to $n = 12$. All subsets that do not have two consecutive elements are arranged systematically and charts are created. n. The order of the Triangular Numbers forming the Fibonacci Number is shown and proved by the Inductive Method. As a result, it has been observed that Fibonacci Numbers can be written as the sum of the Triangular Numbers, and in this article, the coefficients of the Triangular Numbers are also composed of Fibonacci Numbers.

Keywords: Fibonacci numbers, Triangular numbers, Subset.

*Bu çalışma, TÜBİTAK 50. Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması Samsun Bölge Sergisi'nde sunulmuştur (2019).

1. GİRİŞ

1.1. Fibonacci Sayı Dizisi

Fibonacci dizisi, her sayının kendinden hemen önceki iki sayının toplanması sonucu oluşan bir sayı dizisidir. Bu durumda, genel olarak n 'inci Fibonacci Sayısı F_n şu şekilde ifade edilir:

$$F_1 = 1,$$

$$F_2 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 3$$

Buna göre Fibonacci Sayılarının ilk birkaç tanesi şöyle sıralanacaktır: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, ... (Sertöz 1997).

1.2. Üçgensel Sayılar

Bir Üçgensel Sayı, 1'den n 'ye kadar olan n doğal sayının toplamıdır. Bu sayılara üçgensel denmesinin sebebi, bir üçgen şeklinde dizilebilecek eşit çaplı topların sayılarına karşılık gelmeleridir. n . Üçgensel Sayının formülü şöyledir:

$$Ü_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

İlk 20 Üçgensel Sayı şunlardır: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190 ve 210 (Wells 1997).

Bu araştırmada, "{1, 2, 3, 4, 5, ..., n} kümesinin herhangi iki ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?" probleminden yola çıkılarak Fibonacci Sayılarında gizli olan Üçgensel Sayılar keşfedilmiştir. Böylece Fibonacci Sayıları için yeni bir eşitlik oluşturulmuştur.

2006 yılından 2018 yılına kadar yapılmış olan tüm çalışmalar incelendiğinde Fibonacci, Üçgensel Sayılar ve alt küme üzerine yapılmış bazı çalışmalara ulaşılmıştır. Fibonacci Sayıları ile ilgili bir dizi çalışma yapılmıştır (Uzun ve Keleştemur 2012, Koşar 2013). Bunlardan 2009 yılında yapılmış olan "Fibonacci Ağacı" isimli bir çalışmada, herhangi bir kümenin ardışık elemanlarının birlikte bulunmadığı alt küme sayısı üzerine çalışılmış ve çözüm için Fibonacci Sayı Dizisine ulaşılmıştır. Buradan hareketle bazı formüller bulunmuş ve Fibonacci Sayıları kombinasyonlar toplamı şeklinde ifade edilmiştir (Özer ve Ünlü 2009). Bulut (2017)'un yaptığı başka bir çalışmada da benzer sonuçlar elde edilmiş: Pascal Üçgeninden faydalanılarak Fibonacci Dizisinin n . elemanını doğrudan bulabilen bir formül önerilmiştir. Alt küme sayılarıyla ilgili 2015 yılında yapılan "Alt Kümelerin Üretici Fonksiyonları" isimli bir çalışmada, ardışık elemanlar bulunduran bir kümenin elemanları

arasındaki fark 2'den büyük, 3'ten büyük ve k 'den büyük olan durumlar incelenmiştir. Buna bağlı olarak da en az iki ardışık elemanı arasındaki fark k olan r elemanlı alt kümelerinin sayısını üretici fonksiyonlar yardımı ile bulunmuştur. Sonuçta alt küme sayıları kombinasyonlardan yararlanarak hesaplanmıştır (Takkın ve Korkmaz 2015). Ayrıca, alt küme elemanlarının toplamını Pascal Üçgeninden bulma üzerine başka bir çalışma yapılmıştır (Taşgın ve Taşgın 2016). 2017 yılında yapılmış olan bir çalışmada ise parabol serilerinden Üçgensel Sayılara ulaşılmıştır (Aksoy ve Sarı 2017). Tüm araştırmalarımız sonucunda, Fibonacci Sayılarının Üçgensel Sayılar cinsinden ifadesine ulaşamamıştır.

Çalışmamızda ise {1, 2, 3, 4, 5, ..., n} şeklindeki bir kümenin herhangi iki ardışık sayı içermeyen alt küme sayıları incelenirken ardışık sayı toplamları fark edilmiş ve Fibonacci Sayıları, Üçgensel Sayılar cinsinden gösterilmiştir.

1.3. Amaç

Bu çalışmada, "{1, 2, 3, 4, 5, ..., n} kümesinin herhangi iki ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?" probleminden yola çıkılarak bir Fibonacci Sayısında gizli olan Üçgensel Sayıları keşfetmek amaçlanmıştır. Alt problemler ise:

1. {1, 2, 3, 4, 5, ..., n} kümesinin herhangi iki ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?
2. n . Fibonacci Sayısını oluşturan Üçgensel Sayıların düzeni nasıldır? şeklindedir.

