Felsefe Arkivi
Archives of Philosophy

İSTANBUL UNIVERSITY PRESS

Felsefe Arkivi - Archives of Philosophy, Sayı/Issue: 52, 2020
DOI: 10.26650/arcp2020-007

Araştırma Makalesi / *Research Article*

Hilbert, Matematiğin Temelleri ve Görü

Hilbert, Foundations of Mathematics and Intuition

Özgüç Güven[1]

[1]Doç. Dr., İstanbul Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü, İstanbul, Türkiye

ORCID: Ö.G. 0000-0001-7223-0356

Sorumlu yazar/Corresponding author:
Özgüç Güven,
İstanbul Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi,
Felsefe Bölümü, İstanbul, Türkiye
E-mail/E-posta: ozguc@istanbul.edu.tr

Başvuru/Submitted: 23.03.2020
Revizyon Talebi/Revision Requested: 08.04.2020
Son Revizyon/Last Revision Received: 15.04.2020
Kabul/Accepted: 03.05.2020

Atıf/Citation:
Guven, Ozguc. (2020). "Hilbert, Matematiğin Temelleri ve Görü" *Felsefe Arkivi- Archives of Philosophy, 52*: 113-149.
https://doi.org/10.26650/arcp2020-007

ÖZET

David Hilbert matematiği temellendirmek için Hilbert Programı olarak bilinen yaklaşımını 1920'li yılların başında öne sürer. Bu programın amacı aksiyomlara dayalı temelde kalarak matematiğin tutarlılığının sonlucu yöntemle gösterilmesidir. Böylece matematiğin temellerine ilişkin bilmeceler ve çelişkiler çözülebilecektir. Hilbert tüm matematiği, aksiyomlara dayalı sonlu adımda tutarlı olarak biçimselleştirmeyi bir kanıt kuramı geliştirme çabası olarak ele alır. Öyle ki, sonsuzlukla ilgili olanlar da içerilmek üzere bir matematiksel dizgede ortaya çıkabilecek her türlü sorun ortadan kalkacaktır. Hilbert programının başlangıcına sonlu sayıda im ve bunlara ilişkin kuralları koyar. Buradan içinde ideal nesnelerin de bulunduğu bir üst-matematiğe geçer. Hilbert'in söz konusu programı geliştirmesi 1899 yılında yayınladığı eseri *Geometrinin Temelleri'nden* başlayıp çeşitli gelişim aşamalarından geçerek 1931'deki eseri *Temel Sayı Kuramının Temellendirilmesi'ne* kadar sürer. Çalışmamızda anılan dönemdeki metinler üzerinden Hilbert'in matematiği temellendirişinin evrelerini ortaya koyup özellikle sayıyı hangi zeminde kurduğu üzerinde odaklanacağız. Önesüreceğimiz sav ise bu temellendirme süreçlerinde Hilbert'in görü temelli bir kavrayışı hep sürdürdüğüdür. Bir başka deyişle Hilbert sayının temellendirilmesini olanaklı kılan her türlü mantıksal çıkarımı önceleyen görüsel bir kavrayışı savunmaktadır. Bu durum hiç kuşkusuz Hilbert'in ne türlü biçimselcilikle ilgisi olduğu açısından son derece belirleyicidir. Her ne kadar Hilbert, kendisini hiçbir çalışmasında biçimselci olarak tanımlamamış olsa da Brouwer'in kendisine yönelik eleştirilerinden dolayı biçimselci olarak anılmıştır. Görüye ilişkin vurgusu, Hilbert'le ilişkilendirilebilecek bir biçimselciliğin salt imlerin oyunu olarak değerlendirilemeyeceğini ortaya koyar. Bu bağlamda çalışmamız Hilbert'in aksiyomlara dayalı dizgeler, mantık ve görü arasında ne türden bağıntılar kurduğunu da açımlayacaktır.

Anahtar Kelimeler: Hilbert, biçimselcilik, görü, sayı, mantık, aksiyomatik yöntem

ABSTRACT

David Hilbert proposed his well-known Hilbert Program in the early 1920s for foundations of mathematics. The purpose of his program was to prove the consistency of mathematics by using the finitary methods and relying on axiomatic

system. Thus, riddles and paradoxes related with the foundations of mathematics could be solved. Hilbert considers, formalizing whole mathematics in a consistent finite way depending on axioms, as an effort to develop a proof theory. So much so that any problems which may occur in a mathematical system, including those related to infinity, will be solved. Hilbert begins with finite number of signs and rules and then proceeds to develop various proved consistent statements. From there, he continues to a higher-order mathematics that includes ideal objects. Hilbert's development of the program started in 1899 with the *Foundations of Geometry, and completed by The Grounding of Elementary Number Theory* in 1931. In this paper, we will exhibit the various stages and attempts of Hilbert to found the numbers. Our thesis states that Hilbert has always maintained an intuitive apprehension in these foundational attempts i.e. Hilbert advocates intuitional insight prior to any logical inference that makes it possible to found the numbers. Although Hilbert did not define himself as a formalist in any of his works, he was named as a formalist because of Brouwer's criticism of him. Hilbert's emphasis on intuition reveals that a kind of formalism which is a mere play of signs can be associated with him. In this paper, we will also deal with the relations Hilbert established between signs, axioms, logic and intuition.
Keywords: Hilbert, formalism, number, intuition, logic, axiomatic method

Giriş

19. yüzyıl boyunca ve 20. yüzyıl başlarında matematik ve mantık felsefesinde, kökensel tartışmalar ve dönüşümler gerçekleştiği görülür. 1870'lerde Eukleides-dışı geometrilerin ortaya çıkışı, aksiyom ve görü tartışmaları, 1900'lerin başında *naive* küme kuramı, sürey varsayımı, ardından aksiyomatik küme kuramları, yeni mantık çeşitleri, kanıt kuramı matematik ve mantıktaki söz konusu dönüşümlerin taşıyıcı tartışmalarıdır. David Hilbert (1862-1943) tüm bu tartışmalarda ana eksende yer alır. Dolayısıyla 20. yüzyılın başlarında Hilbertsiz bir felsefe düşünülemez. Ne var ki, Hilbert'in bu tarih içindeki konumu kimi bakımlardan yanlış anlaşılmış görünmektedir. Hilbert'in biçimselcilik anlayışı, onun görü kavrayışından kopartılarak, imlerin yalnızca sözdizimsel kurallar uyarınca düzenlenmesine indirgenmiştir. Böylesi bir bakış açısının yerleşmesinde Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)'in 1927'deki eseri *Biçimselcilik Üstüne İncelemeler'in (Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus)* payı bulunur. Bu çalışmasında Brouwer, bizim de aşağıda inceleyeceğimiz Hilbert'in *Matematiksel Problemler (Mathematische Probleme)*, *Aritmetiğin ve Mantığın Temelleri Üstüne* (*Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*), *Aksiyomatik Düşünce* (*Axiomatische Denken*), *Matematiğin Yeni Temeli* (*Neubegründung der Mathematik*), *Matematiğin Mantıksal Temelleri (Die Logischen Grundlagen der Mathematik)*, *Sonsuzluk Üstüne* (*Über das Unendliche*) eserleri bağlamında onu biçimselci olarak konu etmektedir. Brouwer açısından Hilbert'in matematiği, tam-deyimlerin (*Formel*) bir öbeği olarak ele alması onu bir biçimselci yapmaktadır[1]. Üstelik Brouwer *Sürey'in Yapısı* (*Die Struktur des Kontinuums*) adlı çalışmasında da Hilbert'i, Richard Dedekind (1831-1916), Giuseppe Peano (1858-1932), Bertrand Russell (1872-1970) ve Ernst Zermelo'yla (1871-1953) birlikte anarak hepsini biçimselci olarak niteleyip şöyle demektedir: "bu kişiler, herhangi bir geometrik ya da aritmetik görüyü **bütünüyle dışlar** [vurgu benim] ve araştırma nesnelerini yalnızca matematiksel dille sınırlandırır"[2]. Bu değerlendirmeler sonrasında Hilbert'in

1 L E J Brouwer, "Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus", *KNAW Proceedings* 31 (1928), 375.
2 L E J Brouwer, "Die Struktur des Kontinuums", içinde *Collected Works I, Philosophy and Foundations of Mathematics*, 1975, 430.

biçimselciliği yaygın bir yanılgıyla salt imlerle oynanan bir oyun biçimselciliği olarak görülmüştür. Oysa Hilbert kendini asla salt biçimselci olarak görmediği gibi, matematik ve mantık felsefesinde bulunduğu konum yalnızca imlerin düzenlenişi yoluyla anlaşılamaz. Hilbert yapıtlarında güçlü bir biçimde, kendine göre düzenlediği görüyü bir bilgi kaynağı olarak ortaya koymaktadır. Bir başka deyişle, Hilbert'in matematiği temellendirme çabasından görü kopartılamaz. Bu savımızın gerekçelerini gösterebilmek için çalışmamızda geniş bir çerçeve çizeceğiz. Hilbert'in 1899'dan 1931'e kadar ortaya koyduğu yapıtları, Brouwer'in yukarıda anmadıklarını da içerecek şekilde inceleyip, buralardaki temel tartışmaları serimleyeceğiz. Böylelikle, Hilbert'in matematiğin temellerini güvence altına alma çabasının aşamalarını izleyip bu aşamalarda görünün yerini vurgulama olanağına ulaşacağız. Çalışmamıza ilkin Hilbert öncesindeki kanıt tartışmalarını ele alarak Hilbert'in matematiği sağın temellendirebilmek için geleneksel aksiyom anlayışını nasıl değiştirdiğini göstererek başlıyoruz.

Hilbert Öncesinde Matematikte Kanıt Tartışmaları

18. yüzyılda matematikçilerin önemli sorunlarından biri matematiğin temelleri ve matematiksel analizdir. Matematiksel kanıtın yapısı hakkında soruşturmalar, geometrinin durumunu ve matematiksel kesinlik açısından yerini tartışmaya açar. Leonhard Euler'in (1707-1783) çabalarıyla matematiksel analiz[3] geometrik yorumlanışından uzaklaştırılarak cebirsel bir yaklaşımla ele alınır. Daha sonra Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) özellikle 1788 yılında *Analitik Mekanik* (*Mechanique Analitique)* adlı çalışmasında matematiksel kesinlik elde etmek için geometriden uzak durmak gerektiğini öne sürer. Öyle ki, Euler ve Lagrange tek bir geometrik şekil kullanmadan matematiksel analiz ve sonsuz küçükler hesabı hakkında kitaplar yazar.[4] Bu durum, analiz ve sonsuz küçükler hesabının öncüleri olan Isaac Newton (1643-1727) ile Gottfried Wilhelm Leibniz'in (1646-1716) konuya yaklaşımından ayrıdır. Newton ve Leibniz görü temelli bir geometri anlayışı sergiler. Onlardan sonra Immanuel Kant (1724-1804) uzay ve zaman görüsünü matematik yapabilmenin temeline koyar. Kant, felsefi bilgi ile matematiksel bilgiyi birbirinden ayırarak felsefi kavramların çözümlemeye, matematiksel kavramların ise yapılandırmaya / inşa edilmeye dayandığını belirtir.[5] Bundan dolayı Kant açısından geometrik bir kanıt, çıkarım zincirlerine dayanmakla birlikte görü zemininde ilerler. Görüde sergilenebilir olmak, geometriyi salt kavramsal ya da deneysel olmaktan ayıran bir yandır. Böylece Kant, Eukleides geometrisinde ortaya çıkan tümcelerin *sentetik a priori* yargılar olduğunu öne sürer. Kant'ın Eukleides geometrisi ile kendi görü kavrayışı arasında kurduğu bu ilgi bir dönemin geometri tartışmalarının odağı durumuna gelir.

19. yüzyılla birlikte matematiksel kanıt düşüncesi önemli değişikliklere uğrar. Yaklaşık aynı zamanlarda Bernhard Riemann (1826-1866), János Bolyai (1802-1860), Nikola Lobachevsky (1792-1856) ve Carl Friedrich Gauss (1777-1856) Eukleidesçi olmayan tutarlı

3 Matematiksel analiz, matematiğin kalkülüs/sonsuz küçükler hesabı, diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz dallarını içeren sürekli fonksiyonlarla ilgilenen dalıdır. Özellikle, eğrilerdeki eğimler olarak niceliklerin değişimi ve buralardaki nesnelerin uzunluğu, alanı ve hacmini konu eder.

4 C. H. Jr. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (New York: Springer, 1979), 329.

5 Immanuel Kant, *Kritik Der Reinen Vernunft* (Hamburg: Felix Meiner, 1956), A711/B739, A713/B741.

geometriler hakkında çalışmalar ortaya koyarak geometrik bilginin yapısı hakkında tartışmaları alevlendirir. Tartışmanın çıkış noktası 5. postulatın yeterince açık olmadığı gerekçesiyle bir teorem olarak kanıtlanma çabasıdır. Anılan geometriciler ise postulatın bağımsız olduğunu ve başka önermelerden türetilemeyeceğini ortaya koyarlar. Burada dikkat çekici nokta postulatın farklı biçimlerde yorumlanabilmesi ve doğruluk değerinin değişmesidir. Bu noktayı Hilbert'in aksiyomlara bakış açısını konu ettiğimizde yeniden ele alacağız.

Bu dönemdeki önemli bir ilgi Jean Poncelet (1788-1867) eliyle geliştirilen izdüşümsel geometriye[6] (*projective geometry*) yöneliktir[7]. İzdüşümsel geometri çeşitli geometri türlerini birleştirebilecek bir olanak olarak görülür. Öyle ki, Arthur Cayley (1821-1895) geliştirilen izdüşümsel geometri için "tüm geometrilerin geometrisi"[8] demektedir. Çalışmamız açısından bu tartışmaların bağlamı kanıt anlayışının gelişim aşamalarını göstermektir. Bu gelişim içinde Hilbert'le bağlantısı açısından öne çıkan bir başka isim Moritz Pasch'tır (1843-1930). 1882 yılında Pasch izdüşümsel geometrinin aksiyomlarını ve teoremlerini ortaya koyar. Bu yolla Pasch aynı zamanda Eukleides geometrisindeki, örtük varsayımları ve mantıksal boşlukları giderme çabasındadır. Sözgelimi Pasch düzlemdeki noktaların dizilişi ve ayrılışına yönelik Eukleides geometrisine eklenecek aksiyomlar önerir.[9] Bunun yanı sıra geometride ortaya konulan tüm sonuçların hiçbir şekle başvurmadan aksiyomlardan sıkı mantıksal biçimde türetilebilmesi gerektiğini savunur.[10] Böylece Pasch, geometrik kanıt anlayışını saf mantıksal bir aşamaya taşır. Teorem kanıtlarının mantıksal düzeyde olması gerektiğini bildirmesine karşın Pasch, aksiyomların türetilişinin deneyime dayandığını öne sürer. Pasch şöyle demektedir[11]:

> Temel önermeler onlara karşılık gelen şekiller [Figur] olmadan anlaşılmaz. Bunlar gözlemleneni, kesin, çok basit şekiller aracılığıyla ifade eder. Öğretinin önermeleri [teoremler] gözlemler yoluyla temellendirilmez fakat kanıtlanabilir. Kanıtlama sırasındaki her çıkarım şekilde onaylanmalı [Bestätigung finden], yine de şekil yoluyla değil ama önceki belirli tümce yoluyla (ya da tanım yoluyla) gerekçelendirilmelidir.

Demek ki, önermeler birbirlerine mantıksal çıkarımla bağlı olduğunda kanıtlama söz konusudur.

6 İzdüşümsel geometri, resimde perspektifin kullanılmasını sağlayan, betimleyici ya da konum geometrisi olarak da anılan, izdüşüm olduğunda bir geometrik şeklin değişmeyen özelliklerini araştıran geometri dalıdır.

7 Thomas Q. Sibley, *Thinking Geometrically A Survey of Geometries* (Washington: The Mathematical Association of America, 2015): 318.

8 Garret Sobczyk, *New Foundations in Mathematics: The Geometric Concept of Number* (New York: Birkhäuser, 2013), 297.

9 Michael Hvidsten, *Exploring Geometry* (Boca Raton: CRC Press, 2016), 66.

10 Moritz Pasch, *Vorlesungen Über Neuere Geometrie* (Leipzig: B. G. Teubner, 1882), 99.

11 Pasch, *Vorlesungen Über Neuere Geometrie*, 43.

Hilbert'in aşağıda ele alacağımız *Geometrinin Temelleri* eserini yazmadan önce 1894 yılında verdiği derslerde geometriyi bir doğa bilimi olarak ele aldığı görülür.[12] Buna göre geometrinin görevi, bilimlerde olduğu gibi, mantıksal bağıntılarla ilişkilendirilmiş bir dizi kavramı alan geometrik olguları betimlemek ve düzenlemektir. Geometrik olgular şeylerin dışsal biçimlerini belirleyen olgulardır. Pasch da aksiyomlara dayalı mantıksal çıkarımlarla ilerleyen bir geometri tasarlamış olsa da, geometriyi doğa biliminin bir parçası olarak görmüştür.[13] Şöyle demektedir:

> Matematik, deneyim olgularına karşılık geldiği varsayılan matematiksel kavramlar arasında bağlar kurar. Ne var ki büyük çoğunluğu deneyimden dolaysızca alınmaz bundansa "kanıtlanır" [bewiesen werden].[14]

Bu noktada Hilbert, temel önermelerin deneyim yoluyla kazanıldığını önermesi bakımından Pasch'tan etkilenmiş görünmektedir. Pasch'tan farklı olaraksa aksiyomların bağımsız ve tam olması gerektiği üzerinde durur.

