

Genelleştirilmiş Burgers–Fisher Denkleminin Açık Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi ile Sayısal Çözümü

Numerical Solution of the Generalized Burgers – Fisher Equation with Explicit Logarithmic Finite Difference Method

Gonca ÇELİKTEN^{*a}, Ertan SÜREK^b

Kafkas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 36100, Kars

• Geliş tarihi / Received: 06.02.2020 • Düzeltilecek geliş tarihi / Received in revised form: 22.05.2020 • Kabul tarihi / Accepted: 09.06.2020

Öz

Bu çalışmada genelleştirilmiş Burgers–Fisher denkleminin sayısal çözümleri açık logaritmik sonlu fark yöntemi (A-LSFY) kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen sayısal çözümler, tam çözümler ve literatürdeki diğer çalışmalarda elde edilen sayısal çözümlerle karşılaştırılmıştır. Yapılan bu karşılaştırmalar tablolarla sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Açık Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (A-LSFY), Genelleştirilmiş Burgers–Fisher Denklemi, Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi

Abstract

In this study, numerical solutions of generalized Burgers-Fisher equation are obtained by using explicit logarithmic finite difference method (E-LFDM). Obtained numerical solutions are compared by exact solutions and numerical solutions obtained by other studies in literature. These comparisons are presented with tables.

Keywords: *Explicit Logarithmic Finite Difference Method (E-LFDM), Generalized Burgers–Fisher Equation, Logarithmic Finite Difference Method.*

^{*a} Gonca ÇELİKTEN: gnc.cnbk@gmail.com, Tel: 0474 225 11 50-Dahili: 3125, orcid.org/0000-0002-2639-2490

^b orcid.org/0000-0002-9678-4123

1. Giriş

Bu çalışmada,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U^\delta \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \beta U(1 - U^\delta), \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (1)$$

ile verilen Genelleştirilmiş Burgers–Fisher denklemi

$$U(x, 0) = f(x)$$

başlangıç şartı ve

$$U(a, t) = g_1(t), \quad U(b, t) = g_2(t), \quad t > 0$$

sınır şartları ile göz önüne alındı.

Burada $f(x)$, $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ bilinen fonksiyonlar, α , β , δ ise parametrelerdir.

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler son yıllarda bilimin farklı alanlarında önemli rol oynamaktadır. Genelleştirilmiş Burgers–Fisher denklemi de farklı mekanizmaların işlevlerini tanımlamak için yüksek önem arz etmektedir. Genelleştirilmiş Burgers–Fisher denklemi, gaz dinamiği, sayı teorisi, ısı iletkenlik, elastikiyet vb. gibi alanlarda çeşitli uygulamalarda kullanılmıştır. Genelleştirilmiş Burgers–Fisher denkleminin sayısal çözümlerini hesaplamak için literatürde birçok sayısal yöntem önerilmiş ve uygulanmıştır. (İsmail vd., 2004) denklemi sayısal olarak çözmek için Adomian ayrıştırma (decomposition) metodunu (ADM) kullandılar. (Mittal ve Tripathi, 2015) tarafından denklemin sayısal çözümlerini elde etmek için modifiye edilmiş kübik B–spline collocation yöntemi kullanıldı. (Wazwaz, 2005) tanh yöntemini kullanarak denklemin çözümlerini elde etti. (Javidi, 2006) tarafından denklemin sayısal çözümlerini elde etmek için spektral collocation yöntemi kullanıldı. (Golbabai ve Javidi, 2009) Chebyshev polinomlarını kullanarak spektral collocation yöntemini denkleme uyguladılar. (Mickens ve Gumel, 2002) Burgers–Fisher denklemi için standart olmayan bir sonlu fark şeması sundular. (Kaya ve El_Sayed, 2004) klasik dönüşümleri kullanmadan denklemin tam çözümlerini ve herhangi bir ayrıştırma tekniği kullanmadan da sayısal çözümlerini elde ettiler. (İsmail ve Rabboh, 2004) denklemi çözmek için bir kısıtlayıcı Pade yaklaşımını kullandılar. (Mohammadi, 2012) denklemin spline çözümünü sundu. (Moghimi ve Hejazi, 2007) tarafından denklemin sayısal çözümü için varyasyonel