2. MATERYAL VE METOT

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ kümesinin bir alt kümesinin eleman sayısı sıfırdan başlatılarak $n = 12$ 'ye kadar incelenmiştir. Ardışık herhangi iki elemana sahip olmayan tüm alt kümeler sistematik olarak yazılarak, alt küme sayıları çizelgeler halinde düzenlenmiştir.

Özer ve Ünlü (2009) ile Bulut'un (2017) araştırmalarındaki gibi ardışık herhangi iki eleman bulundurmeyen toplam alt küme sayısının bir Fibonacci Sayısı olduğu görülmüştür. Çizelgeler oluşturulurken çözümü oluşturan alt kümeler eleman sayılarına göre düzenlenmiştir. Yani sıfır elemanlı alt kümeler, 1 elemanlı, 2 elemanlı, ...vb. alt kümeler ayrı ayrı sütunlara yerleştirilmiştir. Bu sütunlar kendi içlerinde oluşturulurken de; içinde sayı değeri olarak en küçük "1" elemanını bulunduran, "2" elemanını bulunduran şeklinde satırlar halinde düzenlenince Üçgensel Sayıların varlığı fark edilmiştir. Öyleyse toplam sayı olan Fibonacci Sayısı, Üçgensel Sayılar cinsinden

yazılabilmelidir. Herhangi ardışık iki eleman buldurmeyen toplam alt küme sayısını oluşturan Üçgenel Sayıların adetleri hesaplanarak ilgili Fibonacci Sayısına eşitliği gösterilmiştir. n . Fibonacci Sayısını oluşturan Üçgenel Sayıların düzeni gösterilmiş ve Tümevarım Yöntemiyle ispat edilmiştir.

3. BULGULAR

Sıfır elemanlı bir $A = \{\}$ kümesi için ardışık eleman içermeyen alt kümeler ve alt küme sayıları Çizelge 1’de gösterilmiştir.

Sıfır elemanlı bir kümenin alt kümesi de boş kümedir, alt küme sayısı da her daim 1 olacaktır. Bundan sonraki incelemede alt küme olarak boş kümeyi ifade eden 1 sayısı toplam alt küme sayısına eklenecektir.

Bir elemanlı bir $A = \{1\}$ kümesi için $n = 1$ olup Çizelge 2’de alt kümeler gösterilmiştir.

Bir elemanlı alt küme sayısı da her daim kümenin eleman sayısına eşit olacağından, daima n ’dir. Çizelge 2’ye göre ardışık herhangi iki eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: $2 = 1 + 1 = 1 + n$ olmaktadır.

İki elemanlı bir $A = \{1, 2\}$ kümesi için $n = 2$ olup Çizelge 3’te alt kümeler gösterilmiştir.

Ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: $3 = 1 + 2 = 1 + n$ ’dir.

İki elemanlı bir kümenin alt kümelerinden kendisi, ardışık iki eleman içerdiğinden dolayı çözüm çizelgesine alınmamıştır.

Bundan sonraki incelemede boş küme ve bir elemanlı alt küme sayıları toplamını ifade eden $1 + n$ sayısı, toplam alt küme sayısına eklenecektir. Alt küme sayılarının Üçgenel Sayılar ile ilişkisi üç elemanlı bir kümenin alt kümelerinde ilk defa fark edilecektir.

Üç elemanlı bir $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi için $n = 3$ olup Çizelge 4’de alt kümeler gösterilmiştir.

Ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: $5 = 1 + 3 + 1 = 1 + n + \ddot{U}_1$ ’dir.

Dört elemanlı bir $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi için $n = 4$ olup Çizelge 5’te alt kümeler gösterilmiştir.

Ardışık herhangi iki eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: $8 = 1 + 4 + 3 = 1 + n + \ddot{U}_2$ ’dir.

İki elemanlı alt kümeleri incelediğimizde içinde sayı değeri olarak en küçük “1” elemanı olan 2 alt küme; içinde en küçük “2” elemanı olan 1 alt küme olduğu görülür. $2 + 1 = 3 = \ddot{U}_2$ ’dir. Bu ardışık

düzen çizelgelerde devam etmektedir.

Beş elemanlı bir $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi için $n = 5$ olup Çizelge 6’da alt kümeler gösterilmiştir.

Çizelge 1. Sıfır elemanlı kümenin alt kümeleri ve toplam alt küme sayıları

Alt kümelerin eleman sayısı	0
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler	{ }
Alt küme sayıları	1
Üçgenel Sayılarla ilişkisi	-

Çizelge 2. Bir elemanlı kümenin alt kümeleri ve toplam sayıları

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler	{ }	{1}
Alt küme sayıları	1	1
Üçgenel Sayılarla ilişkisi	-	-

Çizelge 3. İki elemanlı kümenin alt kümeleri ve toplam sayıları

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler	{ }	{1}, {2}
Alt küme sayıları	1	2
Üçgenel Sayılarla ilişkisi	-	-

Çizelge 4. Üç elemanlı kümenin alt kümeleri, adetleri ve Üçgenel Sayılarla ilişkisi

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1	2
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler	{ }	{1}, {2}	{1,3}, {2,4}
Alt küme sayıları	1	3	1
Üçgenel Sayılarla ilişkisi	-	-	\ddot{U}_1