Pasch'ın tüm bu ortaya koydukları geometride şekillerin kanıtlama zincirlerindeki yerini kuşkulu duruma getirir. Bunun yanı sıra çıkarım zincirlerinde etkisi olmasa bile deneyim yoluyla kavramların verildiğini ileri sürmesi Hilbert'i etkilemiş görünmektedir. 1898/99 mekanik üstüne derslerinde şunları yazar[15]:

> Geometri de doğanın gözlenmesinden deneyim yoluyla doğar. Bu noktaya kadar o bir deneysel bilimdir…Fakat deneysel temelleri öylesine çürütülemez ve yaygın benimsenmiş, öyle bir dereceye kadar onaylanmışlar ki, daha fazla kanıt istenmez. Dahası, tüm gerekli olan bu temelleri az sayıda bağımsız aksiyom kümesinden türetmek ve saf mantıksal yolla geometrinin tüm yapısını yapılandırmaktır. Bu yolla geometri saf bir matematiksel bilime dönüşür.

Anlaşılacağı üzere Hilbert, Pasch'ın deneysel temelleri olan ancak işleyişi kanıtlama ve mantıksal bağıntılara dayanan geometri anlayışını benimsemiştir. Çalışmamızın ilerleyen bölümlerinde göstereceğimiz gibi Hilbert kanıt kuramı geliştirmesine karşın geometrinin gerisinde bir verilmişlik olduğuna ilişkin tavrını değiştirmeyecektir. Bu bakımdan ilk metinlerinden beri onun biçimselciliği bu verilmişliği göz önünde tutarak ele alınmalıdır. Öte yandan Hilbert, Pasch'ın çıkarım zincirlerinin sağlam ve örtük öncülsüz olması çabasını sürdürerek *Geometrinin Temelleri'nde* sıralama ve arasındalık aksiyomlarını Pasch'tan alacaktır.[16]

Kanıt kuramı açısından 19. yüzyıldaki önemli bir başka gelişme matematiksel analizin temellerinin aritmetiksel bir çerçevede ele alınmasıdır. Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) ve Dedekind görüye dayanan kavramları

12 Joan Roselló, "*Hilbert, Göttingen and the Development of Modern Mathematics*" (New Castle: Cambridge Scholars Publishing, 2019, 37.

13 Pasch, *Vorlesungen Über Neuere Geometrie*, III.

14 Pasch, *Vorlesungen Über Neuere Geometrie*, 17.

15 Leo Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* (Basel: Birkhäuser Basel, 2004), 158.

16 Hvidsten, *Exploring Geometry,* 66.

ve çıkarımları eleyip yerlerine temel önermeleri ve tanımları koymak ister. Bu çerçevede bir dönüm noktası Giuseppe Peano'dur. Peano, matematiksel kanıtlamaların bütünüyle biçimsel ele alınışına izin verecek yapay bir dil geliştirmek ister. 1889 yılında aritmetiğe böylesi bir dili uygulayarak doğal sayılar için aksiyomları elde eder. Peano'dan sonra bir başka dikkate değer kişi Mario Pieri'dir (1860-1913). Pieri, geometriyi, teoremlerin koşullu öncüllerden türetildiği ve temel kavramların görü ya da deneyimle bağının olmadığı saf mantıksal bir dizge olarak görür. Hilbert öncesinde özellikle 19. yüzyıl mantıkçıları açısından tutarlılık anlambilimsel bir kavrayış olarak anlaşılır.[17] Örneğin Dedekind, doğal sayılar hakkındaki ünlü çalışmasında, basit sonsuz dizge kavrayışının içsel çelişkiler içermediğini öne sürer.[18] Hilbert ise tutarlılığı sözdizimsel bir sorun olarak ele alır.

Geometrinin Temelleri

Yukarıda ele aldığımız gelişmeler sonrasında Hilbert, 1899 yılında ortaya koyduğu *Geometrinin Temelleri (Grundlagen der Geometrie)*[19] adlı eseriyle izdüşümsel geometrinin temel sonuçlarının mantıksal bağıntılarına yönelik kapsamlı bir çözümleme sunar. Pasch'tan esinle mantıksal bağıntılara odaklanan yaklaşımı şekillerin geometride kurucu işlevini ortadan kaldırır. Böylece kanıtların dayanağı şekiller değil mantıksal çıkarımlar olur. Bu yönelim çalışmamızda Hilbert'i yerleştirdiğimiz çizgiyle uyumludur. Hilbert'te görünün yerini belirlerken görünün kanıtlama zincirinde kullanılmadığı, kanıtlamada yer alacak nesnelerin olanağı açısından ele alınması gerektiğini vurgulayalım. Hilbert'in kendisi de *Geometrinin Temelleri'nin* girişinde Kant'ın *Saf Aklın Eleştirisi'nden* A702/B730'u alıntılar "bütün bilgimiz görülerle başlar, kavramlara geçer, idelerde sona erer". Elbette bu alıntı gelişi güzel yapılmış olarak anlaşılamaz. Tersine, ortaya koyacağımız gibi Hilbert'in yapıtları boyunca sürdürdüğü bir izleğe karşılık gelir.

Hilbert *1899 GT'de* sonraları yaşam uğraşı olacak işi ortaya koyarak başlar: Aritmetiği ve geometriyi mantıksal sonuç çıkarma yoluyla yapılandırmak. Geometri açısından bu çaba Eukleides'ten beri sorun olarak durmaktadır. Temel önermelerin seçimi ve karşılıklı bağıntılarının nasıl olacağı sorunun temelidir. İşte Hilbert, bu bağlamda kendi çalışmasını geometri için tam ve olabildiğince basit aksiyomlar dizgesi oluşturmak için yeni bir soruşturma olarak görür.

Eukleides'ten yaklaşık iki bin yıl sonra Hilbert, özelde geometride ancak genel olarak aksiyomlara dayalı dizgelerde köktenci bir değişikliğe gider. Bunu aksiyomlara dayalı dizgede yöntemsel değişiklik olarak değerlendirebiliriz. Söz konusu değişiklik aksiyomların doğruluk değerlerine yöneliktir. Hilbert, dizge bağlamı dışında aksiyomların doğruluk değeri taşımadığını öne sürer. Bu keskin değişikliği ayrıntılandırmadan Eukleidesçi dizgenin nasıl oluşturulduğunu anımsayalım.

Bilindiği üzere Eukleides aksiyomlara dayalı matematiksel bir dizge oluşturan ilk kişidir.

17 Wilfried Sieg, "Hilbert's Proof Theory", içinde *Logic from Russell to Church*, ed. Dov M. Gabbay ve John Woods (Amsterdam: North-Holland, 2009), 333.

18 William Ewald ve Wilfried Sieg, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933* (Berlin: Springer, 2013), 4.

19 Çalışma boyunca Hilbert'in eserleri ilk geçtikleri yer dışında kimi durumlarda basılı yılı ve eserin baş harfleri kullanılarak kısaltılacaktır. Örneğin bu eser için 1899 GT .

Eukleides tüm geometrik teoremleri bir dizi öncülden mantıksal olarak türetebileceği bir yapı oluşturmak ister. Bunun için önce tanımları (*horoi*) verir. Sözgelimi "nokta, büyüklüğü olmayandır" ya da "çizgi eni olmayan uzunluktur" tanımların iki örneğidir. 13 kitaptan oluşan dizgesinde toplam 131 tanım 5 postulat (*aitemata)* ve sonraları aksiyom olarak anılacak 5 ortak kavrayış (*koinaí énnoiai*) sıralar[20]. Bütün bunlardan 465 önerme ve 16 yardımcı önerme türetir. Ne var ki, Eukleides'in dizgesi kimi mantıksal boşluklar ve bulanıklıklar içerir.[21] Eukleides açısından gerek postulatlar gerekse aksiyomlar kendiliğinden doğrudur. Eş deyişle doğrulukları bir çıkarım yoluyla değil dolaysız bir kavrayışla elde edilir. Dizgedeki tanımlar yoluyla ortaya konulan geometrik nesneler hakkında aksiyomlar ve postulatların doğru olduğu varsayılır. Eukleides daha sonra aksiyomlardan hangi doğru önermelerin mantıksal çıkarımla türetilebileceğini ortaya koymak ister. Her önermeyi, mantıksal sonuç çıkarma aracılığıyla, tanımlara, postulatlara, ortak kavramlara ya da önceden kanıtlanmış önermelere dayanarak elde etme çabasını gösterir.

Hilbert ise başka türlü bir yöntem önererek aksiyomlarla postulatlar arasında ayrımı ortadan kaldırır. Pasch'ı izleyerek mantıksal boşlukları ortadan kaldıran bir geometri oluşturabilmek için yeni bir aksiyomlar dizgesi savlar. Hilbert, temel kavramlarla başlamak yerine nesneler ve bağıntıları ele almayı önerir. Bunlar şöyledir: [22]

> Şeylere ilişkin 3 ayrı dizge düşünelim. İlk dizgeyi oluşturan şeyleri noktalar olarak adlandıralım (…) ikinci dizgeyi oluşturan şeyleri düz çizgiler olarak adlandıralım (…) üçüncü dizgeyi oluşturan şeyleri düzlemler olarak adlandıralım. (…) Bu noktaları, düz çizgileri ve düzlemleri birbirleriyle karşılıklı bağıntılı olarak düşünürüz. Söz konusu bağıntıları, "yer alan [liegen]", "arasında" [zwischen], "paralel", "eş olma" [kongruent], "sürekli" [stetig] sözcükleriyle gösterebiliriz. Bu bağıntıların tam ve eksiksiz [vollständige] betimlenişi geometrinin aksiyomları ile sonuçlanır.
>
> Geometrinin aksiyomları 5 grupta düzenlenebilir. Bu aksiyom gruplarının her biri görümüze ilişkin belirli temel olguları [Grundtatsache] dile getirir. Bu aksiyomları şöyle adlandıracağız.
>
> I, 1-7 Bağlantı aksiyomları [Axiome der Verknüpfung]
>
> II, 1-5 Sıralama aksiyomları [Axiome der Anordung]
>
> III, Paralel aksiyomu (Eukleides aksiyomu) [Axiom der Parallelen]

20 Eukleides Grekçe ἀξίωμα (*axíoma*) deyişini kullanmamış bunun yerine κοιναὶ ἔννοιαι (*koinaí énnoiai*)) [ortak kavrayış] demiştir. Thomas Heath, Aristoteles'in *İkinci Çözümlemeler'inde* aksiyomlar ve postulatlar arasında açık bir ayrım verdiğini belirtir. Buna göre Heath, Aristoteles'in aksiyomlara "ortak şeyler/sanılar" dediğini bildirir. Eukleides, bu Aristotelesçi ayrımı sürdürür. Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics vol 1 : From Thales to Euclid* (Oxford: Clarendon Press, 1921), 336.

21 Felix Klein, *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*, çev. Gert Schubring, c. II: Geomet (Berlin: Springer, 2016), 221.

22 David Hilbert, Grundagen der Geometrie (Leipzig: B. G. Teubner, 1903), 3.

> IV, Eş olma aksiyomları [Axiome der Kongruenz]
>
> V, Süreklilik aksiyomu [Axiome der Stetigkeit]

Yukarıdaki alıntıya ilişkin üzerinde durulması gereken ilk nokta Hilbert'in görüyü anmasıdır. Kanıtlama zincirinde değil fakat geometrinin olanağını sağlamak açısından görüyü koymuştur. Bu durum Hilbert'in matematik nesneler ve gerçeklik hakkında değişmeyen bir yanının dile getirilişi olarak görülmelidir. Matematik yapabilmek için görüsel bir verilmişlik gerekir. Alıntıda üzerinde durulması gereken ikinci nokta aksiyomların artık yalnızca çeşitli nesneler arasındaki bağıntılara ilişkin olmasıdır. Kanıtlama zincirinde görüye dayanmaya son verilince, aksiyomları doğru yapanın, yorumlanışlarına göre tutarlılığı sağlamaları olduğu sonucuna varılır. Bu yeni yaklaşım aksiyomları doğru ya da yanlış olarak değerlendirmez. Başka deyişle aksiyomlar önceden doğru olarak benimsenmez. Hatta tüm aksiyom dizgesi bile bir doğruluk ortaya koymak yerine koşullu bir dizge meydana getirir. Öyleyse aksiyomlar yalnızca dizge içinde ve bağıntılarda anlamlıdır. Dizge dışında ve tek başlarına anlamları bulunmaz. Paul Bernay (1888-1977) açısından bu durum aksiyomlaştırmanın matematiksel ile bilgi kuramsal sorunlarının ayrıştırılmasıdır.[23]

Hilbert, *Geometrinin Temelleri'nin* giriş bölümünde eseri kaleme almaktaki amacını şu sözlerle ortaya koyar:

> Bu araştırma, geometri için basit ve tam bağımsız aksiyom kümesi seçmek ve bunlardan, en önemli geometri teoremlerini türetmek için yeni bir girişimdir. Bu teoremler öyledir ki, farklı bireysel aksiyomlardan çıkarılacak sonuçların kapsamını ve aksiyom gruplarının önemini, mümkün olduğunca açık bir şekilde ortaya koyar.[24]

Yukarıda dile getirdiğimiz gibi aksiyom temelli bir dizgeden beklenti olabildiğince basit ve tam olmasıdır. Basitliğin anlamı aksiyomları olabildiğince az sayıda tutmak ve bağımsız oluşlarını ortaya koymaktır. Ayrıca her aksiyomda tek bir düşünce yer almalıdır. Bir başka önemli gereklilik ise aksiyomların hiçbir çelişkinin ortaya çıkışına izin vermeyecek biçimde tutarlı olmasıdır. Tam olmak ise bu dönemde Hilbert açısından aksiyomlara dayanan bir dizgenin, ilgili bağlamdaki *tüm* bilinen teoremlerin türetilmesini sağlaması anlamına gelir. Burada vurgulanması gereken nokta Hilbert'in daha sonraları tamlığı, aksiyomlara dayanan bir dizgedeki her doğru ifadenin kanıtlanabilir olmasıyla ilişkilendirmesidir. Bu bakımdan *Geometrinin Temelleri'ndeki* kendi aksiyomlarının Eukleides geometrisinin tüm teoremlerini sağlayabileceği sanısındadır.

Buradan Hilbert, geometrik bağıntıları, aritmetiksel bağıntılar olarak yorumlar. Böylece geometrik aksiyomları, gerçel sayılar hakkında doğruluklar olarak yorumlama olanağı ortaya çıkar. Bu ise geometrik bağıntıların tutarlılığını gerçel sayılar kuramına bağlı duruma getirir.

23 Paul Bernays, "Hilbert's Significance for the Philosophy of Mathematics", içinde *From Brouwer to Hilbert The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, ed. Paolo Mancosu (New York: Oxford University Press, 1998), 192.

24 Hilbert, Grundagen der Geometrie, 1.

Hilbert bilimsel etkinlikte üretilen bilginin kesinliğinin temelinde "sonlu sayıda mantıksal adım aracılığıyla aksiyomlardan türetilebilmeyi"[25] görür. Söz konusu sonlu sayıda mantıksal adım yoluyla gerçel sayıları konu edebilmek için analizin tutarlılık kanıtının doğrudan olması gerektiğini düşünür. Aksiyomların geliştirilmesi ise kanıtlama zincirinde görüye başvurmaksızın gerçekleşir. Temel kavramlar ile aksiyomlar arasındaki mantıksal bağıntılar çözümlenir. Burada önemli olan aksiyomların tutarlılığıdır. *Geometrinin Temelleri* açısından bakıldığında aksiyomların tutarlılığı *real* düzlemdeki dizgenin yorumlanması yoluyla sağlanır. Böylece geometrinin tutarlılığı analizin tutarlılığına indirgenir. Analizin temellendirilmesi de yine aksiyomlaştırma ve tutarlılık kanıtı gerektirir. Bu çerçevede Hilbert, Frege'ye 27.12.1899 tarihinde yazdığı mektubunda tutarlılıkla ilgili görüş ayrılıklarını dile getirir. Hilbert'in yazdıklarından anlaşıldığı kadarıyla Frege için aksiyomların doğruluğundan, birbirleriyle çelişmedikleri sonuç çıkmaktadır. Hilbert ise tam tersini düşündüğünü bildirir: "rasgele seçilmiş aksiyomlar tüm sonuçlarında birbirleriyle çelişmiyorlarsa bu durumda doğrudurlar ve aksiyomlar yoluyla tanımlanan şeyler vardır"[26]. Öyleyse Hilbert açısından sayıların varlığı, tutarlılığın sağlandığı bir aksiyom dizgesi yoluyla ortaya konabilir.

Sayı Kavramı Üstüne

Hilbert *1899 GT'de* geometrinin tutarlılığı için aritmetiğin tutarlı olması gerektiği sonucuna ulaşmasıyla aritmetiğin aksiyom temelinde kurulmasına yönelir ve tutarlılık kanıtını aritmetikte arar. Bu yaklaşımını ilkin 1900 yılında *Sayı Kavramı Üstüne'de* (*Über den Zahlbegriff*) ortaya koyar.

Sayı Kavramı Üstüne'de belirli önermelerin doğru olarak yorumlanmasını sağlayan bir dizge oluşturarak yalnızca mantıksal bir düzlemde matematiksel aksiyomlar öne sürer. Böyle bir dizgede verilen bir aksiyomun diğer aksiyomlardan bağımsızlığını denetlemek için, söz konusu aksiyom dışında tüm aksiyomların sağlandığı durum ortaya konulur. Ardından tüm aksiyomların tutarlığı bir aritmetik model verilerek gösterilir. Böylece tutarlılık, real analizle bağıntılı olarak ortaya konur. Fakat böylesi bir indirgeme tutarlılık sorununu çözmek yerine, sorunun gerçel sayıların tutarlılığına ötelenmesine yol açar.