iterasyon yöntemi kullanıldı. (Chen, 2007) tarafından denklemin sayısal çözümleri sonlu farklar yöntemi ile elde edildi. (Zhao vd., 2012) pseudo-spektral yöntem kullanarak denklemin sayısal çözümlerini elde ettiler. (Zhang vd., 2012) tarafından lokal süreksiz Galerkin yöntemi kullanılarak denklemin sayısal çözümleri elde edildi. (Hammad ve El-Azab, 2015) denklemi çözmek için kollokasyon yöntemi ile kompakt sonlu fark şemasını kullandılar. (Wazzan, 2009) tarafından denklemin çözmek için bir tanh-coth yöntemi kullanıldı. (Macias-Diaz, 2019) tarafından difüzyon-reaksiyon denklemlerini çözmek için açık logaritmik sonlu fark şeması kullanıldı ve önerilen yöntemin çözümlerin pozitifliğini, sınırlılığını ve monotonluğunu koruyabildiği gösterildi.

Bu çalışmada ise genelleştirilmiş Burgers–Fisher denkleminin sayısal çözümlerini hesaplamak için açık logaritmik sonlu fark şeması kullanılmıştır. Yöntemin performansını test etmek için ele alınan model problem farklı parametrelerle incelenmiştir.

2. Materyal ve Yöntem

2.1. Model Problem

(1) denklemi ile verilen genelleştirilmiş Burgers–Fisher denklemini $0 \leq x \leq 1$ aralığında;

$$U(x, 0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{-\alpha \delta}{2(\delta + 1)} x \right] \right)^{1/\delta}$$

başlangıç şartı ve

$$U(0, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{\alpha \delta}{2(\delta + 1)} \left(\frac{\alpha}{(\delta + 1)} + \frac{\beta(\delta + 1)}{\alpha} \right) t \right] \right)^{1/\delta}, \quad t > 0,$$

$$U(1, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{-\alpha \delta}{2(\delta + 1)} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{(\delta + 1)} + \frac{\beta(\delta + 1)}{\alpha} \right) t \right) \right] \right)^{1/\delta} a$$

sınır şartları ile ele alalım. Bu problemin tam çözümü;

$$U(x, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{-\alpha \delta}{2(\delta + 1)} \left(x - \left(\frac{\alpha}{(\delta + 1)} + \frac{\beta(\delta + 1)}{\alpha} \right) t \right) \right] \right)^{1/\delta}$$

şeklinde dir.

2.2. Sayısal Yöntem

Bu kısımda model problemin sayısal çözümlerini hesaplamak için kullanılacak olan sayısal yöntem ele alınacaktır.

Model problemin çözüm bölgesinde $U(x,t)$ nin (x_i, t_n) düğüm noktasındaki sonlu fark yaklaşımını U_i^n ile gösterelim, burada $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$), $t_n = nk$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $h = \frac{1}{N}$ x -yönündeki bölüntü uzunluğu ve k zaman adımıdır. (1) denklemi ile verilen genelleştirilmiş Burgers–Fisher denkleminin bir sayısal çözümünü açık logaritmik sonlu fark yöntemi (A-LSFY) ile bulalım;

(1) denkleminde düzenleme yapılırsa;

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \beta U(1-U^\delta) - \alpha U^\delta \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\frac{F(U_i^{n+1}) - F(U_i^n)}{k} = \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_i^n \left(\beta U_i^n (1 - (U_i^n)^\delta) - \alpha (U_i^n)^\delta \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \right)$$

eşitliğinden

$$F(U_i^{n+1}) = F(U_i^n) + k \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_i^n \left(\beta U_i^n (1 - (U_i^n)^\delta) - \alpha (U_i^n)^\delta \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \right)$$

olarak elde edilir, burada k zaman adımıdır. $F(U) = e^U$ olarak alınırsa açık logaritmik sonlu fark şeması;

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \ln \left\{ 1 + k \left(\beta U_i^n (1 - (U_i^n)^\delta) - \alpha (U_i^n)^\delta \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \right) \right\} \quad (4)$$

şeklinde elde edilir.