Çizelge 5. Dört elemanlı kümenin alt kümeleri, adetleri ve Üçgenel Sayılarla ilişkisi

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1	2
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler	{ }	{1}, {2}, {3}	{1,3}, {1,4}, {2,4}
Alt küme sayıları	1	4	3
Üçgenel Sayılarla ilişkisi	-	-	\ddot{U}_2

Çizelge 6. Beş elemanlı kümenin alt kümeleri, adetleri ve Üçgenel Sayılarla ilişkisi

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1	2	3
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler	{ }	{1}, {2}, {3}, {4}	{1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,4}, {2,5}, {3,5}	{1,3,5}
Alt küme sayıları	1	5	6	1
Üçgenel Sayılarla ilişkisi	-	-	\ddot{U}_3	\ddot{U}_1

Ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: 13

$$= 1 + 5 + 6 + 1 = 1 + n + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_1 \text{ 'dir.}$$

İki elemanlı alt kümelerin 3 + 2 + 1 şeklinde devam ettiği görülmektedir.

Altı elemanlı bir $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi için $n = 6$ olup Çizelge 7'de alt kümeler gösterilmiştir.

Çizelge 7. Altı elemanlı kümenin alt kümeleri, adetleri ve Üçgensel Sayılarla ilişkisi

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1	2	3
	{ }	{1}	{1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}	{1,3,5}, {1,3,6}, {1,4,6}
		{2}	{2,4}, {2,5}, {2,6}	{2,4,6}
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler		{3}	{3,5}, {3,6}	
		{4}	{4,6}	
		{5}		
		{6}		
Alt küme sayıları	1	6	10	3 + 1
Üçgensel Sayılarla ilişkisi	-	-	\ddot{U}_4	$\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1$

Ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: 21

$$= 1 + 6 + 10 + (3 + 1) = 1 + n + \ddot{U}_4 + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) \text{ 'dir.}$$

İki elemanlı alt kümelerin 4 + 3 + 2 + 1 şeklinde devam ederken; üç elemanlı alt kümelerden içinde 1 elemanını bulduranlar, {1, 3, ...} ve {1, 4, ...} şeklinde ayrıldığında yine ardışık toplamlar (2 + 1) elde edilmektedir.

Yedi elemanlı bir $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesi için $n = 7$ olup Çizelge 8'de alt kümeler gösterilmiştir.

Çizelge 8. Yedi elemanlı kümenin alt kümeleri, adetleri ve Üçgensel Sayılarla ilişkisi

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1	2	3	4
	{ }	{1}	{1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {1,7}	{1,3,5}, {1,3,6}, {1,3,7}, {1,4,6}, {1,4,7}, {1,5,7}	{1,3,5,7}
		{2}	{2,4}, {2,5}, {2,6}, {2,7}	{2,4,6}, {2,4,7}, {2,5,7}	
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler		{3}	{3,5}, {3,6}, {3,7}	{3,5,7}	
		{4}	{4,6}, {4,7}		
		{5}	{5,7}		
		{6}			
		{7}			
Alt küme sayıları	1	7	15	6 + 3 + 1	1
Üçgensel Sayılarla ilişkisi	-	-	\ddot{U}_5	$\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1$	\ddot{U}_1

Ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: 34

$$= 1 + 7 + 15 + (6 + 3 + 1) + 1 = 1 + n + \ddot{U}_5 + (\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1 \text{ 'dir.}$$

İki elemanlı alt kümeler 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 = \ddot{U}_5 şeklinde olup;

Üç elemanlı alt kümeler (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = $\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1$ şeklindedir.

Sekiz elemanlı bir $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesi için $n = 8$ olup Çizelge 9'da alt kümeler gösterilmiştir.

Çizelge 9. Sekiz elemanlı kümenin alt kümeleri, adetleri ve Üçgenel Sayılarla ilişkisi

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1	2	3	4
	{ }	{1}	{1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {1,7}, {1,8}	{1,3,5}, {1,3,6}, {1,3,7}, {1,3,8} {1,4,6}, {1,4,7}, {1,4,8} {1,5,7}, {1,5,8} {1,6,8}	{1,3,5,7}, {1,3,5,8}, {1,3,6,8} {1,4,6,8}
		{2}	{2,4}, {2,5}, {2,6}, {2,7}, {2,8}	{2,4,6}, {2,4,7}, {2,4,8} {2,5,7}, {2,5,8} {2,6,8}	{2,4,6,8}
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler		{3}	{3,5}, {3,6}, {3,7}, {3,8}	{3,5,7}, {3,5,8} {3,6,8}	
		{4}	{4,6}, {4,7}, {4,8}	{4,6,8}	
		{5}	{5,7}, {5,8}		
		{6}	{6,8}		
		{7}			
		{8}			
Alt küme sayıları	1	8	21	10 + 6 + 3 + 1	(3 + 1) + 1
Üçgenel Sayılarla ilişkisi	-	-	\ddot{U}_6	$\ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1$	$(\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1$

Ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: 55

$$= 1 + 8 + 21 + (10 + 6 + 3 + 1) + (3 + 1) + 1$$

$$= 1 + n + \ddot{U}_6 + (\ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + [(\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1]'dir.$$

Dokuz elemanlı bir $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesi için $n = 9$ olup Çizelge 10'da alt kümeler gösterilmiştir.