Hilbert *SKÜ'ye* aritmetik ile geometri arasında geçici bir karşıtlık kurarak başlar. Karşıtlık aritmetiğin ilkeleri ile geometrinin aksiyomları arasında yapılan bir karşılaştırma üzerinden ele alınır. Aritmetiğin ilkeleri *oluşturucu yöntem* [*genetische Methode*] ile geometri ise aksiyom temelli meydana getirilir.[27] Hilbert, *oluşturucu yöntemi* basit sayı kavramından başlayarak, ardışık genişletmelerle gerçel sayılara kadar uzanan yöntem olarak belirler.[28] *Oluşturucu yöntemi* Hilbert Dedekind'e atıfla konu etmektedir. [29] Hilbert, Dedekind'in çeşitli sayı dizgelerini aşamalı olarak oluşturduğu yaklaşımını göz önünde tutar. Dedekind, doğal sayılardan başlar, aşama aşama diğer

25 1900 yılında ünlü Uluslararası Matematik Kongresinde bildirdiği 23 sorudan ikincisi bu konu hakkındadır.

26 Gottlob Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, ed. Gottfried Gabriel vd., çev. Hans Kaal (Oxford: Basil Blackwell, 1980), 34.

27 David Hilbert, "Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 6 (1900), 180.

28 Hilbert, "Über den Zahlbegriff", 180.

29 Leo Corry, *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918)* (Dordrecht: Springer, 2004), 99.

sayı dizgelerine ulaşır. En sonunda ise kesirli sayıların kesimleri olarak gerçel sayıları oluşturur. Söz konusu geometri olduğunda aritmetikten kökensel bir farklılık olduğunu öne süren Hilbert, *Geometrinin Temelleri'nde* ortaya koyduğu üzere nesneler ve aralarındaki bağıntıları konu eder. Devamında sunulan aksiyomların tutarlığını ve tamlığını "verilen aksiyomların hiçbir çelişkiye yol açmaması ve dahası dizgenin aksiyomlarının **tüm** [vurgu benim] geometrik önermeleri kanıtlamaya yeterli"[30] olması olarak açıklar. Bu vurgulardan sonra, aritmetik için *oluşturucu yöntem* ile geometri için aksiyomatik yöntem ayrımını sorgulayarak *oluşturucu yöntemin* eğitsel ve bulgulatıcı [heuristisch] değerine karşın bilginin tam bir kesinliği için aksiyomatik"[31] yöntemi sayının temellendirilmesi için daha uygun olarak gördüğünü bildirir. Hilbert bu adımlardan sonra sayıyı şöyle temellendirir:[32]

> Şeylerden meydana gelen bir dizge düşünürüz; bu şeylere sayı adını veririz ve onları a, b, c,… olarak imleriz. Bu sayıları karşılıklı belirli bağıntılar içinde düşünürüz ve bu bağıntılar ise tam ve eksiksiz biçimde şu aksiyomlar yoluyla ortaya çıkar.

30 Hilbert, "Über den Zahlbegriff", 181.
31 Hilbert, "Über den Zahlbegriff", 181.
32 Hilbert, "Über den Zahlbegriff", 181.

Söz konusu aksiyomlar[33] I: bağlantı aksiyomları[34] [Axiome der Verknüpfung], II: hesaplama aksiyomları[35] [Axiome der Rechnung], III: sıralama aksiyomları[36] [Axiome der Anordung], IV: süreklilik aksiyomlarıdır [37] [Axiome der Stetigkeit].

Hilbert bu aksiyomları kullanarak sayıları temellendirirken kimi aksiyomların diğerlerinden çıkartılabileceğini göz önünde tutarak aksiyomların bağımsızlığını tartışır[38]: Örneğin 0 sayısını ortaya koyan I.3 [$a+0 = a$ ve $0+a = a$] aksiyomu, I.1 [$a+b = c$ ya da $c = a+b$], I.2 [$a + x = b$ ve $y + a = b$] ve II.1 [$a+(b + c) = (a + b) + c$] aksiyomlarının mantıksal bir sonucudur ve temelde toplamın birleşme yasasına [Gesetz] dayanır. Benzer biçimde 1 sayısını ortaya koyan I.6 aksiyomu, I.4, I.5 ve II.3 aksiyomlarının mantıksal sonucudur ve temelde çarpmanın birleşme yasasına dayanır.

Hilbert, kendi sayı dizgesinin gerçel sayılar dizgesiyle uyumlu olduğunu vurgulayarak aksiyomların tutarlılığının kanıtı için "yalnızca, bilindik çıkarım yöntemlerinin gözden geçirilerek yeniden düzenlenmesinin" yeterli olacağını varsayar ve ekler "bu kanıtta aynı zamanda gerçel

---

33 Hilbert, "Über den Zahlbegriff", 181-183.

34 I 1. a sayısı ve b sayısından "toplama" yoluyla belirli bir c sayısı çıkar.
$a+b = c$ ya da $c = a+b$
I 2. a ve b sayısı verilmiş olsun, bu durumda her zaman bir ve tek bir x sayısı ve ayrıca bir ve tek bir y sayısı bulunur, öyle ki:
$a + x = b$ ve $y + a = b$ 'dir.
I 3. 0 adı verilen belirli bir sayı bulunur ve her a için
$a+0 = a$ *ve* $0 + a = a$
I 4. a sayısı ve b sayısından başka bir yolla, "çarpma" yoluyla belirli bir c sayısı çıkar:
$ab = c$ ya da $c = ab$
I 5. a ve b sayısı rasgele verilmiş sayılar olur ve a, 0 olmaz ise bu durumda her zaman bir ve tek bir x sayısı bulunur ve ayrıca bir ve tek bir y sayısı bulunur:
$ax = b$ ve $ya = b$
I 6. 1 adı verilen belirli bir sayı bulunur ve her a için
$a.1 = a$ ve $1.a = a$

35 II 1. $a+(b + c) = (a + b) + c$
II 2. $a + b = b + a$
II 3. $a(bc) = (ab)c$
II 4. $a(b + c) = ab + ac$
II 5. $(a + b)c = ac + bc$
II 6. $ab = ba$

36 III 1. a ve b herhangi iki farklı sayı ise bu durumda aralarında belirli biri (örneğin a) her zaman öbüründen büyüktür (>) ; öbürüne küçük olan denir:
$a > b$ ve $b < a$
III 2. $a > b$ ise ve $b > c$, bu durumda $a > c$
III 3. $a > b$ ise, bu durumda her zaman
$a + c > b + c$ ve $c + a > c + b$
III 4. $a > b$ ise ve $c > 0$, bu durumda her zaman
$ac > bc$ ve $ca > cb$

37 IV 1. (Arşimet aksiyomu) $a > 0$ ve $b > 0$ iki rasgele sayı olsun, bu durumda her zaman a'ya kendisini pek çok kez ekleyerek aşağıdaki özelliği elde etmek olanaklıdır:
$a + a + \ldots + a > b$
IV 2 . (Tamlık aksiyomu) sayılar dizgesine, şeylerin başka bir dizgesini eklemek olanaklı değildir öyle ki, bu bileşik dizgede I., II., III., IV.1.'nci aksiyom öbeklerinin tümü sağlansın; kısaca sayılar, şeylerin öyle bir dizgesini oluşturur ki, bu dizge bütün aksiyomları sağlarken genişletilmeye elverişli değildir.

38 Hilbert, "Über den Zahlbegriff", 183.

sayıların bütünlüğünün [Inbegriff] varoluşunun bir kanıtını görüyorum, G. Cantor'un deyişiyle, gerçel sayılar dizgesinin tutarlı bir küme oluşuna ilişkin kanıtı". [39]

Burada Hilbert'in gerçel sayılarının bütünlüğüyle ve bütünlüğün çağrıştırdığı sonsuzlukla ilgisi sonlu yöntemler uyarınca kurulur. Yukarıda sıraladığımız aksiyomların sınırları içerisinde yalnızca mantıksal çıkarım çerçevesinde kalmanın yeterli olacağı görüşündedir. Böylece Hilbert gerçel sayıların tutarlığını sağlayabilecek bir dizi aksiyom öne sürdüğünü düşünür. Daha önce dikkat çektiğimiz geometrinin tutarlığını gerçel sayılar yoluyla ortaya koyma çabası göz önünde tutulduğunda Hilbert'in matematiğin tutarlığını sağlama açısından yoluna devam ettiği görülür. Bu yolda önüne çıkan engelleri dile getirmek için Paris Uluslararası Matematikçiler Kongresi bir fırsat sunar. Burada Hilbert, matematikte çözülmesi gereken ünlü 23 sorusunu ortaya koyar. Paris bildirisinde, aritmetiksel aksiyomların tutarlığı için, irrasyonel sayılar kuramında bilinen akıl yürütme yöntemlerinde değişiklikler gerçekleştirerek bir kanıt bulmanın olanaklı olduğunu ileri sürer.[40] Daha sonra Russell paradoksunun gündeme gelmesi tutarlılığın yeniden tartışılmasının önünü açar.

Aritmetiğin ve Mantığın Temelleri Üstüne

Hilbert, *Sayı Kavramı Üstüne'den* birkaç yıl sonra 1904 yılında *Aritmetiğin ve Mantığın Temelleri Üstüne'de* (*Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*) tutarlılığı ve sayının temellerini yeniden ele alır. Bu kez *Sayı Kavramı Üstüne'den* farklı bir yönelimi bulunur. Burada geometrinin temelleri açısından tutarlığın kanıtlanması aksiyomların aritmetik yorumlanışı ile sağlanabilirse, benzer biçimde aritmetiğin aksiyomları için de kanıtların mantık yoluyla sağlanabilir olacağı varsayımındadır. Bu bakımdan çalışma tutarlılık sorunu açısından yeni bir aşamaya karşılık gelir. Tutarlılık sorununu bu kez doğal sayılar üzerinden çözmek isteyen Hilbert, doğal sayılar için tutarlılık sağlanırsa, gerçel sayılar için de sağlanabileceği varsayımındadır.[41]

Hilbert çalışmasında ilkin sayının ne olduğuna ilişkin çağdaşlarının yaklaşımlarını serimler. Bu bağlamda, tam sayıların doğrudan ve dolaysızca verildiğini savunuyor oluşundan dolayı Kronecker'i dogmatik olarak nitelendirir.[42] Çünkü onun için L. Kronecker tam sayılar ve özelliklerini dogmaymışçasına ele alır. H. Helmholtz'u ise bir deneyci olarak, büyük bir sayının olanaklı ya da edimsel varoluşunu deneyim yoluyla türetemeyeceğinden dolayı eleştirir.[43] Frege'yi ise küme ve üyeleri arasındaki bağıntıları göz önünde tutarken "her" [Jede] kavramını sınırlandırmamasından dolayı ortaya çıkan paradokstan dolayı eleştirir.[44] Dedekind'i "bilge" olarak nitelese de yöntemini transendental olarak niteler.[45] Bunun gerekçesi ise Dedekind'in

39 Hilbert, "Über den Zahlbegriff", 184.
40 David Hilbert, *Mathematische Probleme* (Göttingen: Dieterichsche Universitätsbuchhandlung, 1900) 265. Bundan sonra kısaltma için *1900b.*
41 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 185.
42 David Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", içinde *Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses : in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, ed. Adolf Krazer (Leipzig: Teubner, 1905), 174.
43 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 174.
44 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 175.
45 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 175.

sonsuzluğun varoluşunu kanıtlarken bütün nesnelerin toplamından [der Gesamtheit aller Dinge] söz etmesidir. Böylesi bir kullanımsa kaçınılmaz biçimde çelişkilere yol açar. Cantor'u ise tutarlı ve tutarsız kümeler arasında ayrım yaparken kesin bir ölçüt vermediği gerekçesiyle yerer.[46]

Tüm eleştirilerin ardından sayı kavramının temellendirilmesinin sağlam ve muğlak olmayan biçimde ancak aksiyoma dayalı bir dizgede gerçekleşebileceğini varsayar. Şimdi böyle bir dizgenin nasıl kurulacağı ana uğraşıdır. Bu bakımdan aritmetik ile mantık arasındaki bağıntıyı konu eder. Aritmetiği mantığın bir parçası olarak gören yaklaşımı döngüsel bulur çünkü geleneksel mantık yasalarının sergilenişinde küme ve sayı kavramından söz edilir. Buradan paradokslardan kaçınmak için aritmetiğin ve mantığın eş zamanlı olarak geliştirilmesi gerektiğini öne sürer.[47]

Hilbert, bir düşünce [Gedanke] nesnesi varsayar ve onu *düşünce-şeyi* [Gedankending] kısaca *şey* olarak adlandırarak bir imle gösterir.[48] İlk *düşünce-şeyi* olarak 1 (bir)'i seçer. Bu *düşünce-şeyinin* kendisiyle bir araya getirilişi ise çeşitli bileşimler [Kombinationen] olarak 2,3 ve daha fazlasını verir:

11, 111, 1111,…

Aynı biçimde bu 1'lerin rasgele bir araya getirilişi de bileşimlerin bileşimi olur.

(1)(11), (11)(11)(11), ((11)(11)(11)…)

Hilbert bu bileşimlerin bileşimlerini nesne olarak adlandırıp, temel *düşünce-şeyinden* ayırır.

Daha sonra Hilbert ikinci bir *düşünce-şeyi* olarak = (eşittir) imini kullanıp, her iki *düşünce-şeyinin* bileşimlerini oluşturur.

1=, 11=…, (1)(=1)(===), ((11)(1)(=))(==), 1=1

Hilbert 1 ile = 'in çeşitli bileşimlerinin sıralanış bakımından birbirlerinden ayırt edilebileceğine dikkat çekerek ayrı bileşimlerin özdeş olmadığının anlaşılabileceğini varsayar. Buradan iki basit şeyin [1, =] bileşimlerinin *varolanlar sınıfı* [die Klasse der Seienden] ve *var-olmayanlar sınıfı* [die der Nichtseienden] olmak üzere iki sınıfa bölümlenebileceğini belirtir.[49]

1 ile = 'in bir bileşimi temelde duran olarak alındığında ve *a* tümcesi [Aussage] olarak gönderim yapıldığında *a* tümcesi aynı zamanda *varolanlar sınıfına* girer, $\bar{a}$ tümcesi ise *var-olmayanlar sınıfına* girer. Birlikte alındıklarında *a* ve $\bar{a}$ tümcesi bir çelişkidir. İki tümce olan *A* ve *B*'nin bütünlüğü [Inbegriff] *A***|***B* biçiminde anılır ve bu gösterim "B, A'yı izler" olarak ya da "A doğru ise B de doğrudur" olarak yorumlanır. Burada *A önvarsayım* [Voraussetzung] ve B ise *önesürümdür* [Behauptung]. Hilbert, *önvarsayım* ve *önesürümün* bir dizi tümceden de meydana gelebileceğini bildirir ve şu örneği verir:

46 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 176.
47 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 176.
48 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 176.
49 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 177.

A_1 a. $A_2 | B_1$ o. B_2 o. B_3 Burada geçen "o" ise "veya" olarak yorumlanır.

Hilbert daha sonra önermesel fonksiyonu sunar: A_1, A_2,… önermeleri $A(x)$ tümcesinde, “rastgele”[50] yerine -çağdaş deyişle serbest değişken yerine-, 1 ve = *düşünce-şeyleri* ile doldurarak

A_1 o. A_2 o. A_3,… kısaca $A(x^{(o)})$ olarak ve “en az bir *x* için” olarak yorumlanır.

A_1 a. A_2 a. A_3,… kısaca $A(x^{(a)})$ olarak ve “her *x için*” olarak yorumlanır.

Bütün bu aşamaların ardından Hilbert şu aksiyomları elde ettiğini bildirir:[51]

(1) $x = x$

(2) $\{ x = y \ a. \ w(x)\} \mid w(y)\}$ [şimdiki gösterimi ile $x = y \wedge W(x)\} \longrightarrow W(y)$]

Hilbert bu iki tümcenin = kavramının tanımı olduğunu belirtir.[52]

Ardından üç yeni *düşünce-şeyi* önerir: sonsuz küme [undendliche Menge] için $\mathfrak{u}$, ardışıklık için $\mathfrak{f}$ [Folgendes], eşlik etme için [begleitende Operation] $\mathfrak{f}$’. Bunları kullanarak ise şu aksiyomlar dile getirilir:

(3) $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}(\mathfrak{f}')$ [Yorumlanışı: her $\mathfrak{u}x$ öğesi, $\mathfrak{u}$ kümesine ait olan $\mathfrak{u}(\mathfrak{f}')$ öğesi, eş deyişle $\mathfrak{u}$ kümesinin bir öğesine eşit olan belirli bir *düşünce-şeyi* olan $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x)$ tarafından izlenir.]

(4) $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{f}(\mathfrak{u}y) \mid \mathfrak{u}x = \mathfrak{u}y$ aynı öğe $\mathfrak{u}$ kümesinin iki öğesini izlerse bu iki öğe eşittir.

[$x' = y' \longrightarrow x = y$]

(5) $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}1$ [$x' \neq 1$], $\mathfrak{u}1$ izlediği hiçbir öğe yoktur; $\mathfrak{u}1$ u’daki ilk öğedir.