2.3. Kararlılık Analizi

Sonlu fark şeması logaritmik olduğundan, inceleme şemadaki logaritmik terim Taylor serisine açılarak açıklanacaktır. (4) ile verilen sonlu fark şemasında logaritmik terim Taylor serisine açılır ve ikinci mertebeden türevden itibaren kesilirse (4) yaklaşımı

$$U_i^{n+1} = U_i^n + k \left(\beta U_i^n (1 - (U_i^n)^\delta) - \alpha (U_i^n)^\delta \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \right) \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. (5) yaklaşımının kararlılık analizi için von-Neumann yöntemi kullanılacaktır. Von-Neumann yöntemi sadece lineer fark denklemlerine uygulandığından (5) yaklaşımının kararlılığını

denklemi elde edilir. $F(U)$ herhangi bir sürekli türevlenebilir fonksiyon olmak üzere (2) denklemini $\frac{\partial F}{\partial U}$ türevi ile çarparsak;

$$\frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial U} \left(\beta U (1 - U^\delta) - \alpha U^\delta \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial U} \left(\beta U (1 - U^\delta) - \alpha U^\delta \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

denklemi elde edilir.

Burada $\frac{\partial F}{\partial t}$ türevi yerine ileri fark yaklaşımı ve $\frac{\partial U}{\partial x}$ ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevleri yerine merkezi fark yaklaşımları kullanılırsa (3) denkleminin sonlu fark yaklaşımı

incelemek için yaklaşımdaki $(U_i^n)^\delta$ değişkeni sabitmiş gibi kabul edilerek lineer olmayan terimler lineerleştirilir.

$(U_i^n)^\delta = \hat{U} = \text{sabit}$ olarak ele alınırsa, bu durumda (5) yaklaşımının lineer formu

$$U_i^{n+1} = U_i^n + k \left(\beta U_i^n (1 - \hat{U}) - \alpha \hat{U} \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \right) \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşıma von-Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. (6) yaklaşımında U_i^n yerine

$$U_i^n = \gamma^n e^{I\beta^* i h}, \quad I = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa güçlendirme faktörü

$$\gamma = 1 + k\beta(1 - \hat{U}) + \frac{2k}{h^2}(\cos \theta - 1) - \left(\frac{\alpha \hat{U} k}{h} \sin \theta \right) I$$

olarak elde edilir. Von-Neumann yönteminde kararlılık şartı $|\gamma| \leq 1$ olup (6) yaklaşımının kararlı olması için

$$h^4 - \left[h^2 + k\beta h^2 (1 - \hat{U}) + 2k(\cos \theta - 1) \right]^2 - \alpha^2 h^2 \hat{U}^2 k^2 \sin^2 \theta \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir, burada $\theta = \beta^* h$ dır.

3. Bulgular ve Tartışma

Model problemin sayısal çözümlerini hesaplamak için açık logaritmik sonlu fark yaklaşımı kullanıldı. Sonuçların doğruluğunu göstermek için aşağıdaki gibi tanımlanan mutlak hata kullanıldı:

$$\left| u(x_i, t_n) - U_N(x_i, t_n) \right|.$$

Burada u ve U_N sırasıyla tam çözümleri ve hesaplanan sayısal çözümleri göstermektedir.

Tablo 1–9 ve Şekil 1 farklı parametreler için model problemin sunulan yöntem ile hesaplanan sayısal çözümlerini göstermektedir. Tablo 1–8 ile verilen hesaplamalarda $h=0.01$ ve $k=10^{-5}$ olarak alınmıştır. Tablo 9 ile verilen hesaplamalar farklı h değerleri ve $k=10^{-5}$ için yapılmıştır. Şekil 1 ile sunulan grafikte $h=0.05$ ve $k=10^{-4}$ ve $k=10^{-5}$ olarak alınmıştır. Bütün hesaplamalarda h ve k değerleri yöntemin kararlılığını sağlayacak şekilde seçilmiştir. $\alpha=0.001$, $\beta=0.001$, $\delta=1$ değerleri için $t=0.005$, $t=0.001$, $t=0.01$ zamanlarında

hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması Tablo 1 ile sunulmuştur. Tablo 2 ile $\alpha=1$, $\beta=1$, $\delta=2$ değerleri için $t=0.0005$, $t=0.0001$, $t=0.001$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması Tablo 3 ile sunulmuştur. Tablo 4 ile $\alpha=1$, $\beta=0$, $\delta=2$ değerleri için $t=0.5$, $t=1$, $t=2$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması Tablo 5 ile sunulmuştur. $\alpha=1$, $\beta=0$, $\delta=3$ değerleri için $t=0.0005$, $t=0.0001$, $t=0.001$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması Tablo 5 ile sunulmuştur. $\alpha=1$, $\beta=0$, $\delta=3$ değerleri için