Çizelge 10. Dokuz elemanlı kümenin alt kümeleri, adetleri ve Üçgenel Sayılarla ilişkisi

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1	2	3	4	5
	{ }	{1}	{1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {1,7}, {1,8}, {1,9}	{1,3,5}, {1,3,6}, {1,3,7}, {1,3,8}, {1,3,9} {1,4,6}, {1,4,7}, {1,4,8}, {1,4,9} {1,5,7}, {1,5,8}, {1,5,9} {1,6,8}, {1,6,9} {1,7,9}	{1,3,5,7}, {1,3,5,8}, {1,3,5,9}, {1,3,6,8}, {1,3,6,9}, {1,3,7,9} {1,4,6,8}, {1,4,6,9}, {1,4,7,9} {1,5,7,9}	{1,3,5,7,9}
		{2}	{2,4}, {2,5}, {2,6}, {2,7}, {2,8}, {2,9}	{2,4,6}, {2,4,7}, {2,4,8}, {2,4,9} {2,5,7}, {2,5,8}, {2,5,9} {2,6,8}, {2,6,9} {2,7,9}	{2,4,6,8}, {2,4,6,9}, {2,4,7,9} {2,5,7,9}	
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler		{3}	{3,5}, {3,6}, {3,7}, {3,8}, {3,9}	{3,5,7}, {3,5,8}, {3,5,9} {3,6,8}, {3,6,9} {3,7,9}	{3,5,7,9}	
		{4}	{4,6}, {4,7}, {4,8}, {4,9}	{4,6,8}, {4,6,9} {4,7,9}		
		{5}	{5,7}, {5,8}, {5,9}	{5,7,9}		
		{6}	{6,8}, {6,9}			
		{7}	{7,9}			
		{8}				
		{9}				
Alt küme sayıları	1	9	28	15 + 10 + 6 + 3 + 1	(6 + 3 + 1) + (3 + 1) + 1	1
Üçgenel Sayılarla ilişkisi	-	-	\ddot{U}_7	$\ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1$	$(\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1$	\ddot{U}_1

Ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: 89

$$= 1 + 9 + 28 + (15 + 10 + 6 + 3 + 1) + [(6 + 3 + 1) + (3 + 1) + 1] + 1$$

$$= 1 + n + \ddot{U}_7 + (\ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + [(\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1]'dir.$$

On elemanlı bir $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesi için $n = 10$ olup Çizelge 11'de alt kümeler gösterilmiştir.

Çizelge 11. On elemanlı kümenin alt kümeleri, adetleri ve Üçgensel Sayılarla ilişkisi

Alt kümelerin eleman sayısı	0	1	2	3	4	5
Ardışık eleman içermeyen alt kümeler	{ }	{1}	{1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {1,7}, {1,8}, {1,9}, {1,10}	{1,3,5}, {1,3,6}, {1,3,7}, {1,3,8}, {1,3,9}, {1,3,10} {1,4,6}, {1,4,7}, {1,4,8}, {1,4,9}, {1,4,10} {1,5,7}, {1,5,8}, {1,5,9}, {1,5,10} {1,6,8}, {1,6,9}, {1,6,10} {1,7,9}, {1,7,10} {1,8,10}	{1,3,5,7}, {1,3,5,8}, {1,3,5,9}, {1,3,5,10}, {1,3,6,8}, {1,3,6,9}, {1,3,6,10}, {1,3,7,9}, {1,3,7,10}, {1,3,8,10} {1,4,6,8}, {1,4,6,9}, {1,4,6,10}, {1,4,7,9}, {1,4,7,10}, {1,4,8,10} {1,5,7,9}, {1,5,7,10}, {1,5,8,10}	{2,4,6,8,10}
	{2}	{2,4}, {2,5}, {2,6}, {2,7}, {2,8}, {2,9}, {2,10}	{2,4,6}, {2,4,7}, {2,4,8}, {2,4,9}, {2,4,10} {2,5,7}, {2,5,8}, {2,5,9}, {2,5,10} {2,6,8}, {2,6,9}, {2,6,10} {2,7,9}, {2,7,10} {2,8,10}	{2,4,6,8}, {2,4,6,9}, {2,4,6,10}, {2,4,7,9}, {2,4,7,10} {2,5,7,9}, {2,5,7,10}, {2,5,8,10}		
	{3}	{3,5}, {3,6}, {3,7}, {3,8}, {3,9}, {3,10}	{3,5,7}, {3,5,8}, {3,5,9}, {3,5,10} {3,6,8}, {3,6,9}, {3,6,10} {3,7,9}, {3,7,10} {3,8,10}	{3,5,7,9}, {3,5,7,10}, {3,5,8,10} {3,6,8,10}		
	{4}	{4,6}, {4,7}, {4,8}, {4,9}, {4,10}	{4,6,8}, {4,6,9}, {4,6,10} {4,7,9}, {4,7,10} {4,8,10}	{4,6,8,10}		
	{5}	{5,7}, {5,8}, {5,9}, {5,10}	{5,7,9}, {5,7,10} {5,8,10}			
	{6}	{6,8}, {6,9}, {6,10}	{6,8,10}			
	{7}	{7,9}, {7,10}				
	{8}	{8,10}				
	{9}					
	{10}					
Alt küme sayıları	1	10	36	21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1	(10 + 6 + 3 + 1) + (6 + 3 + 1) + (3 + 1) + 1	(3 + 1) + 1 + 1
Üçgensel Sayılarla ilişkisi	-	-	\ddot{U}_8	$\ddot{U}_6 + \ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1$	$(\ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1$	$[(\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] + \ddot{U}_1$

Ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: 144

$$= 1 + 10 + 36 + (21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1) + [(10 + 6 + 3 + 1) + (6 + 3 + 1) + (3 + 1) + 1] + (3 + 1) + 1 + 1$$

$$= 1 + n + \ddot{U}_8 + (\ddot{U}_6 + \ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + [(\ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] + [(\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] \text{ dir.}$$

$n = 11$ için $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ ve $n = 12$ için $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ kümeleri için de benzer çizelgeler oluşturulmuştur. Sonuç olarak hesaplanan alt küme sayıları:

$n = 11$ için $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ kümesinin ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: 233

$$= 1 + n + \ddot{U}_9 + (\ddot{U}_7 + \ddot{U}_6 + \ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + [(\ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] + [[(\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] + [(\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] + \ddot{U}_1] + \ddot{U}_1 \text{ 'dir.}$$

$n = 12$ için $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ kümesinin ardışık herhangi eleman içermeyen toplam alt küme sayısı: 377

$$= 1 + n + \ddot{U}_{10} + (\ddot{U}_8 + \ddot{U}_7 + \ddot{U}_6 + \ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + [(\ddot{U}_6 + \ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_5 + \ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] + [[(\ddot{U}_4 + \ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_3 + \ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + (\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] + [[(\ddot{U}_2 + \ddot{U}_1) + \ddot{U}_1] + \ddot{U}_1] + \ddot{U}_1] \text{ şeklindedir.}$$

3.1. Toplam Alt Küme Sayısının İçinde Bulunan Üçgenel Sayıların Adetleri

Elde edilen toplam alt küme sayılarındaki Üçgenel Sayıları toplarsak:

$$n = 0 \text{ için } 1 + n$$

$$n = 1 \text{ için } 1 + n$$

$$n = 2 \text{ için } 1 + n$$

$$n = 3 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_1$$

$$n = 4 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_2$$

$$n = 5 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_3 + 1 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 6 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_4 + 1 \cdot \ddot{U}_2 + 1 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 7 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_5 + 1 \cdot \ddot{U}_3 + 1 \cdot \ddot{U}_2 + 2 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 8 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_6 + 1 \cdot \ddot{U}_4 + 1 \cdot \ddot{U}_3 + 2 \cdot \ddot{U}_2 + 3 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 9 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_7 + 1 \cdot \ddot{U}_5 + 1 \cdot \ddot{U}_4 + 2 \cdot \ddot{U}_3 + 3 \cdot \ddot{U}_2 + 5 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 10 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_8 + 1 \cdot \ddot{U}_6 + 1 \cdot \ddot{U}_5 + 2 \cdot \ddot{U}_4 + 3 \cdot \ddot{U}_3 + 5 \cdot \ddot{U}_2 + 8 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 11 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_9 + 1 \cdot \ddot{U}_7 + 1 \cdot \ddot{U}_6 + 2 \cdot \ddot{U}_5 + 3 \cdot \ddot{U}_4 + 5 \cdot \ddot{U}_3 + 8 \cdot \ddot{U}_2 + 13 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 12 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_{10} + 1 \cdot \ddot{U}_8 + 1 \cdot \ddot{U}_7 + 2 \cdot \ddot{U}_6 + 3 \cdot \ddot{U}_5 + 5 \cdot \ddot{U}_4 + 8 \cdot \ddot{U}_3 + 13 \cdot \ddot{U}_2 + 21 \cdot \ddot{U}_1$$

3.2. Üçgenel Sayıların Katsayılarının Fibonacci Sayısı Olarak İfade Edilmesi

Üçgenel Sayıların katsayılarının yine bir Fibonacci Sayısı olduğu görülmektedir. Öyleyse toplam alt küme sayılarını tekrar düzenlersek:

$$n = 0 \text{ için } 1 + n$$

$$n = 1 \text{ için } 1 + n$$

$$n = 2 \text{ için } 1 + n$$

$$n = 3 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_1$$

$$n = 4 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_2$$

$$n = 5 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_3 + F_1 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 6 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_4 + F_1 \cdot \ddot{U}_2 + F_2 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 7 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_5 + F_1 \cdot \ddot{U}_3 + F_2 \cdot \ddot{U}_2 + F_3 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 8 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_6 + F_1 \cdot \ddot{U}_4 + F_2 \cdot \ddot{U}_3 + F_3 \cdot \ddot{U}_2 + F_4 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 9 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_7 + F_1 \cdot \ddot{U}_5 + F_2 \cdot \ddot{U}_4 + F_3 \cdot \ddot{U}_3 + F_4 \cdot \ddot{U}_2 + F_5 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 10 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_8 + F_1 \cdot \ddot{U}_6 + F_2 \cdot \ddot{U}_5 + F_3 \cdot \ddot{U}_4 + F_4 \cdot \ddot{U}_3 + F_5 \cdot \ddot{U}_2 + F_6 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 11 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_9 + F_1 \cdot \ddot{U}_7 + F_2 \cdot \ddot{U}_6 + F_3 \cdot \ddot{U}_5 + F_4 \cdot \ddot{U}_4 + F_5 \cdot \ddot{U}_3 + F_6 \cdot \ddot{U}_2 + F_7 \cdot \ddot{U}_1$$