Görüleceği üzerine Hilbert sonlu sayıda imler kümesi ile başlayarak, bu imlerin tüm olanaklı bileşimlerini göz önünde tutar. Aksiyomlar aracılığıyla imler kullanılarak ortaya konulabilecek im bileşimlerini sınıflandırır. Böylece Hilbert “ünlü en küçük sonsuzluğun varoluşunu”[53] da güvence altına aldığı sanısındadır. Dizgedeki tutarlılığın temeli hiçbir şeyin hem *varolan* hem de *varolmayan* olmamasıdır. Hilbert kendi sonsuz küme kavrayışında aksiyomlardan türetilebilen tüm eşitliklerin belirli bir özelliği sağladığını, *varolmayanların* ise aynı özelliğin karşıtını sağlamadığını önesürer.

50 Hilbert’in kendisi metin içinde rasgeleyi tırnak içinde “Willkürlichen” olarak yazar.
51 Hilbert, “Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik”, 178.
52 Hilbert, “Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik”, 178.
53 Hilbert, “Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik”, 181.

AMTÜ'nün bir başka özelliği tümevarımsal kanıt kullanılmasıdır. Şöyle demektedir:[54]

> Yukarıda ortaya koyduğumuz ilkeler uyarınca sonlu sıral sayı [Ordnungszahl] kavramını temellendirmek zor değildir. Aksiyom temelinde bu yapılabilir. Sıral sayının ilk öğesini içeren her küme için herhangi bir öğe böylesi bir kümeye ait olduğunda ardışığı da ait oluyorsa, son öğe de zorunlu olarak her zaman kümeye ait olmalıdır.

Aksiyomlar belirli özellikler taşıyan eşitliklerin ortaya çıkmasını sağlar. Bu eşitliklere çıkarım kuralları uygulandığında aynı özelliği taşıyan başka eşitlikler elde edilir. Sonuç olarak Hilbert gerçel sayıların tümlüğünü sağlayan aksiyomların, tam sayıların tanımı için gerekli olan aksiyomlardan niteliksel olarak farklı olmadığını öne sürer.[55]

Hilbert'in *AMTÜ'deki* temel varsayımlarından biri aritmetiği ve mantığı eşzamanlı olarak geliştirmektir. Ne var ki, Hilbert'in dönemindeki mantık kavrayışı beklentilerini karşılamaktan uzaktır. Gördüğümüz üzere çalışma nicelleştirilmiş bir önermeler mantığı yaklaşımından yoksundur. İmlerin yorumlanışı bakımından anlambilimsel düzeyden sözdizimsel düzeye geçiş de sorunludur. Hilbert elindeki mantığın matematiği temellendirmek açısından yetersiz olduğunu daha sonra anlayacaktır. İyimser bir yaklaşımla "mantıksal çıkarımın bilindik kipleri"nin[56] peşinde olduğu gerekçelendirme için yeterli olduğunu varsaysa da bunu gösteremez.

Poincaré, Hilbert'i tutarlılığı kanıtlamak için tümevarımı kullanmaktan ötürü eleştirir. Poincaré, paradokslarla ilgisi bakımından *yüklemlenebilirlik* [predicative] üstünde durur. Bir tanımda yer alan öğe, o öğeyi içeren toplama gönderimde bulunuyorsa *yüklemlenemezdir* [impredicative]. Poincaré'ye göre Hilbert'in kanıtı döngüseldir ve Hilbert'in çalışmasının yöntemsel eksikler içerdiğini öne sürer.[57] Sonraki yaklaşımı olan *Aksiyomatik Düşünce'de* (*Axiomatische Denken*) Hilbert'in bu eleştirileri üstlendiği görülür. Hilbert, bu metniyle mantıkçı tavrını güçlendiren bir yaklaşım sergiler. Şimdi ayrıntılarına bakalım.

Aksiyomatik Düşünce

1918 yılında *Aksiyomatik Düşünce* [*Axiomatische Denken*] ile Hilbert aksiyomatik temellere dayanan bilgi anlayışını açımlayan bir metin kaleme alır. Ona göre bir bilim alanında söz konusu edilen olgular arasında bir sıra olmak durumundadır. [58] Bu sıranın oluşması ise kavramların çerçevesine [Fachwerk von Begriffen] göre gerçekleşir. Çerçevedeki bir kavram bilim alanındaki her bir tekil nesneye karşılık gelir. Kavramlar arasındaki mantıksal bir bağıntı ise bilim alanındaki her olguyu tutar. Söz konusu kavramsal çerçeve, bir bilim alanındaki kuramdan başka bir şey değildir.

54 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 181.

55 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 185.

56 Hilbert, "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", 184.

57 Henri Poincaré, "Mathematics and Logic: II", içinde *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, ed. William Bragg Ewald (Oxford: Oxford University Press, 1996), 1045.

58 David Hilbert, "Axiomatisches Denken", içinde *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen Band III* (Springer, 1970), 146.

Bir kuramın nasıl kurulduğuna yakından baktığımızda ise Hilbert alandaki birkaç tümcenin kavramsal çerçevenin oluşturulmasını sağladığını öne sürer.[59] Mantıksal ilkeler uyarınca ilişkilendirilen bu ilkeler alanın tüm çerçevesini kurmaya yeter. Örneğin hesaplama yasaları ve tam sayılar için kuralların, sayı kuramının yapılandırılması [aufbau] için yeterli olduğu düşüncesindedir. Benzer biçimde Hilbert, temel tümcelerin istatistik, mekanik, elektrodinamik, radyasyon gibi pek çok alanda kurucu olduğunu öne sürer. *1900b* metninde 6. soru fiziğin aksiyomatikleştirilmesiydi. Şimdi *AD'de* belli bir alanda bilginin ortaya çıkışını aksiyomlarca üretilen kavramsal çerçevenin yapılandırılması olarak açıklar.

Hilbert açısından bir kuram ilkin içerilen tümcelerinin bağımlılığı [Abhängigkeit] ve bağımsızlığı [Unabhängigkeit] hakkında bir yaklaşım; ikinci olarak tüm tümcelerin tutarlılığının güvencesini vermelidir.[60] Aksiyomların bağımsızlığı konusunda Hilbert, süreklilik aksiyomunu özellikle konu eder. *1900 SKÜ'de* IV.1. aksiyom olarak ortaya konulan Arşimet aksiyomu[61]*AD'de* gerçel sayılar kuramının diğer tüm aritmetik aksiyomlarından bağımsız olarak nitelenir.[62] Üstelik ona göre süreklilik aksiyomu yalnızca geometri açısından değil fizik açısından da son derece önemlidir. Bu önemi açıklamak için, karasal uzaklıkları birbirlerine ekleyerek dış uzaydaki cisimlerin uzaklıklarını ve boyutlarını hesaplayabilmemizi örnek verir. Şöyle devam etmektedir[63]:

> Bu tür olgular yalnızca, geometrik düzenlemeler ya da üçgenlerin eş oluşu hakkında tümcelerin mantıksal sonucu değil, aynı zamanda deneysel araştırmanın da sonucudur. Tıpkı bir üçgenin açılarının toplamı hakkında tanıdık tümcede olduğu gibi Arşimet aksiyomunun doğada geçerliliği deney yoluyla onaylanma gerekliliği taşır.

Demek ki Hilbert aksiyomları, salt imler arasında tutarlı bağıntılar bağlamında görmez. Buna ek olarak doğada bir olayın anlaşılmasını sağlayarak onaylanması gerekir. Burada Hilbert herhangi bir aksiyoma dış dünyada belli bir fenomenin karşılık geldiğini öneriyor değildir. Görü temelli elde edilen imler ya da başka deyişle verili bir dizi şeyi imleyen ama belli bir imleme biçimi ya da im kullanma gerekliliği olmadan konu edilen simgeler arasında bağıntıların gerçeklikte de onaylanması beklentisini dile getirmektedir.

Hilbert daha sonra aksiyomatik dizgelerde çelişki ve paradoksları konu eder.[64] Fizik söz konusu olduğunda çelişkiler, aksiyomlar değiştirilerek elenir. Bu elenme süreci sonrasında gözlemlenen tüm fizik yasaların, seçilen aksiyomların mantıksal sonucu olmasına özen gösterilir. Söz konusu saf kuramsal bilimler olduğunda ise Hilbert'e göre aksiyomatik yöntemde yer alan tanımlar gözden geçirilerek, kimi kısıtlamalar yapılır. Örneğin küme kuramı paradokslarından sonra Zermelo'nun küme üyeliği kısıtlamaları gibi. Dolayısıyla Hilbert, çelişkilerden arındırılmış

59 Hilbert, "Axiomatisches Denken", 147.
60 Hilbert, "Axiomatisches Denken", 148.
61 Arşimet özelliği olarak bilinen özellik doğal sayılar kümesinin üst sınırının bulunmadığını öne sürer.
62 Hilbert, "Axiomatisches Denken", 149.
63 Hilbert, "Axiomatisches Denken", 149.
64 Hilbert, "Axiomatisches Denken", 150.

ya da başka deyişle tutarlı bir dizgeyi, bilgi için ideal bir yapı olarak koyar. Hilbert tutarlılık tartışmasını mantık ve matematik bağıntısını ele alacağı bir bağlama taşır. Bu tartışma kapsamında sayı ve küme kuramının mantığın bölümleri olduğunun kanıtlanabilmesi için mantığın aksiyomatikleştirilmesini kaçınılmaz görür.[65] Yukarıda dile getirdiğimiz gibi *1904* metninde Hilbert mantık ve matematiğin birlikte geliştirilmesinden yanadır. Şimdi ise Russell ve Whitehead'in Principia Mathematica'yı yayınlamalarının ardından görüşleri değişmiştir. Matematiğin temelleri açısından öncelik mantıktadır, Russell ise bunu başarmıştır. Fakat yine de yapılması gereken bir dizi şey bulunur. Şöyle demektedir[66]:

> (…) Tam sayıların ve kümelerin tutarlılığı sorunu tek başına durmaz, tersine çok geniş ve zor bir bilgikuramsal alandaki matematiksel renklendirmeye [Färbung] ilişkindir: bu sorular alanını kısaca, her matematiksel sorunun ilkesel olarak çözülebilirliği sorunu, matematiksel bir soruşturmanın sonuçlarının ardısıra sınanabilirliği sorunu, matematiksel kanıtların basitliği için bir ölçüt sorusu, matematik ve mantıkta biçimselcilik ve içerik arasındaki bağıntı sorusu ve son olarak son sayıda işlemde matematiksel bir soru için kararverilebilirlik [Entscheidbarkeit] sorunu olarak niteleyebiliriz.

Tüm bu sorular yanıt bulduktan sonra mantığın aksiyomatikleştirilmesi tartışması bütünüyle açıklığa kavuşabilecektir. Kuşkusuz bu sorunlar arasında aksiyomlara dayalı dizgenin tutarlılığına karar verme sorunu ayrı bir önem taşır. Hilbert, *1900b*'den beri sorunla ilgi içindedir. 1918'deki tutumu açısından kararverilebilirlik, cebirsel sabitler, yüzeyler kuramı vb. açısından son derece önemli olmasının yanı sıra matematiksel kanıt kavramı açısından önemlidir. Öyle ki Hilbert bu alanı ele geçirmeyi filozofun aklı eleştirmesi kadar önemli görür.[67] Bu ise önünde ödev olarak durmaktadır. Dikkat edileceği üzere alıntıdaki bir başka vurgu matematik ve mantıkta biçimselcilik ve içerik arasındaki bağıntıya yöneliktir. Bu vurgu Hilbert'in matematiği bütünüyle içeriksiz bir terim biçimselciliği olarak görmediğini ortaya koymaktadır.

Matematiğin Yeni Temeli

Hilbert 1923 yılında yayımlanan *Matematiğin Yeni Temeli* (*Neubegründung der Mathematik*) adlı yapıtıyla temellendirme tartışmasına bir kez daha katılır. Kendi görüşlerini sunmadan önce Brouwer ve Weyl'i eleştirir. Eleştirinin odağı kendi sonlucu yönteminin matematiğin tüm alanlarını özellikle de sonsuzla ilgili bağlamları kuşatıp kuşatmadığıyla ilgili tartışmadır. Daha sonra kendi yaklaşımını üç eksende ortaya koyar: olağan matematik, özel matematik, meta-matematik.

Brouwer ve Weyl ile Hilbert arasındaki başlıca ayrım yapılandırılmış kanıtı olmayan bir savın matematikte yer alıp almamasıyla ilgilidir. Brouwer ve Weyl yapılandırılmayan kanıta karşı çıkarken, Hilbert sorunun böyle konulmaması gerektiğini ileri sürer. Ona göre çelişkinin

65 Hilbert, "Axiomatisches Denken", 153.
66 Hilbert, "Axiomatisches Denken", 153.
67 Hilbert, "Axiomatisches Denken", 153.

ortaya çıkmadığı aksiyomlar dizgesi matematikte yol almak için yeterli bir temeldir.[68] Söz konusu çerçevede Hilbert Weyl'in kendisini eleştirmesini inceler. Weyl, Hilbert'in sayı-kavramının önceki temellendirilişlerinde bir döngüsellik olduğunu düşünür çünkü Hilbert gerçel sayıların tanımları için bölmeler [Einteilungen] kullanmış, bu bölmeleri ise verilen bir özelliğe karşılık gelen bir gerçel sayı olup olmadığına göre belirlemiştir.[69] Başka deyişle, gerçel sayıların tanımları için gerçel sayılar kullanılmıştır. Hilbert söz konusu eleştiri bağlamında Brouwer ve Weyl'in Kronecker'in yolundan gittiklerini varsayar.[70] Kronecker, Hilbert'in temellendirme tartışmalarında çokça görüşlerine yer verdiği bir düşünür olmasına karşın matematikte yer aldığı çizgide Cantorcu küme kuramı ve sonuçlarına karşı çıkar. Weierstrass'ın gerçel sayıları açıklarken sonsuz kümeleri kullanışını da aradaki bağıntıları ortaya koyan belirli bir yordam bulunmadığı gerekçesiyle yadsır. Hilbert ise Cantorcu küme anlayışının sonuçlarını benimsediği gibi bu "cennetten asla çıkmayacağını" duyurur. Döngüye düşme nitelemesini de uydurma bulur. Kendisinin döngüye düşmeyle ilişkilendirilmesinin nedenini Weyl'in uyguladığı biçimiyle yapılandırma ilkesinin, *real* analizi ıskalaması ve bundan dolayı kullanışsız olmasına dayandırır.[71]

Hilbert'in *1923'te* eleştirdiği bir başka isim Poincaré'dir. Yukarıda değindiğimiz gibi Poincaré, Hilbert'in *1904* metninde tutarlılık kanıtının döngüsel olduğunu öne sürmüştü. Döngüsel olmasının gerekçesi ise tümevarıma dayanmasıydı. Hilbert, Poincaré'ye cevap vererek iki tür tümevarım olduğunu öne sürer. Meta-matematik soyut biçimde verilen nesnelere yönelik içeriksel bir tümevarım kullanır, oysa biçimsel matematik tümevarım ilkesinin tamamını kullanır.

Hilbert *1923 MYT'de* sayı kavramını temellendirmek için aksiyomlara dayalı yöntemi önerdiğini bir kez daha yineler. Öyle ki, Weyl'in gerçel sayılara ilişkin Dedekindci yaklaşıma yönelik eleştirilerini de böylelikle boşa çıkarır. Dedekind açısından gerçel sayılar, kesirli sayıların *kesimleri* olarak tanımlanabilir. Hilbert ise *Dedekind kesimleri* yerine *1900* metninde önerdiği süreklilik aksiyomları olan Arşimet ve tamlık aksiyomlarının konulabileceğini savunur. Sürekliliği temellendirmekle ilgili böylesi bir yaklaşımın görüyle çatışmayacağını da ekleyerek şunları söyler: "görüden elde edilen yayılımsal büyüklük [extensiven Größe] kavramı, sayı [Anzahl] kavramından bağımsızdır"[72]. Hilbert bu noktanın tartışmasız olduğunu ve asıl uğraşılması gerekenin aksiyomların bir çelişkiye yol açıp açmadığının düşünülmesi olduğunu da ileri sürer.

1923 metninin güçlü savlarından biri Hilbert'in aksiyomların tutarlılığı sorununun çözümünü tartışıyor olmasıdır.[73] Böylelikle Hilbert, küme kuramı paradokslarının matematiğe ilişkin meydana getirdiği puslu havanın aksiyomlara dayalı dizgeler yoluyla dağıtılabileceğini umar.

68 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 158.
69 David Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik," in *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen Band III* (Berlin: Julius Springer, 1935), 157–158.
70 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 159.
71 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 159.
72 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 159.
73 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 159.

Hilbert'e göre bir bilim dalında araştırma yapmanın koşulu, bilim dalının olabildiğince az sayıda ilkeler üstüne temellenmesidir. Söz konusu ilkeler, olabildiğince basit [einfach], görüsel [anschaulich] ve kavranabilir [fasslich] olmalıdır ve bunlar aksiyomlar olarak düzenlenip bir araya getirilmelidir.[74] Tam bu noktada Hilbert aksiyomlara yönelik keskin bir belirlemede bulunur: "kanıtlanabilir ya da sanımızca kanıtlanabilir tümcelere aksiyomlar olarak yer vermemiz engellenemez"[75]. Hilbert daha sonra aksiyomatik düşünceyi "bilinçle düşünme"[76] olarak ele alıp, *naive* düşünmenin karşısına koyar. *Naive* düşünme dogma olarak inanmayla ilgiliyken, aksiyomatik düşünmeyle ilişkilendirdiği "bilinçli düşünme" kanıtlarla ilgilidir. Dolayısıyla Hilbert aksiyom tartışmasını kanıt tartışması olarak sürdürme eğilimindedir. Bu bakımdan aksiyomların tutarlılığından emin olmak için kanıtlara gereksinim duyarız. Kuşkusuz burada ortaya çıkacak soru bu kanıtı nasıl sağlayacağımız olacaktır. Hilbert şöyle demektedir: "aksiyomların tutarlılığının kanıtı pek çok durumda -örneğin geometride, termodinamikte, radyasyon kuramında ve başka fizik disiplinlerde- başarılı olmuştur, öyle ki kanıt, analizin aksiyomlarının tutarlılığı sorununa indirgenmiştir ve sorun şimdiye kadar çözülememiştir."[77] O halde sorun sayıları sunan aksiyom dizgesinin tutarlılığı sorunudur.