$t=0.5$, $t=1$, $t=2$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması Tablo 6 ile sunulmuştur. Tablo 7 ile $\alpha=0.01$, $\beta=10$, $\delta=1$ değerleri için $t=0.1$, $t=0.5$, $t=1$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması sunulmuştur. Tablo 8 ile $\alpha=0.001$, $\beta=1$, $\delta=1$ değerleri için $t=0.01$, $t=0.1$, $t=1$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması sunulmuştur. Tablolardan da görüleceği üzere A-LSFY ile hesaplanan sayısal çözümler ve tam çözümler birbirine oldukça yakın ve mutlak hatalar oldukça küçüktür. Ayrıca genel anlamda A-LSFY ile hesaplanan mutlak hatalar

ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan mutlak hatalardan çok daha küçüktür. Tablo 9 ile $\alpha=1$, $\beta=1$, $\delta=1$ değerleri için $t=0.1$ zamanında farklı h değerleri için hesaplanan mutlak hataların karşılaştırılması sunulmuştur. Tablodan h değerleri küçüldükçe yani bölüntü sayısı arttıkça hesaplanan mutlak hataların azaldığı açıkça görülmektedir. $\alpha=1$, $\beta=0$, $\delta=1$ değerleri için $t=1$ zamanında $h=0.05$ olmak üzere $k=0.0001$ ve $k=0.00001$ değerleri için hesaplanan mutlak hataların karşılaştırılması Şekil 1 ile sunulmuştur. Grafikten k değeri küçüldükçe hesaplanan mutlak hatanın azaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 1. $\alpha=0.001$, $\beta=0.001$, $\delta=1$ değerleri için $t=0.005$, $t=0.001$, $t=0.01$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	Tam Çözüm	A-LSFY	ADM (İsmail vd., 2004)	Mutlak Hata A-LSFY	Mutlak Hata ADM (İsmail vd., 2004)
0.1	0.005	0.499989	0.499989	0.499979	1.606826E-12	9.68763E-6
	0.001	0.499988	0.499988	0.499986	0.737188E-12	1.93753E-6
	0.01	0.499990	0.499990	0.499971	1.218747E-12	1.93752E-5
0.5	0.005	0.499939	0.499939	0.499929	0.043410E-12	9.68691E-6
	0.001	0.499938	0.499938	0.499936	0.015821E-12	1.93738E-6
	0.01	0.499940	0.499940	0.499921	0.364042E-12	1.93738E-5
0.9	0.005	0.499889	0.499889	0.499879	2.598760E-11	9.68619E-6
	0.001	0.499888	0.499888	0.499886	2.105649E-12	1.93724E-6
	0.01	0.499890	0.499890	0.499871	3.928702E-11	1.93724E-5

Tablo 2. $\alpha=1$, $\beta=1$, $\delta=2$ değerleri için $t=0.0005$, $t=0.0001$, $t=0.001$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	Tam Çözüm	A-LSFY	ADM (İsmail vd., 2004)	Mutlak Hata A-LSFY	Mutlak Hata ADM (İsmail vd., 2004)
0.1	0.0005	0.695426	0.695426	0.694024	3.314120E-10	1.40177E-3
	0.0001	0.695266	0.695266	0.694986	2.648670E-11	2.80396E-4
	0.001	0.695625	0.695625	0.692822	5.846127E-10	2.80301E-3
0.5	0.0005	0.646297	0.646297	0.644952	2.295709E-10	1.34526E-3
	0.0001	0.646130	0.646130	0.645861	4.297673E-11	2.69094E-4
	0.001	0.646506	0.646506	0.643816	4.578261E-10	2.69000E-3
0.9	0.0005	0.595481	0.595481	0.594204	6.253483E-10	1.27699E-3
	0.0001	0.595311	0.595311	0.595055	9.366496E-11	2.55438E-4
	0.001	0.595695	0.595695	0.593141	3.064794E-9	2.55346E-3