$$n = 12 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_{10} + F_1 \cdot \ddot{U}_8 + F_2 \cdot \ddot{U}_7 + F_3 \cdot \ddot{U}_6 + F_4 \cdot \ddot{U}_5 + F_5 \cdot \ddot{U}_4 + F_6 \cdot \ddot{U}_3 + F_7 \cdot \ddot{U}_2 + F_8 \cdot \ddot{U}_1$$

düzenini elde ederiz.

3.3. Bir Fibonacci Sayısının Üçgenel Sayılar Cinsinden İfadesi

Herhangi iki ardışık eleman içermeyen toplam alt küme sayısının bir Fibonacci Sayısı olduğu (Özer ve Ünlü 2009) bilindiğine göre:

$$n = 0 \text{ için } 1 + n = F_2$$

$$n = 1 \text{ için } 1 + n = F_3$$

$$n = 2 \text{ için } 1 + n = F_4$$

$$n = 3 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_1 = F_5$$

$$n = 4 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_2 = F_6$$

$$n = 5 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_3 + F_1 \cdot \ddot{U}_1 = F_7$$

$$n = 6 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_4 + F_1 \cdot \ddot{U}_2 + F_2 \cdot \ddot{U}_1 = F_8$$

$$n = 7 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_5 + F_1 \cdot \ddot{U}_3 + F_2 \cdot \ddot{U}_2 + F_3 \cdot \ddot{U}_1 = F_9$$

$$n = 8 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_6 + F_1 \cdot \ddot{U}_4 + F_2 \cdot \ddot{U}_3 + F_3 \cdot \ddot{U}_2 + F_4 \cdot \ddot{U}_1 = F_{10}$$

$$n = 9 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_7 + F_1 \cdot \ddot{U}_5 + F_2 \cdot \ddot{U}_4 + F_3 \cdot \ddot{U}_3 + F_4 \cdot \ddot{U}_2 + F_5 \cdot \ddot{U}_1 = F_{11}$$

$$n = 10 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_8 + F_1 \cdot \ddot{U}_6 + F_2 \cdot \ddot{U}_5 + F_3 \cdot \ddot{U}_4 + F_4 \cdot \ddot{U}_3 + F_5 \cdot \ddot{U}_2 + F_6 \cdot \ddot{U}_1 = F_{12}$$

$$n = 11 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_9 + F_1 \cdot \ddot{U}_7 + F_2 \cdot \ddot{U}_6 + F_3 \cdot \ddot{U}_5 + F_4 \cdot \ddot{U}_4 + F_5 \cdot \ddot{U}_3 + F_6 \cdot \ddot{U}_2 + F_7 \cdot \ddot{U}_1 = F_{13}$$

$$n = 12 \text{ için } 1 + n + \ddot{U}_{10} + F_1 \cdot \ddot{U}_8 + F_2 \cdot \ddot{U}_7 + F_3 \cdot \ddot{U}_6 + F_4 \cdot \ddot{U}_5 + F_5 \cdot \ddot{U}_4 + F_6 \cdot \ddot{U}_3 + F_7 \cdot \ddot{U}_2 + F_8 \cdot \ddot{U}_1 = F_{14}$$

n elemanlı bir kümenin herhangi iki ardışık eleman içermeyen toplam alt küme sayısının

$$F_{n+2} = 1 + n + \ddot{U}_{n-2} + F_1 \cdot \ddot{U}_{n-4} + F_2 \cdot \ddot{U}_{n-5} + F_3 \cdot \ddot{U}_{n-6} + \dots + F_{n-5} \cdot \ddot{U}_2 + F_{n-4} \cdot \ddot{U}_1 \text{ olduğu görülmektedir.}$$

n yerine (n-2) yazarak F_n eşitliğini elde edersek:

$$F_{n+2} = n - 1 + \ddot{U}_{n-4} + F_1 \cdot \ddot{U}_{n-6} + F_2 \cdot \ddot{U}_{n-7} + F_3 \cdot \ddot{U}_{n-8} + \dots + F_{n-7} \cdot \ddot{U}_2 + F_{n-6} \cdot \ddot{U}_1$$

Buradan hareketle **Fibonacci Sayıları için yeni bir tanım** yapabiliriz:

$$F_n = \begin{cases} n-1, & 1 < n < 5 \\ n-1 + \ddot{U}_{n-4}, & 5 \leq n < 7 \\ n-1 + \ddot{U}_{n-4} + \sum_{k=1}^{n-6} F_k + \ddot{U}_{n-k-5}, & 7 \leq n \end{cases}$$

n elemanlı kümenin alt küme sayılarından (n+2). Fibonacci Sayısı elde edildiğinden bu tanım ile F_1 elde edilemez.