Hilbert'e göre Kronecker sorunu Tanrı[78] ile çözdüğü yanılsamasındadır. Poincaré ise aritmetiğin aksiyomlarının tutarlılığının bir kanıtını vermeyi olanaksız bularak, sayıların gerisindeki tümevarımı Tanrı vergisi bir özellik olarak görmektedir. Frege sayıyı saf mantıkla, Dedekind ise saf mantığın bir konusu olan kümeler kuramıyla temellendirmek istemiş her ikisi de başarısız olmuştur. Fakat onların açtığı yol Cantor, Zermelo ve Russell aracılığıyla derinleştirilerek, mantıksal-matematiksel araştırmaların ayrılmaz parçası olan mantıksal kalkülüsün gelişimine aracılık etmiştir. Yine de sorun ortadadır: analizin aksiyomlarının tutarlılığı. Hilbert sorunu ortaya koyduktan sonra çözüm önerisine geçer.

Öneriye bir görü tartışmasıyla başlar. Bu tartışmanın Hilbert'in ne türden bir biçimselci olduğunun anlaşılması açından önemi büyüktür. Hilbert, genel kavram-çerçeveleri [Begriffsumfängen] ile yapılan soyut işlemlere, kesinlikten uzak ve yetersiz içeriklere karşıdır. Bunlar yerine şunu önerir[79]:

> Mantıksal işlemlerin uygulanması ve mantıksal çıkarımların kullanılması için bir koşul olarak tasarımlamada bir şeyin önceden verilmesi gerekir: tüm düşünceyi önceleyen dolaysız yaşantı olarak görüsel [anschaulich] mantık-dışı [außer-logische] belirli somut nesne [verilmelidir]. Mantıksal çıkarım güvenilir olacaksa, bu nesneler tüm parçalarında bütünüyle araştırılabilir olmak zorundadır. Gösterilişleri [Aufweisung], ayrımları, ardışıklıkları, birbirlerini izleyişleri dolaysızca görüsel olarak verilir ve başka hiçbir şeye indirgenemez.

74 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 160.
75 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 160.
76 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 161.
77 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 161.
78 Kronecker şöyle demektedir: "Tanrı tam sayıları yarattı, geri kalan her şeyi insan"
79 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 163.

Hilbert, bu noktada sayı kuramındaki nesnelerin imler [Zeichen] olduğunu varsayar. Bu imlere ilişkin biçimlerin [Gestalt] uzay ve zamandan, üretilmesini sağlayan özel koşullardan ve uygulanışlarındaki önemsiz ayrımlardan bağımsız olarak kavranabileceğini öne sürer. Hilbert saf matematiği temellendirmek için “başlangıçta imin olduğunu”[80] benimsek gerektiğini de ekler. Bu noktadan temel sayı öğretisine geçerek, görüye dayalı somut imler yoluyla nereye kadar ilerletilebileceğini serimleyerek şu açıklamaları yapar[81]:

> 1 imi bir sayıdır.
>
> 1 ile başlayan ve biten, 1’i +’nın, +’yı 1’in izlediği her im de bir sayıdır. Örneğin
>
> 1+1
>
> 1+1+1
>
> Sayılar olan [Zahlen] ve sayıları tümüyle meydana getiren sayı-imlerinin [Zahlzeichen][82] kendileri incelememizin nesneleridir, yoksa kendi başlarına bir *anlamları* [Bedeutung][83] yoktur. Bu imlere ek olarak iletime yarayan ve bir şey *anlamına gelen* [bedeuten] başka imler de kullanırız. Örneğin 2 imi 1+1 sayı imi için bir kısaltmadır…

Daha sonra Hilbert 3, 0, > imlerini tanıtır. = ve >’nin kullandığı im topluluğunu birer tam-deyim [Formel] olarak görmediğini ekler. Ardından $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ harflerini de sayı-imleri için kullandığını belirtir. Aynı şekilde $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ biçiminde im topluluğunu da tam-deyim saymayarak, bildirişimde [Mitteilung] bu im topluluğunun $\mathfrak{a}$ sayı-iminin $\mathfrak{b}$ sayı-imini aştığı anlamına geldiğini söyler. $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ ’den $\mathfrak{a}$’nın $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ olarak ayrıştırılabileceği [zerlegen] sonucunu çıkarır. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$’nın ise $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$’nin $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ ile aynı olduğu olgusunun gösterilişine karşılık geldiğini belirtir. Her $\mathfrak{a}$ sayı-imi, 1 ve + imlerinden oluşturulabilir. Hilbert’e göre böylesi bir zeminde sınırlı bir sayı kuramı oluşturduğumuzda kanıt adımlarında aksiyomlar bulunmaz dolayısıyla çelişki de ortaya çıkmaz.[84] Nesneler olarak somut imleri seçer, onlarla işlemler yapar, içerikli [inhaltliche] ifadeler meydana getirebiliriz. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$’ya ilişkin sayı-imlerinin sökülmesi [abbau] ve yapılandırılması [aufbau] yoluyla verilen kanıtın tümevarım ilkesine dayalı bir kanıt olmadığını öne sürer. Bu noktadan sonra Hilbert görüsel ve içeriksel kimi ilerlemeler sağlansa bile tüm matematiğin bu yolla düşünülemeyeceğini ekler. Özellikle de sonsuzluk söz konusu olduğunda içeriksel yaklaşımın dağıldığını söyler.

80 Hilbert, “Neubegründung Der Mathematik”, 163.

81 Hilbert, “Neubegründung Der Mathematik”, 163.

82 Hilbert daha sonraki çalışmalarında Zahlzeichen’ı rakamla [Ziffer] değiştirir.

83 Frege’nin Sinn-Bedeutung ayrımının farkında olarak, Bedeutung’u bağlamı göz önünde tutarak olağan kullanımlarından ikisi olan “anlam” ya da “gösterim” olarak çevirmeyi uygun bulduk. Bunun nedeni Hilbert’in metinlerinde ayrım tutmadan Sinn ve Bedeutung’u eş anlamlı kullanmasıdır. Örneğin “aynı anlamda” (im gleichen Sinne) , “bu temel kavramların temel anlamı” (Die fundamentale Bedeutung dieser allgemeinen Begriffe), “burada çok büyük anlam” (Große Bedeutung hat hier), “özsel anlamdan” (von wesentlicher Bedeutung) biçiminde Bedeutung’u kullanmıştır.

84 Hilbert, “Neubegründung Der Mathematik”, 164.

Hilbert bu vurguların ardından aksiyomların, düzgün tam-deyimlerin ve kanıtların araştırma nesneleri olduğu bir matematiksel kurama geçer. Bu geçisin gerçekleşmesi için biçimselci bir yaklaşımın gerekli olduğunu varsayar. Buradaki biçimselcilik tüm matematiksel kuramın mantıksal kalkülüs uyarınca çıkarımlar ve tanımları yoluyla biçimselleştirilmesi olarak anlaşılmalıdır. Temel sayı kuramında sayı-imlerinin gördüğü işlevi, bu kez biçimselleştirilmiş matematikte aksiyomlar, düzgün tam-deyimler ve kanıtlar görür. Matematikteki içeriksel düşünceler ancak bunları kullanarak yer bulur.[85] Hilbert bu vurgulardan sonra aritmetiğin aksiyomlarının tutarlılığının kanıtlanışını gösterebileceğini öne sürer. Somut-içeriksel sayı kuramı için 1 ve + imlerinin yeterli olduğunu varsayarken şimdi tüm matematiğin yapılandırılabilmesi [aufbau] için yeni imler ekler. Hilbert şu yeni imleri[86] ekler: I. bireysel imler, II. değişkenler, III. bildirişim için imler.

Kalkülüste kullanılacak olanlar imler (I) ve değişkenlerdir (II). III ise yalnızca iletimi sağlayan kısaltmalar olduğundan matematiği yapılandırırken kullanılması zorunlu değildir. Hilbert bu hazırlayıcı saptamalardan sonra I ve II'deki öğeleri birlikte kullanarak ilksel $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, $Z(\mathfrak{a})$ düzgün tam-deyimleri elde eder. Tam-deyimleri kullanarak ise aksiyomlara ulaşılır. Aksiyomlar Hilbert için "matematiğin yapılandırılmasında yapıtaşları olarak yer alan belirli tam- deyimler[87]den başka bir şey değildir. Kanıt ise "görüsel olarak göz önünde bulundurulması gereken bir şekildir ve çıkarım şemalarına göre yapılan çıkarımlardan oluşur."[88]

$$\begin{array}{c} \mathfrak{S} \\ \underline{\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}} \\ \mathfrak{T} \end{array}$$

Burada her öncül bir aksiyoma karşılık gelir. Bir tam-deyim, bir aksiyom ya da yerine koyma yoluyla aksiyomdan türetilebilirse, kanıtlanabilirdir. Demek ki, kanıtlanabilirlik, dizgeye bağımlı olarak ele alınır.

Anlaşılacağı üzere "somut-görüsel sayı kuramı açısından sayılar, nesnesel [Gegenständlich] ve gösterimsel [Aufweisbar]"[89]dir. Kanıtın kendisi de nesnesel ve gösterimseldir. Daha sonra Hilbert

85 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 165.
86 I.1- 1, + (sayı-imlerinin bileşenleri)
I.2-. $\phi(*)$, $\psi(*)$, $\sigma(*,*)$, $\delta(*,*)$, $\mu\,(*,*)$ (boş yerli tekil fonksiyon, tekil fonksiyonun fonksiyonu)
I.3- = (eşitlik), ≠ (eşitsizlik) > (büyüktür) < (küçüktür) (matematiksel imler)
I.4- *Z* (sayıdır [Zahl sein]) $\mathbf{\Phi}$ (fonksiyondur [Funksion sein])
I.5- → ('içerir', mantıksal im)
I.6- ( ) (tüm-imi)
II. *Değişkenler* (Latin harfleri)
II.1- *a*, *b, c, d, p, q, r, s* (temel değişkenler)
II.2- f(*), g(*) (değişken fonksiyonlar, değişken fonksiyonların fonksiyonu)
II.3- *A, B, C, D, S, T, U, V, W* (değişken tam-deyim)
III. İletim imleri (Alman harfleri)
III.1- $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ (fonksiyoneller)
III.2- $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$,$\mathfrak{C}$,$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ (tam-deyim)
87 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 167.
88 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 169.
89 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 169-170.

bu içerikli aynı zamanda düzgün tam-deyimlerden oluşan özel matematiği [die eigentliche Mathematik] kanıt kuramı yoluyla üst-matematiğe evriltir. Bu çabasının aritmetiğin ve biçimsel mantığın yapılandırılmasının eş zamanlı olması yoluyla gerçekleşebileceğini vurgular.[90] Çünkü aritmetiğin doğrulukları ile mantıksal doğruluklar ayrıştırılamazlar.

Matematiğin Mantıksal Temelleri

1923 Matematiğin Mantıksal Temelleri (Die Logischen Grundlagen der Mathematik) metninde Hilbert üst-dil ile biçimsel dil arasındaki ayrımı belirginleştirerek matematikteki sorunların çözülebilmesi için matematiksel kanıt kuramı geliştirilmesine yönelik çabasına devam eder. Üstelik öğrencisi Paul Bernays'ın yardımıyla bunu başardığına inanır. Öyle ki, analiz ve küme kuramını tartışılmaz bir temel sağladığı gibi sürey varsayımı ve matematiksel mantığın pek çok sorununu çözdüğünü savlar.[91]

Hilbert bu metinde de *MYT'de* başladığı somut görüsel içeriklere dayanan özel matematiği özenli biçimde biçimselleştirerek tam-deyimlerden oluşur duruma getirme işini sürdürür. Matematiğin biçimsel yapılarının yapı taşları olarak iş gören tam-deyimler ise aksiyomlardır. Öncülleri birer aksiyom olan çıkarım şemasından oluşan, ve görüsel olarak bize beliren şekil bir kanıttır.[92] Sözgelimi *MYT'de* olduğu gibi aşağıdaki şekil bir kanıtı göstermektedir.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

Biçimselleştirilen bu özel matematiğin yanı sıra bir de üst-matematik, matematiğin güvence altına alınması için gereklidir. Üst-matematikte, özel matematiğin kanıtları ile işlem yapılır. Bu kanıtların kendileri, içeriksel soruşturmanın nesneleridir. Matematikte bir yandan biçimsel çıkarım yolu ile aksiyomlardan kanıtlanabilen yeni tam-deyim elde edilir. Öte yandan da yeni aksiyomlar eklenip içeriksel çıkarımlar yoluyla tutarlılıklar kanıtlanır. Burada vurgulamamız gereken nokta Hilbert açısından aksiyomlar ya da kanıtlanan teoremlerin mutlak doğruluklar olmadığıdır.[93] *GT'den* beri altını çizdiğimiz gibi Hilbert'e kadar aksiyomlar kendi başına doğru kabul edilen önermelerken Hilbert aksiyomların doğruluğunu dizgeye duyarlı bir bağlama koyar.

90 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 174.
91 Hilbert, "Die Logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen* 88, sayı 1 (1922): 151.
92 Hilbert, "Die Logischen Grundlagen der Mathematik",152.
93 Hilbert, "Die Logischen Grundlagen der Mathematik",153.

Böylece Hilbert içerme, değilleme, eşitlik, sayı aksiyomlarını[94] serimleyerek, bunlar yoluyla pozitif tamsayılar ve sayısal eşitliklerin elde edileceğini bildirir. Bunlara karşın sonlu mantık ve saf görüsel düşünüş [rein anschaulische Überlegung] yoluyla temel sayı kuramını elde edebildiğini savlar. Saf görüsel düşünüşün sonlu toplamlar için yineleme ve görüsel tümevarım sağladığını ekler. Üstelik temel sayı kuramını elde etmek için tek yordam anılanlar olmak durumunda değildir. Hilbert bu bölüme koyduğu bir notta "temel sayı kuramının temellendirilişi aynı zamanda aksiyomlar aracılığıyla gerçekleşebilir, burada kısa olsun diye doğrudan görüsel temellendirmeye başvurdum"[95] demektedir. Öyleyse uygun aksiyomlar yoluyla da *1900'da* olduğu gibi temel sayı kuramı verilebilir.

Hilbert'e göre sonlu mantığın yanı sıra, olağan matematiğin sonlu ötesi teoremleri söz konusu olduğunda da kanıtlanabilir tam-deyimler elde edilmelidir. Bunun için sonlu ötesi aksiyomlar eklendikten sonra da tutarlılığın kanıtı verilebilmelidir. Bu somut görüsel içeriğe dayalı ve sonlu matematikten ayrılarak sonlu ötesi matematiğe yol almanın gereği olarak her/tüm [alle] ve öyle bir … olsun ki [es gibt] gibi iki kavramı da kullanıma sokmak gerekir. Bu kavramlar yoluyla üçüncü durumun olmazlığı ilkesi sonlucu matematiğe girer. Hilbert, Brouwerci gelenekten ayrı olarak bu ilkeye matematikte yer verir. Belli bir özelliğin tüm nesnelerce taşınması, tümel evetleme eklemi kullanılarak, en az bir nesneye sağlanması ise tikel evetleme yoluyla sağlanır. Tam bu noktada Hilbert kendi kanıt kuramının sonlucu olduğunu, görüselci Weyl'in önü sürdüğü döngüsellik tehlikesinden uzak olduğunu bildirir.[96]

Sonsuzluk Üstüne

Hilbert, 1926 *Sonsuzluk Üstüne* (*Über das Unendliche*) adlı çalışmasına Weierstrass'ın matematiksel analize yaptığı katkıları anarak başlar. Buna göre Weierstrass, sonsuz küçükler hesabı konusunda yaptığı çalışmalarla bu alanda bulanıklıkları gidermiştir. Böylece artık gerçel sayılara ilişkin kavramlara dayanan tümdengelimsel yöntemleri kullanmak bakımından bir uzlaşı bulunur. Ancak yine de analizin temelleri konusunda tartışmalar sürmektedir. Hilbert açısından bu tartışmaların nedeni: "matematikteki sonsuzluk kavramının anlamının şimdiye kadar tam olarak açık kılınmamasıdır"[97]. Her ne kadar Weierstrass sonlu büyüklükler yoluyla sonsuzluğu konu etmeyi göstermiş olsa bile yine de gerçel sayıları tanımlayan sayısal dizgelerde olduğu gibi sonsuzluk halen kullanılmaktadır. Hilbert sorunu çözmek için şu öne sürümü ortaya atar:

---

94 1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
5. $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}$
7. $a = a$
8. $a = b \rightarrow (A(\mathrm{a}) \rightarrow A(\mathrm{b}))$
9. $a + 1 \neq 0$
10. $\delta\ (a + 1) = a$

95 Hilbert, "Die Logischen Grundlagen der Mathematik", 154.

96 Hilbert, "Die Logischen Grundlagen der Mathematik", 160.

97 Hilbert, "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, sayı 95 (1926), 161.

"sonsuz bir toplam anlamında sonsuzluk -ki bu sonsuzluğu hala tümdengelimsel yöntemlerde kullanılmış olarak buluruz- salt bir yanılsamalı bilgidir"[98]. Yapılması gereken tıpkı Weierstrass'ın sonsuz küçükleri sonlu işlemlerle değiştirmesi gibi sonsuza dayalı tümdengelimsel yöntemleri sonlu işlemlerle değiştirmektir.