Tablo 3. $\alpha=1, \beta=0, \delta=1$ değerleri için $t=0.5, t=1, t=2$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	Tam Çözüm	A-LSFY	ADM (İsmail vd., 2004)	Mutlak Hata A-LSFY	Mutlak Hata ADM (İsmail vd., 2004)
0.1	0.5	0.518741	0.518741	0.518741	7.956768E-9	6.34216E-8
	1	0.549834	0.549834	0.549832	8.272271E-9	2.02886E-6
	2	0.610639	0.610640	0.610575	8.107702E-9	6.42801E-5
0.5	0.5	0.468791	0.468791	0.468791	4.278497E-8	5.66705E-8
	1	0.500000	0.500000	0.499998	4.276632E-8	1.84710E-6
	2	0.562177	0.562176	0.562116	3.986363E-8	6.06928E-5
0.9	0.5	0.419458	0.419458	0.419458	7.669116E-8	4.12803E-8
	1	0.450166	0.450166	0.450165	7.838936E-8	1.37967E-6
	2	0.512497	0.512497	0.512450	7.931240E-8	4.75268E-5

Tablo 4. $\alpha=1, \beta=0, \delta=2$ değerleri için $t=0.5, t=1, t=2$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	Tam Çözüm	A-LSFY	ADM (İsmail vd., 2004)	Mutlak Hata A-LSFY	Mutlak Hata ADM (İsmail vd., 2004)
0.1	0.5	0.714919	0.714919	0.714919	4.561336E-9	1.2582E-8
	1	0.734037	0.734037	0.734037	4.201912E-9	3.92716E-7
	2	0.770284	0.770284	0.770272	3.042091E-9	1.18631E-5
0.5	0.5	0.666837	0.666837	0.666837	3.462662E-8	1.49108E-8
	1	0.687205	0.687205	0.687205	3.259012E-8	4.75239E-7
	2	0.726464	0.726464	0.726449	2.684284E-8	1.49888E-5
0.9	0.5	0.616567	0.616567	0.616567	7.711004E-8	1.35468E-8
	1	0.637701	0.637701	0.637701	7.622775E-8	4.39435E-7
	2	0.679109	0.679109	0.679095	7.294274E-8	1.43600E-5

Tablo 5. $\alpha=1, \beta=0, \delta=3$ değerleri için $t=0.0005, t=0.0001, t=0.001$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümler ve ADM (İsmail vd., 2004) ile hesaplanan sayısal çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	Tam Çözüm	A-LSFY	ADM (İsmail vd., 2004)	Mutlak Hata A-LSFY	Mutlak Hata ADM (İsmail vd., 2004)
0.1	0.0005	0.783670	0.783670	0.784115	3.307670E-10	4.45320E-4
	0.0001	0.783660	0.783660	0.784106	3.428446E-11	4.46379E-4
	0.001	0.783683	0.783683	0.784127	5.961204E-10	4.43997E-4
0.5	0.0005	0.741296	0.741296	0.743150	3.748113E-11	1.85474E-3
	0.0001	0.741285	0.741285	0.743145	0.730005E-11	1.86057E-3
	0.001	0.741309	0.741309	0.743157	7.491985E-11	1.84746E-3
0.9	0.0005	0.696169	0.696169	0.697089	1.900808E-10	9.19582E-4
	0.0001	0.696157	0.696157	0.697089	1.203637E-11	9.31803E-4
	0.001	0.696183	0.696183	0.697088	2.031043E-9	9.04297E-4

Tablo 6. $\alpha=1$, $\beta=0$, $\delta=3$ değerleri için $t=0.5$, $t=1$, $t=2$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	Tam Çözüm	A-LSFY	Mutlak Hata
0.1	0.5	0.796173	0.796173	2.093267E-9
	1	0.808297	0.808297	1.709111E-9
	2	0.831283	0.831283	0.693406E-9
0.3	0.5	0.775970	0.775970	2.941145E-9
	1	0.788709	0.788709	1.762580E-9
	2	0.813031	0.813031	1.204336E-9
0.5	0.5	0.754870	0.754870	2.539852E-8
	1	0.768157	0.768157	2.347779E-8
	2	0.793701	0.793701	1.865982E-8
0.7	0.5	0.732997	0.732997	4.731525E-8
	1	0.746752	0.746752	4.538531E-8
	2	0.773379	0.773379	4.044136E-8
0.9	0.5	0.710485	0.710485	6.713537E-8
	1	0.724622	0.724622	6.591512E-8
	2	0.752176	0.752176	6.262941E-8

Tablo 7. $\alpha=0.01$, $\beta=10$, $\delta=1$ değerleri için $t=0.1$, $t=0.5$, $t=1$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması.