$$F_2 = n - 1 = 1$$

$$F_3 = n - 1 = 2$$

$$F_4 = n - 1 = 3$$

$$F_5 = n - 1 + \ddot{U}_{n-4} = 4 + 1 = 5$$

$$F_6 = n - 1 + \ddot{U}_{n-4} = 5 + 3 = 8 \text{ için tanımın doğru olduğu aşikârdır.}$$

$n \geq 7$ için yazdığımız tanımları ispatlamamız gerekir. İspat için gerekli olan tanımlar:

Tanım 1: Fibonacci dizisi, her sayının kendinden hemen önceki iki sayının toplanması sonucu oluşan bir sayı dizisidir. Bu durumda, genel olarak n 'inci Fibonacci Sayısı F_n şu şekilde ifade edilir:

$$F_1 = 1,$$

$$F_2 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 3$$

Tanım 2: \ddot{U}_n : n . Üçgensel Sayısı olmak üzere $\ddot{U}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ olup; $\ddot{U}_n - \ddot{U}_{n-1} = n$ 'dir.

Teorem 1: $n \geq 7$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her Fibonacci Sayısı:

$F_n = n - 1 + \ddot{U}_{n-4} + F_1 \cdot \ddot{U}_{n-6} + F_2 \cdot \ddot{U}_{n-7} + F_3 \cdot \ddot{U}_{n-8} + \dots + F_{n-7} \cdot \ddot{U}_2 + F_{n-6} \cdot \ddot{U}_1 = n - 1 + \ddot{U}_{n-4} + \sum_{k=1}^{n-6} F_k + \ddot{U}_{n-k-5}$ şeklinde ifade edilir.

İspat 1: İspatı tümevarımla aşağıdaki şekilde yaparız.

Önermemiz $P(n)$: $F_n = n - 1 + \ddot{U}_{n-4} + F_1 \cdot \ddot{U}_{n-6} + F_2 \cdot \ddot{U}_{n-7} + F_3 \cdot \ddot{U}_{n-8} + \dots + F_{n-7} \cdot \ddot{U}_2 + F_{n-6} \cdot \ddot{U}_1$ şeklindedir.

1. $n = 7$ için $F_7 = 6 + \ddot{U}_3 + F_1 \cdot \ddot{U}_1 = 6 + 6 + 1 \cdot 1 = 13$ olduğundan $P(7)$ doğrudur.

2. $n = 8$ için $F_8 = 7 + \ddot{U}_4 + F_1 \cdot \ddot{U}_2 + F_2 \cdot \ddot{U}_1 = 7 + 10 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 21$ olduğundan $P(8)$ doğrudur.

3. $n = k - 1$ için ve $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani $P(k-1)$: $F_{k-1} = k - 2 + \ddot{U}_{k-5} + F_1 \cdot \ddot{U}_{k-7} + F_2 \cdot \ddot{U}_{k-8} + \dots + F_{k-8} \cdot \ddot{U}_2 + F_{k-7} \cdot \ddot{U}_1$ ve $P(k)$: $F_k = k - 1 + \ddot{U}_{k-4} +$

$F_1 \cdot \ddot{U}_{k-6} + F_2 \cdot \ddot{U}_{k-7} + F_3 \cdot \ddot{U}_{k-8} + \dots + F_{k-7} \cdot \ddot{U}_2 + F_{k-6} \cdot \ddot{U}_1$ olsun.

$n = k + 1$ için $P(k+1)$: $F_{k+1} = k + \ddot{U}_{k-3} + F_1 \cdot \ddot{U}_{k-5} + F_2 \cdot \ddot{U}_{k-6} + F_3 \cdot \ddot{U}_{k-7} + \dots + F_{k-6} \cdot \ddot{U}_2 + F_{k-5} \cdot \ddot{U}_1$ doğru olduğunu gösterelim.

Tanım 1'den $F_{k+1} + F_k = F_{k+1}$ 'dir.

$$\begin{aligned} F_{k+1} + F_k &= 2k - 3 + \ddot{U}_{k-4} + \ddot{U}_{k-5} + F_1 \cdot \ddot{U}_{k-6} + (F_1 + F_2) \cdot \ddot{U}_{k-7} + (F_2 + F_3) \cdot \ddot{U}_{k-8} + (F_4 + F_5) \cdot \ddot{U}_{k-9} + \dots + (F_{k-8} + F_{k-7}) \cdot \ddot{U}_2 + \\ &\quad (F_{k-7} + F_{k-6}) \cdot \ddot{U}_1 \\ &= 2k - 3 + \ddot{U}_{k-4} + \ddot{U}_{k-5} + F_1 \cdot \ddot{U}_{k-6} + F_3 \cdot \ddot{U}_{k-7} + F_4 \cdot \ddot{U}_{k-8} + F_5 \cdot \ddot{U}_{k-9} + \dots + F_{k-6} \cdot \ddot{U}_2 + F_{k-5} \cdot \ddot{U}_1 \end{aligned}$$