Geometrideki sonsuzluk söz konusu olduğunda Hilbert fizikteki sonsuzlukla ilgili sorunlara dikkat çeker. Sözgelimi fizik dünyada varolanların sonsuzca bölünebildiklerini söylemek olanaklı değildir. Planck'ı anarak çeşitli katmanlarda duran enerjinin sonsuzca bölünemeyeceğinin gösterildiğini anımsatır. Bu nedenle süreyin [Kontinuum] sonsuzca bölünebilirliğinin bir ide olarak yalnızca düşüncede gerçekleşebilir olduğunu düşünür. [99]

Hilbert "düzlemdeki noktalar ve düz çizgiler kökensel olarak gerçektir ve edimsel olarak [wirklich] varolan nesnelerdir" [100] demektedir. Buna karşın geometride, edimsel nesnelerden ideal nesnelere geçilir. Şöyle bir örnek verir. "İki noktadan tek bir düz çizgi geçer" aksiyomundan iki düz çizginin en çok bir noktada kesiştiği sonucuna ulaşılır. Fakat iki düz çizginin her zaman bir noktada kesişeceği bir teorem değildir çünkü çizgiler paralel de olabilir. Araya ancak sonsuzca uzanan çizgiler ve sonsuzda noktalar gibi ideal öğeler katıldığında teoreme ulaşılabilir. İdeal ögelerin katılma koşulu ise tutarlılıktır[101]. Buna göre çelişkiye yol açmadığı sürece dizgeye ideal öğeler katılabilir.

Hilbert açısından "Matematiksel analiz sonsuzun bir senfonisidir"[102] fakat analiz sonsuzun ne olduğuna ilişkin en derin kavrayışı sunmaz. Bunu yapabilen Cantor'un eliyle oluşturulan küme kuramıdır. Hilbert buradan Cantorcu sonlu ötesi sayılara odaklanılarak matematiğin temellendirilebilmesi ve paradokslardan arındırılması için sonsuzun yapısının ortaya konması gerektiği sonucuna ulaşır. Tam burada Hilbert sonsuzun gerçeklikte [Wirklichkeit] bulunamayacağını öne sürer.[103] Peki nasıl olur da düşünceye konu edebildiğimiz sonsuz gerçeklikte bulunamaz. Bunun yanıtı ancak sonsuzun ne olduğunun bir çözümlemesiyle olanaklıdır.

Hilbert'in bu çözümlemede yolu Kant ile kesişir. Kant'ta matematiğin konusunun mantığın konusundan ayrı oluşundan yola çıkarak matematiğin salt mantık üzerinde asla temellendirilemeyeceğini öne sürer.[104] Hilbert'e göre Frege'nin ve Dedekind'in hatası tam da salt mantık yoluyla matematiği anlamaya çalışmalarından kaynaklanır. Hilbert açısından mantığı olanaklı kılan, her çıkarım ve mantıksal işlemi önceleyen bir verilmişlik bulunmalıdır. Bu nokta çalışmamızda pek çok kez vurguladığımız Hilbert'in biçimselciliğinde görünün işlevini anlamak açısından önemlidir. Hilbert şöyle der: "görüsel olarak dolaysızca deneyimlenen belirli, mantık-dışı somut nesneler, tüm düşünmeyi önceler"[105]. Mantıksal çıkarımın kesin olabilmesi için

98 Hilbert, "Über das Unendliche", 162.
99 Hilbert, "Über das Unendliche", 164.
100 Hilbert, "Über das Unendliche", 166.
101 Hilbert, "Über das Unendliche", 179.
102 Hilbert, "Über das Unendliche", 166.
103 Hilbert, "Über das Unendliche", 170.
104 Hilbert, "Über das Unendliche", 171.
105 Hilbert, "Über das Unendliche", 171.

her kesimlerinden görünür olması gereken bu nesnelerin özellikleri, ayrımları, sıralanışları ya da yan yana dizilişleri verilmelidir. Üstelik görüsel olarak dolaysızca verilen bu nesneler başka bir şeye indirgenemez, indirgenme gereksinimi gerektirmez.[106] Hilbert bu zorunlu temelin yalnızca matematik için değil aynı zamanda tüm bilimler için gerekli olduğunu da ekler. Tam da görüsel içerik vurgusundan dolayı matematikte araştırma nesnelerinin "açık ve tanınabilir biçimleri somut imlerin kendileridir"[107]. Sonlu olağan matematik göz önünde tutulduğunda "içeriksel görüsel düşünüş yoluyla sayı-yapılarından [Zahlenkonstruktion] kesin biçimde yapılandırılabilir"[108]. Kuşkusuz matematik salt sayısal eşitliklerden meydana gelmez ancak yine de matematiğin içeriği genişletilirken çıkış noktası somut, görüsel içeriksel araştırma ve sonlucu tutumdur. Matematikteki doğrulukları güvence altına alan içgörünün [Einsicht] dayanağı da görüsel ve sonlucu yaklaşımdır.

Hilbert açısından sayı kuramında geçen imler, söz gelimi 1, 11, 111, 11111'lerde olduğu gibi görüsel olarak tanınabilir. "Araştırma nesneleri olan bu sayı imlerinin kendilerinde [an sich] bir anlamı [Bedutung] bulunmaz"[109]. Bu noktada Hilbert'in vurgusu görüsel olarak verilmiş imlerin bulunmasına ilişkindir. Bu imler 1, 11, 111… olabildiği gibi bunlar yerine *,**,*** gibi başka türlü imler de olabilirdi. Bu imlerin sayı kuramı açısından anlamları olmasına karşın kendi başlarına bir anlamları yoktur. Burada ortaya çıkabilecek bir soru imlere bir bağlam içinde anlam vermenin nasıl gerçekleştiğidir. Hilbert bunu zihnin kendiliğinden bir edimi olarak görür. Olağan sayı kuramında yer alan +, 0, >, ya da 2, 3 gibi diğer sayı imleri de, görüsel belli bir içeriğin yinelenmesini kısaca imlemek için kullanılır. Bu bağlamda 2 imi 11 imi yerine kısaltma amacıyla kullanılır. 3 > 2, 111 iminin 11 iminden daha büyük olduğunu gösterir. Hilbert içeriksel çıkarım [inhaltliche Schlißen] yoluyla imler arasındaki bu bağıntıların gerekçelendirilebileceği görüşündedir.

Hilbert temel sayı kuramı bağlamında büyük sayılar söz konusu olduğunda imler arasındaki bağıntıların nasıl ele alındığını ise kendi döneminde bilinen en büyük asal sayıyı ele alarak şöyle açıklar: 39 basamaktan oluşan bu $\mathfrak{p}$ sayısı sonlucu kanıt çerçevesinde serimlenebilir. Kanıtlanmış yöntemler uyarınca $\mathfrak{p} + 1$ ve $\mathfrak{p}! + 1$ arasında en az bir asal sayı *vardır*. Söz konusu *vardır* (yukarıda öyle bir … olsun ki biçiminde de ifade etmiştik) [es gibt] şu ifade için bir kısaltmadır:

$\mathfrak{p} + 1$ veya $\mathfrak{p} + 2$ veya $\mathfrak{p} + 3$ … veya $\mathfrak{p}! + 1$ bir asal sayıdır.

Hilbert bu ifadelerin yerine şöyle denilebilmesinin de olanaklı olduğunu öne sürer: "şu tebeşir parçası kırmızı veya o tebeşir parçası kırmızı veya o tebeşir parçası kırmızı veya... bu tebeşir parçası kırmızı"[110]. Bunun yerine tebeşir parçaları arasında kırmızı olan biri var kullanılabilir. Demek ki, buradaki "var" sonlu bir toplam içindeki belli özelliği olan bir nesneye karşılık gelir. Hilbert bu kavrayışı, $\mathfrak{p} + 1$ veya $\mathfrak{p} + 2$ veya $\mathfrak{p} + 3$ … ile karşılaştırır. Bu sonuncusu gösterimde

106 Hilbert, "Über das Unendliche", 171.
107 Hilbert, "Über das Unendliche", 171.
108 Hilbert, "Über das Unendliche", 171.
109 Hilbert, "Über das Unendliche", 171.
110 Hilbert, "Über das Unendliche", 172.

sonsuz mantıksal bir ürün olarak görülmelidir. Sonludan sonsuza böylesi bir geçişe izin verilemez. Sonsuzu ele alabilmenin koşulu, sonlu ifadeleri ideal ifadelerle desteklemektir. Şu durumda sorun ideal ifadelerin nasıl elde edilebileceğidir. Hilbert matematiğin temelleri için şimdiye kadar yapılanların sürdürülmesi gerektiğini belirtir.[111] Temel matematik, ideal nesnelerin eklenmesiyle görüselci sayı kuramının ötesine geçmiştir. Görüsel-içeriksel sayı kuramı cebirsel harf-hesabı yöntemlerinde içerilmez. Tam-deyimler görüselci sayı kuramında iletim için, harfler ise sayı imlerini göstermek için kullanılır. Eşitlik ise iki imin uyuştuğunu bildirir. Cebirde harfler, sayı kuramının içeriksel tümcelerini bildirir. Sayı imleri hakkında ifadeler yerine, kendileri görünün somut nesneleri olan tam-deyimler bulunur. İçeriksel sayı kuramının kanıtları yerine, belirli kurallar uyarınca belirli tam-deyimlerin başka tam-deyimlerden türetilmesini sağlar. Hilbert'in burada söylediklerini şu örnek yoluyla daha açık görebiliriz.

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathrm{a}$

Yukarıda $\mathfrak{a}$ ve $\mathfrak{b}$ sayı imlerini gösterir [bedeuten]. Bu imler yerine Hilbert şunları kullanır:

$a + b = b + a$

Hilbert bu tam-deyimin artık içeriksel dolaysız bir iletim değil fakat sonlu ifadelerle bağlantılı bir biçimsel yapı olduğunu bildirir. Burada *a* , *b,* =, + imleri ve aynı zamanda $a + b = b + a$ tam-deyimi kendilerinde bir şeyi göstermez [an sich nichts bedeuten][112]. Yine de bu tam-deyimden anlam yükleyebileceğimiz [eine Bedeutung zuschreiben] başka tam-deyimler türetilebilir. Matematikte iki tür tam-deyim bulunur. İlki sonlu ifadelerin karşılık geldiği içeriksel iletim ikincisi hiçbir şey göstermeyen [nichts bedeuten] ve kuramın ideal yapıtaşlarını [Gebilde] oluşturan tam-deyimler.[113]

Öyleyse Hilbert açısından çeşitli sayı imleri içeren sonlu ifadeler söz gelimi 3>2, 2+3=3+2 sonlucu tutum yoluyla dolaysızca görüsel olarak anlaşılabilir. Bu tür ifadelere mantık yasaları sorunsuzca uygulanabilir. Bunların yanında matematikte bir de ideal ifadeler yer alır. Bu ifadeler ise sonlu önesürümleri dile getirmedikleri sürece bir şey göstermez [nichts bedeuten][114]. Hilbert buradan mantıksal işlemleri ve matematiksel kanıtları biçimselleştirme bağlamını koyar. &, v, →, - [değil] mantıksal eklemleri, *a, b, c* matematiksel değişkenleri ve *A*, *B*, *C* önermesel değişkenleri ifade eder.

Hilbert, *Principia Mathematica'yı* ima ederek mantıksal kalkülüsün [Logikkalküls] halihazırda Russell aracılığıyla sunulduğunu belirtir. Ona göre Russell her ne kadar mantıksal kalkülüsü başka amaçlarla geliştirmiş olsa da kalkülüs herhangi bir mantıksal ime anlam yüklemeyen sonlu bakış açısıyla tutarlıdır. Böylece mantıksal kalkülüste, matematiksel ifadeleri tam-deyimlere dönüştürecek bir biçimsel dil bulunur. Eş deyişle, içeriksel sayı kuramından cebire geçiş gibi, mantıksal kalkülüsün imleri ve işlem-simgeleri içeriksel gösterimlerinden [inhaltlichen Bedeutung] ayrılır. Böylece gündelik dille iletilen içeriksel matematik yerine, matematiksel ve

111 Hilbert, "Über das Unendliche", 174.
112 Hilbert, "Über das Unendliche", 175.
113 Hilbert, "Über das Unendliche", 176.
114 Hilbert, "Über das Unendliche", 176.

mantıksal imler içeren tam-deyimler elde ederiz. Tam-deyimlerden belli başlıları aksiyomlara, tam-deyimlerin elde edildiği kurallar ise matematiğin biçimsel yapısına karşılık gelir.

Hilbert, matematiğin biçimsel yapısının [Gebäude] yapıtaşı [Baustein] olarak iş gören tam-deyime aksiyom der.[115] Matematiksel kanıt ise görüsel olarak erişilebilen bir şekildir [Figur]. Hilbert burada da 1922'de kullandığı türetim şemasını kullanır.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

Hilbert şöyle der: "biçimsel bir kanıt, tıpkı sayı imi gibi, somut ve görülenebilir bir nesnedir"[116].

Metni tamamlarken Hilbert görüşlerinin özeti niteliğinde şunları söyler[117]: "Bilimsel bilginin olanağının koşulları belirli görüsel tasarımlar [gewisse anschauliche Vorstellungen] ve kavrayışlardır [Einsichten]. Mantık tek başına yeterli değildir." Görüldüğü üzere Hilbert bir kez daha görüyü odakta tutarak biçimselcilik anlayışının salt bir terim biçimselciliği olarak görülemeyeceğini ortaya koymaktadır.

Matematiği Temellendirme Sorunları

1929 *Matematiği Temellendirme Sorunları* (*Probleme der Grundlegung der Mathematik)* metninde Hilbert 1899'dan beri sürdürdüğü aksiyom tartışmasını bir kez daha konu eder. Aksiyomların mutlak doğruluk olmadığı, dizge içinde doğruluk değeri taşıdığı düşüncesini sürdüren Hilbert Cantor, Frege, Dedekind'i anarak aksiyomlara doğruluk yükleyen bir aksiyomatik dizgenin matematiği güvence altına alamayacağını öne sürer: "içeriksel aksiyomları başlangıç noktası olarak ve temelleri kanıtları için kullanırsak, bu durumda matematik mutlak kesinlik niteliğini kaybeder"[118] Kendi kanıt kuramı ise yeni bir temellendirme denemesidir. Bu temellendirme ile her türlü matematiksel ifadenin somut, sergilenebilir, özenli biçimde türetilebilen bir tam-deyime dönüşebileceğini varsayar.

Kanıt kuramının sonlucu tutumla ve görüyle bağıntısını ise şöyle anlatır[119]:

> Bir kanıt ya da ifade verilirse, tüm parçaları bakımından incelenebilir olmalıdır. Gösterilişi, tanınması, ayrımları ve tekil parçaların ardışıklığı dolaysızca görülenebilir [anschaulich] olmalıdır. Böylesi bir yaklaşım olmadan düşünce ya da bilimsel etkinlik olanaksızdır.

115 Hilbert, "Über das Unendliche", 177.
116 Hilbert, "Über das Unendliche", 179.
117 Hilbert, "Über das Unendliche", 190.
118 David Hilbert, "Probleme der Grundlegung der Mathematik", *Mathematische Annalen* 102, sayı 1 (1930), 3.
119 Hilbert, "Probleme der Grundlegung der Mathematik", 7.

Anlaşılacağı üzere tutarlılık araştırması, kanıtın sonlu ve ayrımsanır olması koşuluyla sürdürülür. Üstelik Hilbert, kanıt kuramı yoluyla matematikte her doğru sorulmuş sorunun çözülebileceği sanısındadır. Bu nedenle matematikte *ignorabimus* (bilinemez) yoktur.[120]

Doğa Bilgisi ve Mantık

1930 Doğa Bilgisi ve Mantık (Naturerkennen und Logik) metninde Hilbert bir kez daha aksiyom tartışmasını ele alır. Bu kez doğa bilimleri açısından aksiyomların önemine değinir. Doğa bilimlerindeki kuramsal tartışmalarda aksiyomların tuttuğu yere dikkat çekerek pek çok bilgi alanında birkaç tümcenin kuramın tüm yapısını saf mantıksal bir yolla yapılandırabileceğini belirtir.[121] Ardından aksiyomatik yöntemin mantık içinde yer aldığının, dönemin mantığının bir bilim olarak son derece anlaşılır oluşunun altını çizer. Bu noktadan sonra, *1926 SÜ'deki* tavrına koşut olarak sonlucu ve görü temelli düşünüşü koruyacak biçimde sonsuzluk bağıntısını ele alır.[122]:

> Sonsuzun görüsel bir gösterimi [Bedeutung] yoktur ve yan soruşturmalar olmaksızın tümüyle anlamsızdır [keinen Sinn hat]. Demek ki yalnızca sonlu şeyler bulunur. Sonsuz bir hız bulunmaz, hiçbir kuvvet ya da etki kendini sonsuzca yaymaz. Dahası, etkinin kendisi ayrık bir doğada ve yalnızca quanta biçiminde var olur. Sonsuzca bölünmeyi sürdüren hiçbir şey yoktur.