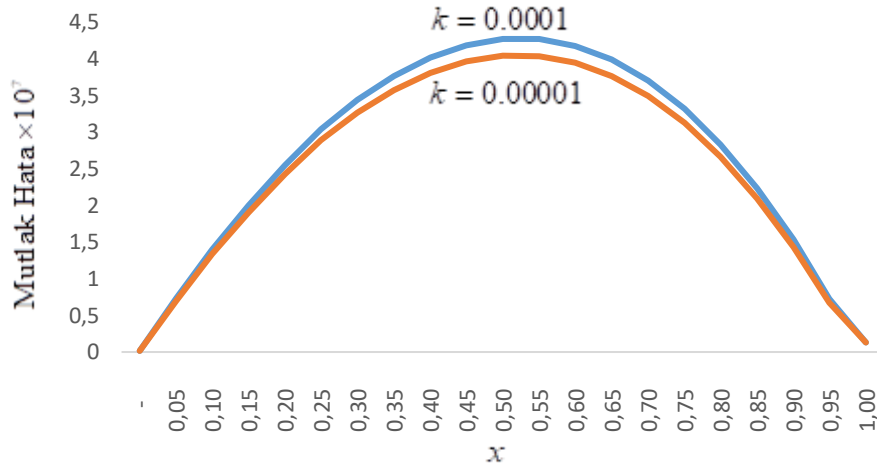
x	t	Tam Çözüm	A-LSFY	Mutlak Hata
0.1	0.1	0.730961	0.730961	2.262728E-7
	0.5	0.993304	0.993304	1.361508E-7
	1	0.999955	0.999955	1.009127E-9
0.3	0.1	0.730764	0.730764	3.258575E-7
	0.5	0.993297	0.993298	3.164527E-7
	1	0.999955	0.999955	2.371977E-9
0.5	0.1	0.730567	0.730568	3.103679E-7
	0.5	0.993291	0.993291	3.761527E-7
	1	0.999954	0.999954	2.828615E-9
0.7	0.1	0.730370	0.730371	3.222722E-7
	0.5	0.993284	0.993284	3.170624E-7
	1	0.999954	0.999954	2.376637E-9
0.9	0.1	0.730173	0.730174	2.231991E-7
	0.5	0.993277	0.993277	1.366686E-7
	1	0.999954	0.999954	1.013045E-9

Tablo 8. $\alpha = 0.001$, $\beta = 1$, $\delta = 1$ değerleri için $t = 0.01$, $t = 0.1$, $t = 1$ zamanlarında hesaplanan sayısal çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	Tam Çözüm	A-LSFY	Mutlak Hata
0.1	0.01	0.502487	0.502487	2.233712E-9
	0.1	0.524967	0.524967	9.190670E-9
	1	0.731049	0.731049	4.779049E-9
0.3	0.01	0.502462	0.502462	3.070821E-9
	0.1	0.524942	0.524942	1.918095E-8
	1	0.731029	0.731029	1.726217E-8
0.5	0.01	0.502437	0.502437	3.101815E-9
	0.1	0.524917	0.524917	2.226644E-8
	1	0.731009	0.731009	2.127271E-8
0.7	0.01	0.502412	0.502412	3.080772E-9
	0.1	0.524892	0.524892	1.923272E-8
	1	0.730990	0.730990	1.722365E-8
0.9	0.01	0.502387	0.502387	2.273457E-9
	0.1	0.524867	0.524867	9.263809E-9
	1	0.730970	0.730970	4.723208E-9