$F_1 = F_2 = 1$ olduğundan \ddot{U}_{k-6} ve \ddot{U}_{k-5} 'in katsayıları yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} &= 2k - 3 + \ddot{U}_{k-4} + F_1 \cdot \ddot{U}_{k-5} + F_2 \cdot \ddot{U}_{k-6} + F_3 \cdot \ddot{U}_{k-7} + F_4 \cdot \ddot{U}_{k-8} + F_5 \cdot \ddot{U}_{k-9} + \dots + F_{k-6} \cdot \ddot{U}_2 + F_{k-5} \cdot \ddot{U}_1 \\ &= k + (k - 3) + \ddot{U}_{k-4} + F_1 \cdot \ddot{U}_{k-5} + F_2 \cdot \ddot{U}_{k-6} + F_3 \cdot \ddot{U}_{k-7} + F_4 \cdot \ddot{U}_{k-8} + F_5 \cdot \ddot{U}_{k-9} + \dots + F_{k-6} \cdot \ddot{U}_2 + F_{k-5} \cdot \ddot{U}_1 \end{aligned}$$

Tanım 2'den $\ddot{U}_{k-3} = (k - 3) + \ddot{U}_{k-4}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &= k + \ddot{U}_{k-3} + F_1 \cdot \ddot{U}_{k-5} + F_2 \cdot \ddot{U}_{k-6} + F_3 \cdot \ddot{U}_{k-7} + F_4 \cdot \ddot{U}_{k-8} + F_5 \cdot \ddot{U}_{k-9} + \dots + F_{k-6} \cdot \ddot{U}_2 + F_{k-5} \cdot \ddot{U}_1 \\ &= F_{k+1} \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Yani $P(k+1)$ de doğru olur. Böylece $P(n)$ önermesinin $n = k - 1$ ve $n = k$ için doğru ise $n = k + 1$ için de doğru olacağını gösterdik. Böylece $P(n)$ önermesi her $n \geq 7$ doğal sayısı için doğrudur.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

" $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ kümesinin herhangi iki ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?" probleminde yola çıkılan bu çalışmada, bir Fibonacci Sayısında gizli olan Üçgensel Sayılar keşfedilmiştir. Fibonacci Sayıları, Üçgensel Sayıların toplamı alınarak:

$$F_n = \begin{cases} n-1, & 1 < n < 5 \\ n-1 + \ddot{U}_{n-4}, & 5 \leq n < 7 \\ n-1 + \ddot{U}_{n-4} + \sum_{k=1}^{n-6} F_k + \ddot{U}_{n-k-5}, & 7 \leq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $n \geq 7$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her Fibonacci Sayısı:

$F_n = n-1 + \ddot{U}_{n-4} + F_1 \cdot \ddot{U}_{n-6} + F_2 \cdot \ddot{U}_{n-7} + F_3 \cdot \ddot{U}_{n-8} + \dots + F_{n-7} \cdot \ddot{U}_2 + F_{n-6} \cdot \ddot{U}_1 = n-1 + \ddot{U}_{n-4} + \sum_{k=1}^{n-6} F_k + \ddot{U}_{n-k-5}$ şeklinde ifade edilerek ispatı Tümevarım Yöntemiyle yapılmıştır.

$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ kümesinin iki ardışık tam sayı içermeyen alt küme sayısı Fibonacci Sayısı olup kendinden önceki iki sayının toplamı ile hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

- Aksoy, E., Sarı, Y. (2017). "Parabol Serilerinin Eklemeli Toplamlar Dizisinin Terimleri ile Üçgensel Sayılar Arasındaki İlişkiler". TÜBİTAK 48. Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması Özet Kitapçığı, 48; 124.
- Bulut, F. (2017). "Pascal Üçgeni, Kombinasyon ve Tümevarım Kullanarak Fibonacci Dizisinin N. Elemanını Bulma". El-Cezerî Fen ve Mühendislik Dergisi, 4(3); 429-435.
- Koşar, E. (2013). "Fibonacci Sayılarında $F_n^p | F_m$ Şartının Araştırılması". TÜBİTAK 44. Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması Özet Kitapçığı, 44; 127.
- Özer, A., Ünlü, K. (2009). "Fibonacci Ağacı". TÜBİTAK 40. Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması Özet Kitapçığı, 40; 90.
- Sertöz, S. (1997). *Matematiğin Aydınlik Dünyası*. TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 6. Basım. Ankara.
- Takkın, B. K., Korkmaz, A. (2015). "Alt Kümelerin Üretici Fonksiyonları". TÜBİTAK 46. Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması Özet Kitapçığı, 46; 118.
- Taşgın, S., Taşgın, S. (2016). "Alt Küme Elemanlarının Toplamını Bulmada Pascal Üçgeni Yaklaşımı". TÜBİTAK 47. Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması Özet Kitapçığı, 47; 137.
- Uzun, M. F., Keleştemur, S. E. (2012). "Olasılık ve Fibonacci Dizisi Arasındaki İlişki". TÜBİTAK 43. Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması Özet Kitapçığı, 43; 126.
- Wells, D. (1997). *Matematiğin Gizli Dünyası*, Türkçesi: Dr. Selçuk Alsan. Sarmal Yayınevi, Birinci Baskı. İstanbul.