Sonlucu ve görücü bu yaklaşım bağlamında Kantçı felsefenin her türlü bilginin görüde sergilenebilir olma tavrının Hilbert üzerinden sürdüğü düşünülebilir. Ne var ki, Hilbert kendi sonsuz anlayışının Kantçı antinomilerin temelsiz olduğunu gösterdiğini savlar. Bunun nedeni Hilbert'e göre Kant'ın uzayın sonsuzca bölünebileceğini varsaymasıdır. Oysa kendisine göre bu olanaklı değildir. Kant'ın uzayı bir görü sayıp, uzayla ilgili her türlü düşünüşü, olanak olarak sonsuzca bölünebilmeyi buradan çıkarması gözden kaçmamalıdır.

Hilbert metnin devamında doğa ile düşünce arasındaki bağıntının nasıl kurulduğuyla ilgilenir. Ona göre doğa ile düşünce ve deneyim ile kuram arasındaki uyum onlarla bağlantılı biçimsel öğeler göz önünde bulundurulursa anlaşılır.

Hilbert Hegel'in doğada olup bitenlerin kavramlar yoluyla çıkarsanabileceğine yönelik anlayışına karşı çıktığını belirterek şunları sorar: Dünyanın yasalarının kökeni nedir? Bu yasaları nasıl elde ederiz? Gerçeklikte çakıştıklarını bize kim öğretir? Şöyle yanıt verir: "deneyim bunu yalnızca olanaklı kılar"[123] Hilbert'e göre Hegel açısından dünya yasaları salt kavramsal düşünümle, deneyim olmadan elde edilemez. Fiziksel kavramların çerçevesinin yapılandırılması sırasında pek çok kurgusal bakış açısı bulunsa bile, koyutlanmış [aufstellen] yasaların ve kavramların mantıksal çerçevesinin düzgün olup olmadığı deneyim yoluyla anlaşılır.

120 Hilbert, "Probleme der Grundlegung der Mathematik", 7.
121 David Hilbert, "Naturerkennen und Logik", içinde *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen Band III* (Springer, 1970), 379.
122 Hilbert, "Naturerkennen und Logik", 380.
123 Hilbert, "Naturerkennen und Logik", 383.

Hilbert'in ne tür bir biçimselcilik anlayışında olduğunu göstermesi açısından onun deneyim aracılığıyla kavram çerçevelerinin düzenleniyor olduğuna ilişkin görüşü dikkate değerdir. Anlaşılacağı üzere Hilbert salt kavramsal bağıntıların sağlanması yoluyla kuramın düzgün olmayacağını vurgulamaktadır. Hilbert, bu tartışma bağlamında yeniden Kant'ı ele alır. Bu kez Kant'ın deneyim ve mantık dışında gerçekliğe ilişkin *a priori* bilgilerimiz olduğuna yönelik yaklaşımını konu eder. Bu çerçevede kendi görüşlerini ise şöyle açıklar[124].

> Çoktan gösterdiğim gibi bir kuramsal çerçevenin yapılandırılması için belirli *a priori* kavrayışlar [gewisse a priorische Einsichten] zorunludur ve onlar her zaman bilgimizin temellerinde yer alır. İnanıyorum ki, matematiksel bilgi son kertede böylesi bir tür görüsel kavrayış [anschaulicher Einsicht] üstüne dayanır. Sayı kuramının yapılandırılabilmesi için belirli görüsel bir tutuma [gewisse anschauliche Einstellung] *a priori* sahip olmalıyız.

Görüldüğü gibi Hilbert, görü temelli sayı anlayışını sürdürmektedir. Öyle ki, Hilbert görüsel tutumu her türlü deneyimde kavramsal bilginin koşulu olarak varsayar.[125] Matematik hakkındaki araştırmalarında bu görü temelli yaklaşıma bağlı kaldığını özellikle bildirir. *A priori* temel bir tutumdur, düşünce ve deneyimin ayrılmaz önkoşullarını serimler.

Hilbert, kendi *a priori* anlayışı ile Kant'ınki arasında ayrım koyarak, Kant'ın *a priorinin* rolünü ve uzanımı azımsadığını öne sürer. Kantçı uzay ve zaman anlayışı Hilbert açısından fiziğin gelişimi ve bunun yanı sıra Riemann ve Helmholtz'un çalışmaları sonrasında savunulamaz duruma gelmiştir. Bunun nedeni Hilbert'e göre "geometrinin gerçek [wirklich] şeylerin dünyasında katı şeyler arasında olanaklı konumsal bağıntıları eşleyen [abbild] kavramların toplam kavramsal çerçevesinden başka bir şey olmamasıdır"[126]. Öyleyse hangi geometrinin kullanılacağını belirleyen deneydir. Dahası Hilbert, *a prioriliğin* tarihsel gelişimi içinde önceleri *a priori* olarak görülen pek çok şeyin zaman içinde değişerek doğru bile sayılmadığını anımsatır. Bunun bir örneği olaraksa Newton ve Kant'ın zaman anlayışlarına atıf yaparak "mutlak şimdi"yi [absoluten Gegenwart] verir. Hilbert, Einstein'ın görelilik kuramının hem zamanın mutlak olmadığını hem de geometrinin uzayın bir dalı olduğunu ortaya koyduğunu ileri sürer. Dahası "geometrinin doğrulukları ilkesel fiziğin doğruluklarından ayrı değildir"[127]

Saf matematik bilginin temelinde yer alan kendi *a priori* tutumunun benimsenmesi gerektiğine işaret eden Hilbert, bunun tüm yordamları ile sonlucu matematiği sürdürmek anlamına geldiğini ileri sürmektedir. Böylece Hilbert deneyim ve çıkarım yapabilmenin yanına üçüncü bir bilgi kaynağı olarak *a priori* tutumu koyar. *A priori* tutum ise matematiği temellendirir. Böylece metne girerken soruşturduğu doğa ile düşünce, deneyim ile kuram, düşünce ile gözlem arasındaki

124 Hilbert, "Naturerkennen und Logik", 383.
125 Hilbert, "Naturerkennen und Logik", 383.
126 Hilbert, "Naturerkennen und Logik", 383.
127 Hilbert, "Naturerkennen und Logik", 384.

aracıyı matematik olarak ilan eder.[128] Sonlucu, aksiyomatik dizgeye dayanıyor olmasından ötürü de, bir kez daha matematik ve doğa biliminde *ignorabimus* olmadığını söyleyerek, ekler: "Bilmek zorundayız, bileceğiz!"

Temel Sayı Kuramının Temellendirilmesi

1931'de *Temel Sayı Kuramının Temellendirilmesi (Die Grundlegung der Elementaren Zahllehre)* metninde *1930 DBM'de* olduğu gibi bilginin kaynaklarına yönelik anlayışını sürdüren Hilbert deneyim ve saf düşüncenin yanında bir başka bilgi kaynağı olduğunu ekler. Hilbert Kant'la ayrıntılarda hemfikir olmasa bile Kantçı bilgi kuramının temel düşüncesini korumaktadır: "*a priori* görüsel tutumu [anschauliche Einstellung a priori] saptamak ve onunla tüm bilginin olanağının koşullarını araştırmak"[129].

Hilbert matematiğin ilkelerini araştırırken tam da bu görüsel tutumla iş yaptığını bir kez daha yineler. Ona göre aynı zamanda sonlucu tutum olarak da adlandırılabilecek olan *a priori* görüsel tutum temel bir tutum olarak anlaşılmalıdır. Şöyle devam etmektedir[130]:

> Tasarımlama yetimizde bir şey bize önceden verilmeli. Bu tüm düşünceden önce dolaysız bir yaşantı [Erlebnis] olarak görüsel biçimde varolan mantık-dışı belirli somut nesnelerdir. Mantıksal çıkarımın kesin olması için bu nesneler tüm parçalarında ayrıştırılabilir olmalıdır ve gösterilişleri, ayrımları, birbirlerini izleyişleri ya da birbiri ardına dizilişleri, ne indirgenme gereksinimi olan ne de başka bir şeye indirgenebilir bir şey olarak, nesnelerle birlikte, dolaysızca ve görüsel olarak verilmelidir.

İşte bu Hilbert'in matematik ve tüm bilimler için zorunlu bulduğu temeldir. Sonlucu matematik kavrayışının kökeni de bu görüsel verilmişliktir. İnsan zihni *a priori* olarak kendisine sunulan nesneleri aksiyomatik bir düzeye taşıyacak yapıdadır. Bu düzeye geçerken ortaya konulan imler, onlara kaynaklık eden nesnelerin özelliklerini yansıtmak durumunda değildir. İmlerin nasıl kullanılabileceği bütünüyle kurmacadır. Kurmaca olanlar mantığın yardımıyla birbirleriyle bağıntı içine sokulabilir. Ortaya çıkan dizge ise deneyim yoluyla gerçeklikte sınanabilir. Dolayısıyla Hilbert'in Kant'a karşı bir Kantçı olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır. Yukarıda da ortaya koyduğumuz üzere Hilbert'in kendisi de içeriğini farklılaştırarak bu Kant çıkışlı *a priori* görüsel zeminde olduğunu bildirmektedir. Bu nedenle Hilbert Kant'ın *a priori* sandığı fakat deneyimden kaynaklanan doğruluklara işaret eder. Hilbert'in Kant'tan keskin bir biçimde ayrıldığı nokta geometride açığa çıkar. Önceden de dile getirdiğimiz üzere, Hilbert geometrinin deneyimle düzenlendiğini düşünür. Oysa Kant açısından geometri *a priori* temellerde kurulur. Bunun yanı sıra Hilbert açısından *a priori* görülen fakat sonlu düşünüş çerçevesinde kazanılamayan tümceler bulunur.[131] Bunlar *tertium*

---

128 Hilbert, "Naturerkennen und Logik", 387.

129 David Hilbert, "Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre", *Mathematische Annalen* 104, sayı 1 (1931), 486.

130 Hilbert, "Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre", 486.

131 Hilbert, "Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre", 486.

non datur (üçüncü durumun olmazlığı) ilkesi ile sonlu-ötesi ifadelerdir. Bu noktada doğal olarak Hilbert'in *a priori* kaynaklardan edinilmediğini düşündüğü bu tümcelerin nasıl ortaya çıktıkları sorusu akıllara gelir. Hilbert, açık olarak belli bir noktaya işaret etmemiş olsa bile insan bilgisinin kaynaklarını deneyim, görüsel a *priori* tutum ve saf düşünüş olarak bölümlemesinden, söz konusu kaynağının saf düşünüş olduğu anlaşılabilir. Üstelik bu çıkarım Hilbert'in tüm matematiğin sonlucu temeller üzerine kurulu olduğu görüşüyle de uyumludur. Bu uyumu şöyle açıklamaya çalışalım.

Hilbert'in matematik ve felsefedeki konumlanışı, aralarındaki kimi ortaklıklara karşın Brouwer ve görüselci okulla karşıtlık üzerinde kuruludur. Görüselci gelenek, kanıtlama aşamalarında üçüncü durumun olmazlığı ilkesinin kullanılmasına karşıdır. Hilbert ise gerek bu ilkenin gerekse sonlu ötesi çıkarım kiplerinin sayı kuramının geliştirilmesi açısından gerekli oluşunu kimilerini de yukarıda gördüğümüz üzere pek çok kez yinelemiştir. Hilbert üçüncü durumun olmazlığı ilkesinin matematiksel çıkarımlarda kullanımı konusundaki güvenceyi deneyimin sağladığını düşünmektedir. Bu ilkenin kullanılmasıyla meydana getirilen görelilik ya da kuantum kuramlarında yapılan betimlemeler doğayla örtüşmektedir. İşte bu örtüşme ilkenin kullanımını güvence altına almaktadır.[132] Üstelik Hilbert açısından bu ilkenin kullanıldığı ve sonlu-ötesi çıkarımların yapıldığı temel matematikte ortaya konulanlar doğru sayılmasaydı bilimlerin ölümü gerçekleşebilirdi. Dolayısıyla deneyim yoluyla üçüncü durumun olmazlığı ilkesinin kullanımı haklılaştırabilir. Öte yandan Hilbert, kendi kanıt kuramı yoluyla da bu haklılaştırmanın sağlanabileceği görüşündedir. Sonlu ifadeler açısından üçüncü durumun olmazlığı ilkesinin kullanımı konusunda bir açmaz bulunmadığına ve kendisinin sonsuzla ilişkisinin sonlu ifadelerin tutarlılığını bozmayan ideal nesneler yoluyla olduğu hesaba katıldığına göre temelsiz bir kullanım olamayacağı varsayılmaktadır.

Hilbert'in yaptığı bütün bu vurgular sonlucu kanıt kuramının titizliğine ve çıkarımlar arasında boşluk bulunmayışına yönelik ilgisini ortaya koyar. Kendi kanıt kuramının matematiği temellendirme çabalarını nihai olarak tamamladığını şu sözleriyle ortaya koyar[133]:

> Matematiği temellendirme sorunundan bir kez ve son kez kurtulmak için her matematiksel ifadeyi somut olarak gösterebilir ve özenli biçimde türetilebilir bir tam-deyim yaparak ve böylece matematiksel kavram oluşumlarını [Begriffsbildung] ve çıkarımları geri çevrilemez bir duruma sokarak tüm bilimler için bir resim sağlayabilirim.

Hilbert'in kanıt kuramının temel düşüncesi matematiği özenli bir yolda biçimselleştirmek böylelikle matematiği tam-deyimlerin bir öbeği haline getirmektir. Hilbert'in matematiği çeşitli düzeylerde ele aldığını yukarıda da görmüştük. Olağan matematik görüsel temelli, sıkı şekilde biçimselleştirilmiş tam-deyimsel ifadelerden oluşur. Bu tam-deyimlere içerme ve değil eklemi yoluyla elde edilen tam-deyimler katıldığında ise özel matematik ortaya çıkar. Her iki matematikte

132 Hilbert, "Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre", 488.
133 Hilbert, "Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre", 488.

de biçimsel yapıda temel öğe olarak yer alan tam-deyim aksiyom olarak benimsenir.[134] Kanıt ise görüsel olarak sunulmak zorunda olan, her bir öncülün aksiyom olduğu çıkarımlardan oluşan şekildir [Figur]. Hilbert buradan üst-matematik tartışmasına geçer. Buna göre olağan matematiğe mantıksal eklemeler eklendikten sonra elde edilen özel matematiği güvence altına almak için üst-matematik gerekir. Üst-matematikte görülen saf çıkarım tarzlarına karşıt olarak içeriksel çıkarım yapılır. Amaç ise aksiyomların tutarlılığını kanıtlamaktır.

Daha sonra Hilbert olağan matematiğe eklediği içerme, tümel olumlama, tikel olumlama, değilleme, sonlu ötesi, eşitlik ve sayı aksiyomları uyarınca temel sayı kuramının tutarlılığını öğrencisi Wilhelm Ackermann (1896-1962) ve John von Neumann'ın (1903-1957) gösterdiğini belirtir. Böylece sonlu-ötesi çıkarımların temel sayı alanında yapılmasının kabul edilebilir göründüğünü ekler.[135]

Gödel ve Tamamlanmazlık Teoremleri

Görüldüğü üzere Hilbert, programı kapsamında geliştirdiği kanıt kuramı yoluyla aksiyomlar, aksiyomların tutarlılığı ve tamlığı, sonlu adımda dizge içindeki her sorunun çözülebilir olup olmamasıyla ilgilenmiştir. Öğrencisi Ackermann 1925 tarihli doktora tezi *Hilbertçi Kuramın Tutarlılığı ile "Üçüncü Durumun Olmazlığı" İlkesinin Kanıtlanması* (*Begründung des "tertium non datur" Mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit*) ve sonraki çalışmaları ile doğal sayılar aritmetiğinin tutarlılığını sonlucu yöntemle kanıtlamıştır. 1930 eylülünde Königsberg'te yapılan *Kesin Bilimlerde Bilgikuramı Üstüne* adlı konferansta genç Kurt Gödel (1906-1978) doğal sayılar aritmetiğinin tamlığı üzerine kısa bir sunum yapar. Daha sonra, I. tamamlanmazlık teoremi olarak bilinen ve 1931 yılında *Principia Mathematica* ve *Bağlantılı Dizgelerin Biçimsel Olarak Karar Verilmeyen Önermeleri Üzerine I* (*Über Formal Unentscheidbare Satze der 'Principia Mathematica' und Verwandter Systeme. I*) makalesini yayınlar. Burada öne sürülen sav, doğal sayılar aritmetiği ve onu içeren her dizgenin tutarlı olduğu varsayılsa bile tamamlanmaz oluşudur. Bunun anlamı dizge içinde karar verilmez tümceler bulunmasıdır. Başka deyişle, dizgedeki bir *p* önermesinin mi, yoksa ~ *p* önermesinin mi doğru olduğunun karar verilemeyeceği durumlar bulunur. Bu tamamlanmazlık yapısaldır öyle ki, bu karar verilemeyen tümcelerin dizgeye aksiyom olarak eklenmesi de sorunu çözmez çünkü karar verilemez tümceler ortaya çıkabilir. Böylece Gödel aksiyomlara dayalı tümdengelimsel dizgelerin sınırlılığını ortaya koyarak, birinci düzey yüklemlere dayalı olarak tüm matematiği tutarlı biçimsel bir dizge olarak ortaya koymanın olanaksız olduğunu kanıtlar.