Tablo 9. $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\delta = 1$ değerleri için $t = 0.1$ zamanında farklı h değerleri için hesaplanan mutlak hataların karşılaştırılması.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$
0.1	3.952435E-7	1.124855E-7	4.020587E-8	1.886378E-8	1.877550E-8
0.2	6.953568E-7	1.981314E-7	6.876877E-8	3.043500E-8	2.703848E-8
0.3	9.080844E-7	2.589778E-7	8.829286E-8	4.746119E-8	3.933035E-8
0.4	1.042711E-6	2.955591E-7	1.000834E-7	6.650431E-8	5.775459E-8
0.5	1.100919E-6	3.103840E-7	1.079557E-7	8.207831E-8	7.306965E-8
0.6	1.077955E-6	3.028156E-7	1.189045E-7	9.027671E-8	8.506660E-8
0.7	9.707868E-7	2.706320E-7	1.207511E-7	9.786022E-8	9.313151E-8
0.8	7.665089E-7	2.099195E-7	1.117996E-7	9.994241E-8	9.616431E-8
0.9	4.463697E-7	1.151769E-7	8.969949E-8	9.481965E-8	9.257169E-8



Şekil 1. $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\delta = 1$ değerleri için $t = 1$ zamanında farklı k değerleri için hesaplanan mutlak hataların karşılaştırılması.

4. Tartışma ve Sonuçlar

Bu çalışmada, geliştirilmiş Burgers–Fisher denklemini çözmek için açık logaritmik sonlu fark yöntemi tanımlandı. Ele alınan model problem için sayısal çözümler verildi. Sonuçlar, açık logaritmik sonlu fark yönteminin tek boyutlu geliştirilmiş Burgers–Fisher denkleminin sayısal çözümünü için yüksek doğruluk sağladığını göstermiştir.

Kaynaklar

- Chen, X.Y., 2007. Numerical Methods for the Burgers–Fisher Equation. Master Thesis, University of Aeronautics and Astronautics, China.
- Golbabai, A. ve Javidi, M., 2009. A Spectral Domain Decomposition Approach for the Generalized Burgers–Fisher Equation. *Chaos Solitons and Fractals*, 39, 385–392.
- Hammad, D.A. ve El-Azab, M.S., 2015. 2N Order Compact Finite Difference Scheme with Collocation Method for Solving the Generalized Burger’s–Huxley and Burger’s–Fisher Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 258, 296–311.
- İsmail, H.N.A., Raslan, K. ve Rabboh, A.A.A., 2004. Adomian Decomposition Method for Burgers–Huxley and Burgers–Fisher Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 159, 291–301.
- İsmail, H.N.A. ve Rabboh, A.A.A., 2004. A Restrictive Pade Approximation for the Solution of the Generalized Fisher and Burgers–Fisher

Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 154, 203–210.

Javidi, M., 2006. Spectral Collocation Method for the Solution of the Generalized Burger–Fisher Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 174, 45–352.

Kaya, D. ve El_Sayed, S.M., 2004. A Numerical Simulation and Explicit Solutions of the Generalized Burger–Fisher Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 152, 403–413.

Macias-Diaz, J.E., 2019. On the Numerical and Structural Properties of a Logarithmic Scheme for Diffusion–Reaction Equations. *Applied Numerical Mathematics*, 140, 104–114.

Mickens, R.E. ve Gumel, A.B., 2002. Construction and Analysis of a Non-Standard Finite Difference Scheme for the Burgers–Fisher Equation. *Journal of Sound and Vibration*, 257 (4), 791–797.

Mittal, R.C. ve Tripathi, A., 2015. Numerical Solutions of Generalized Burgers–Fisher and Generalized Burgers–Huxley Equations Using Collocation of Cubic B -splines. *International Journal of Computation Mathematics*, 92, 1053–1077.

Moghimi, M. ve Hejazi, F.S.A., 2007. Variational Iteration Method for Solving Generalized Burger–Fisher and Burger Equations. *Chaos Solitons and Fractals*, 33, 1756–1761.

Mohammadi, R., 2012. Spline Solution of the Generalized Burgers’-Fisher Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 91, 2189–2215.

Wazwaz, A.M., 2005. The Tanh Method for Generalized Forms of Nonlinear Heat Conduction and Burgers–Fisher Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 169, 321–338.

Wazzan, L., 2009. A Modified Tanh–Coth Method for Solving the General Burgers–Fisher and the Kuramoto–Sivashinsky Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 2642–2652.

Zhang, R., Yu, X. ve Zhao, G., 2012. The Local Discontinuous Galerkin Method for Burger’s–Huxley and Burger’s–Fisher Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 8773–8778.

Zhao, T., Li, C., Zang, Z. ve Wu Y., 2012. Chebyshev–Legendre Pseudo-Spectral Method for the Generalised Burgers–Fisher Equation. *Applied Mathematical Modelling*, 36, 1046–1056.