Gödel'in tamamlamaz teoreminin sunumunu yaptığı konferansta dinleyiciler arasında yer alan John von Neumann (1903-1957) durumun Hilbert programı açısından önemini anlayarak bir süre çalıştıktan sonra Gödel'e mektup yazar. Mektupta Gödel'in zaten bulduğu ama yayınlamadığı daha sonra II. tamamlanmazlık teoremi olarak anılacak aritmetiğin tutarlılığının kanıtlanamaz oluşunu anlatır. Buna göre Gödel'in II. tamamlanmazlık teoremi

134 Hilbert, "Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre", 489.
135 Hilbert, "Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre", 491.

ile doğal sayıları içeren biçimsel bir dizgenin kendi tutarlılığını kanıtlayamayacağını ortaya koyar. Böylece *Principia Mathematica'nın* tutarlı olduğuna ilişkin biçimselleştirmenin başarısız olduğu kanıtlanır. Bu durum yıkıcı sonuçlar doğurur çünkü tutarlılığı sağlamak açısından ortaya atılan tüm sonlucu akıl yürütme yöntemlerinin *Principia Mathematica'da* biçimselleştirildiği düşünülmekteydi.[136] Hilbert *1918 AD'den* beri bu yöntemleri benimsemiştir. Bu gelişmeler sonrasında von Neumann'ın üniversitede Hilbert Programı hakkında verdiği dersi yarım bırakarak, derse Gödel'in teoremlerini tartışarak devam ettiği anlatılır.[137]

Hilbert Gödel'in sonuçlarına ilişkin tavrını ise 1934 yılında Bernays'la birlikte kaleme aldıkları *Matematiğin Temelleri'ne (Grundlagen der Mathematik)* yazdığı girişte şu sözlerle anlatır[138]:

> Yaygın bir sanıya göre, yakın zamanlardaki Gödel'in belirli sonuçlarından benim kanıt kuramımın uygulanamaz olduğu sonucunun çıktığı düşünülmektedir oysa bunun hatalı olduğu gösterilmiştir. Gerçekte bu sonuç yalnızca daha gelişmiş tutarlılık kanıtları için, temel biçimselcilik için gerekli olandan çok daha keskin bir sonlucu tavrın kullanılmak zorunda olduğunu gösterir.

Hilbert'in bu karşı çıkışına karşın gelenekte egemen anlayış, Gödel'in teoremlerinin Hilbert programı açısından ket vurucu olduğuna ilişkindir. Yine de Defletzen gibi kimi yorumcular Gödel'in II. teoreminin Hilbert programını yadsımadığını öne sürer.[139] Defletzen, Gödel'in tutarlılığı konu ettiği bağlam ile Hilbertçi anlamda tutarlılık arasında ayrım olduğunu savlar.

Gödel sonrasında Hilbert programı biçimsel dizgelerde tutarlık ve tamlık konusunda sekteye uğrasa da Hilbert'in uğraşları mantık ve matematiğe büyük katkılar sağlamıştır. Kanıt kuramının olgunlaşması, üst-matematiğin bir çalışma alanı olarak ortaya çıkması, mantığın aksiyomlaştırılması, önermeler mantığının biçimselleştirilmesi, tutarlı ve tam olduğunun ortaya konulması büyük oranda Hilbert'in çalışmaları yoluyla sağlanmıştır.[140]

Sonuç

Çalışmamıza başlarken Hilbert'in biçimselciliğinin salt terimler arasında bağıntılar yoluyla düşünülen bir biçimselcilik olmadığını öne sürmüştük. Bu çerçevede Hilbert'in matematiği temellendirme çabasının sonlucu tutum yoluyla gerçekleştiğini ve bunu olanaklı kılan her türden mantıksal çıkarımı önceleyen görüsel bir kavrayışın bulunduğunu vurguladık. Bu savı Hilbert'in çalışmalarında hangi kesimlere dayandırarak ileri sürdüğümüzü yeniden anımsayalım.

1899 GT'de Hilbert aksiyom gruplarının görüye ilişkin temel olgular hakkında olduğunu bildirip metne Kant'ın "bütün bilgimiz görülerle başlar" mottosunu alıntılayarak başlar. *1900*

136 Von Jan Plato, "The Development of Proof Theory", içinde *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta (Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018), https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/proof-theory-development/.

137 Plato, "The Development of Proof Theory".

138 David Hilbert ve Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik I* (Berlin: Springer, 1934), vii.

139 Michael Detlefsen, "On Interpreting Gödel's Second Theorem", *Journal of Philosophical Logic* 8, sayı 1 (1979), 309.

140 Plato, "The Development of Proof Theory".

SKÜ'de şeylerin bir dizgesini düşünüp, bunları sayılar olarak adlandırdığını ve karşılıklı bağıntılarını araştırdığını açıklar. Şu durumda Hilbert, matematik yapmayı önceleyen, şeylere ilişkin bir verilmişlikle başlar. Matemağin bilgikuramsal kökenleri düşünüldüğünde aksiyomlar dizgesinin yoktan ortaya çıkmadığı, olgusal içeriklere yönelik düşünümsel süreçlerle ilişkilendirilmesi gerekliliği doğar.[141] Bu durum *1899 GT'de* kavramların çeşitli bağıntılar bakımından dile getirilmesini aksiyom olarak gördüğünü bildirmesiyle uyumludur çünkü aksiyom temelli pek çok kurgusal bağıntıyı sergileyen dizgeler oluşturulabilir. Bu dizgelerden kimileri soruşturulmaya değer bulunup doğaya yönelik araştırmalarımızda kullanılır. Öyleyse doğadaki düzenliliklerin anlaşılması ve her bilimin bir dizi aksiyom yoluyla doğanın kesitlerini açıklaması için kavramlar ile bağıntılarının dünyada sınanması gerekir. Bu nedenle 1918 *AD'de* aksiyomların geçerliliğinin deney yoluyla onaylanması gerekliliğini işaret eder. Daha sonra *1930 DBM'de* geometrinin gerçek [wirklich] şeylerin dünyasında katı şeyler arasında olanaklı konumsal bağıntıları eşleyen [abbild] kavramların toplam kavramsal çerçevesinden başka bir şey olmadığını ileri sürer.

Yine 1918 *AD'de* biçimselcilik ve içerik bağıntısıyla ilgilendiğini de bildirir. 1923'te "görüden elde edilen yayılımsal büyüklük [extensiven Größe] kavramı"ndan söz eder. Üstelik herhangi bir dalında temel ilkelerin görüsel olması gerektiğini vurgular. Dolayısıyla Hilbert'in dizgesel bir yapı olarak matematiğe başlamak için görüyü yok saydığını öne sürmek olanaklı değildir. Bununla birlikte aksiyomlara dayalı bir dizgede aksiyomların olgu durumlarını resmettiği de söylenemez. Aksiyomlar ile olgusal içerikler arasında böylesi bir karşılıklılık bulunmaz. Aksiyomlar dizgedeki bağıntıların olanaklı biçimlerini serimler. Bu nedenle doğrulukları dizgeye duyarlıdır. Kendi başlarına doğrulukları bulunmaz, dizgedeki mantıksal işlemlere göre doğruluk kazanırlar. Ne var ki, Hilbert mantıksal işlemleri konu edebilmek için zihnin bir verilmişlikle karşı karşıya olması gerektiğinin de altını çizer. Bu bölümü anımsayalım[142]:

> Mantıksal işlemlerin uygulanması ve mantıksal çıkarımların kullanılması için bir koşul olarak tasarımlamada bir şeyin önceden verilmesi gerekir: tüm düşünceyi önceleyen dolaysız yaşantı olarak görüsel [anschaulich] mantık-dışı [außer-logische] belirli somut nesne [verilmelidir]. Mantıksal çıkarım güvenilir olacaksa, bu nesneler tüm parçalarında bütünüyle araştırılabilir olmak zorundadır. Gösterilişleri [Aufweisung], ayrımları, ardışıklıkları, birbirlerini izleyişleri dolaysızca görüsel olarak verilir ve başka hiçbir şeye indirgenemez.

Demek ki, sayı hakkında konuşabilmek, sayı bağıntılarını mantıksal bir dizge içinde tutabilmek için biçimlerin uzay ve zaman koşullarında tutulmasını sağlayan görüsel bir kavrayışımız olmalıdır. Bu kavrayış yoluyla somut verilmişliği, olduğu biçimden arındırıp onu im durumuna getirebiliriz. Bundan dolayıdır ki, Hilbert "başlangıçta im" bulunduğunu söyler. Böylece Hilbert, bir sayıya gönderim yapan im ile sayı arasındaki bağıntıyı tartışabilmek için imin fiziksel bir nesne olarak özelliklerini konu eder: İmin biçimi, uzay ve zamandan, oluşturulmasının özel koşullarından ve sergilenişindeki önemsiz ayrımlardan bağımsız olarak kavranılır. Zach bu

141 Michael Hallett, "Hilbert and Logic", *Québec Studies in the Philosophy of Science* 177 (1995), 136.
142 Hilbert, "Neubegründung Der Mathematik", 163.

durumu Hilbert'in rakamdan ne anladığının belirsiz olduğu biçiminde yorumlasa da[143] bize göre burada Hilbert'in sorunsalı sayıyı herhangi bir rakamla gösterebilmenin zeminini kurmaktır. Böylesi bir zemin yokluk ya da aşkınlık değil görüsel verilmişliktir. Ancak bu verilmişliği alımlamanın tek bir biçimi yoktur. İşte Hilbert'in im kavrayışı bize göre rakamı imleyen fiziksel örüntünün istenildiği gibi farklılaştırılabilmesini sağlar. Bundan dolayı aksiyomlara dayalı bir dizgede başlangıçta verilen nesnelerin dilediğince değiştirilebileceğini varsayar. İster nokta, çizgi vb. kullanılabilir isterse de yasa, baca, aşk vb. Hilbert dizge içinde bağıntıları ortaya konulacak nesneleri dışlaştırılabilen imlerden seçer, onlarla işlemler yapar. Bu bağlamda az önce andığımız "aşk" herhangi bir anlambilimsel içerikle değil, bir bağlamda anlam kazanacak im topluluğu olarak görülmelidir. İmler, çizgiler ya da vuruşların peş peşe dizilişidir. Bir ime herhangi bir soyut nesne karşılık gelmez. İmlerin özellikleri ve bağıntıları görüseldir.

Dahası Hilbert açısından tam-deyimler, kanıtlar ve aksiyomların bulunduğu biçimsel bir dizgede de kanıtlar görüsel olarak göz önüne getirilmesi gereken şekillerdir ve çıkarım şemalarına göre yapılan çıkarımlardan oluşur. Bundan dolayı somut-görüsel sayı kuramı açısından sayılar nesnesel ve gösterimsel olarak nitelenir. Görü temelinde imlerin işlemleri Hilbert'in meta-matematiğini oluşturur. Meta-matematik imlerin (tam-deyimler, kanıtlar) dizileriyle iş görür. Düzgün tam-deyimler, kanıtlar sözdizimi uyarınca işletilebilir.

1926 *SÜ'de* Hilbert "görüsel olarak dolaysızca deneyimlenen belirli, mantık-dışı somut nesneler, tüm düşünmeyi önceler" demektedir. Mantıksal çıkarımın kesin olabilmesi için bu nesneler her kesimlerinden görünür olmalıdır. Özellikleri, ayrımları, sıralanışları ya da yan yana dizilişleri verilmelidir. Üstelik görüsel olarak dolaysızca verilen bu nesneler başka bir şeye indirgenemez, indirgenme gereksinimi gerektirmez. Benzer biçimde *1929 MTS'de* kanıt kuramında bir kanıt ya da ifade verilirse, tüm parçaları bakımından incelenebilir olması gerekir demektedir. Bunun anlamı kanıtın gösterilişinin, tanınmasının, ayrımları ve tekil parçaların ardışıklığının dolaysızca görülenebilir olmasıdır. Böylesi bir yaklaşım olmadan düşünce ya da bilimsel etkinlik olanaksızdır.

Hilbert'e göre matematikteki doğrulukları güvence altına alan içgörünün [Einsicht] dayanağı da işte bu görüsel ve sonlucu yaklaşımdır. Bilimsel bilginin olanağının koşulları belirli görüsel tasarımlar [gewisse anschauliche Vorstellungen] ve kavrayışlardır [Einsichten]. Mantık tek başına yeterli değildir.

1930 DBM'de koyutlanmış [aufstellen] yasaların ve kavramların mantıksal çerçevesinin düzgün olup olmadığının deneyim yoluyla anlaşılacağını belirtir. Bu metinle birlikte a priori tutumdan söz eder. Buna göre bir kuramsal çerçevenin yapılandırılması için belirli *a priori* kavrayışların [gewisse a priorische Einsichten] bulunmasını bilgimizin temelleri açısından zorunlu sayar. Ardından *a priori* kavrayışı görüsel kavrayış olarak sunar. Böylece sayı kuramının yapılandırılabilmesi için belirli görüsel bir tutumu [gewisse anschauliche

143 Zach Richard, "Hilbert's Program", içinde *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta (Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019), https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/hilbert-program/.

Einstellung] *a priori* taşımaktan söz ederek görüsel tutumu her türlü deneyim ve kavramsal bilginin koşulu olarak görür.

1931 TSKT'de a priori görü temelli düşünüşle bilginin koşulları araştırılır. Buna göre tasarımlama yetimizde bir şey bize halihazırda önceden verilmelidir. Bu, tüm düşünceden önce dolaysız bir yaşantı olarak görüsel biçimde varolan mantık-dışı belirli somut nesnelerdir. Mantıksal çıkarımın kesin olması için bu nesneler tüm parçalarında ayrıştırılabilir olmalıdır ve gösterilişleri, ayrımları, birbirlerini izleyişleri ya da birbiri ardına dizilişleri ne indirgenme gereksinimi olan ne de başka bir şeye indirgenebilir bir şey olarak, nesnelerle birlikte, dolaysızca ve görüsel olarak verilmelidir.

Görüldüğü üzere Hilbertçi biçimselcilik anlayışında görüsel zemin dışarıda tutulamaz. Bu görüsel zemin ilk çalışmalarında algıya dönük bir vurgu taşırken son metinlerine doğru düşünüşü de içerecek biçimde genişletilmiştir. Aksiyomlara dayalı dizgenin mantıksal tutarlılığı, dizgedeki imlerin dizilişi, kanıtlama adımları hep bu görüsel zemin üzerinde yapılır. Bu bir tür bilişsel olanak olarak düşünülebilir. İnsan zihni, yaşadığı dünyayı anlayabilmek için dizgeler oluşturup bunları dilediğince yorumlayabilir. Hilbert'in aksiyomları apaçık kendiliğinden doğruluklar olarak değil tutarlı bağıntılar olarak görmesi de insan zihninin dileğince dizge oluşturabilmesi olanağıyla ilgilidir. Bir dizgedeki içsel bağıntıların kesin oluşu dizgenin mutlak bir doğruluk ortaya koyduğu sonucunu doğurmaz. Bu bakımdan Hilbert metafiziksel ya da aşkın bir zeminde matematik yapmak yerine, görüsel zeminden hareket etmiştir.

Hakem Değerlendirmesi: Dış bağımsız.
Çıkar Çatışması: Yazar çıkar çatışması bildirmemiştir.
Finansal Destek: Yazar bu çalışma için finansal destek almadığını beyan etmiştir.

Peer-review: Externally peer-reviewed.
Conflict of Interest: The author has no conflict of interest to declare.
Grant Support: The author declared that this study has received no financial support.

Kaynaklar

Bernays, Paul. "Hilbert's Significance for the Philosophy of Mathematics". Içinde *From Brouwer to Hilbert The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, editör Paolo Mancosu, 189–97. New York: Oxford University Press, 1998.

Brouwer, L E J. "Die Struktur des Kontinuums". Içinde *Collected Works I, Philosophy and Foundations of Mathematics*, 429–40, 1975.

———. "Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus". *KNAW Proceedings* 31 (1928): 374–79.

Corry, Leo. *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918)*. Dordrecht: Springer, 2004.

———. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Basel: Birkhäuser Basel, 2004.

Detlefsen, Michael. "On Interpreting Gödel's Second Theorem". *Journal of Philosophical Logic* 8, sayı 1 (1979): 297–313.

Edwards, C. H. Jr. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer, 1979.

Frege, Gottlob. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Editör Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, ve Albert Veraart. Çeviren Hans Kaal. Oxford: Basil Blackwell, 1980.

Hallett, Michael. "Hilbert and Logic". *Québec Studies in the Philosophy of Science* 177 (1995): 135–87.

Heath, Thomas. *A History of Greek Mathematics vol 1 : From Thales to Euclid*. Oxford: Clarendon Press, 1921.

Hilbert, David. "Axiomatisches Denken". Içinde *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen Band III*, 146–56. Springer, 1970.

———. "Die Grundlegung der Elementaren Zahlenlehre". *Mathematische Annalen* 104, sayı 1 (1931): 485–94.

———. "Die Logischen Grundlagen der Mathematik". *Mathematische Annalen* 88, sayı 1 (1922): 151–65.

———. *Grundagen der Geometrie*. Leipzig: B. G. Teubner, 1903.

———. *Mathematische Probleme*. Göttingen: Dieterichsche Universitätsbuchhandlung, 1900.

———. "Naturerkennen und Logik". Içinde *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen Band III*, 378–87. Springer, 1970.

———. "Neubegründung der Mathematik". Içinde *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen Band III*, 157–77. Berlin: Julius Springer, 1935.

———. "Probleme der Grundlegung der Mathematik". *Mathematische Annalen* 102, sayı 1 (1930): 1–9.

———. "Über das Unendliche". *Mathematische Annalen*, sayı 95 (1926): 161–90.

———. "Über den Zahlbegriff". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 6 (1900): 180–85.

———. "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik". Içinde *Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses : in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, editör Adolf Krazer, 174–85. Leipzig: Teubner, 1905.

———. "Ueber die Grundlagen der Geometrie". *Mathematische Annalen* 56, sayı 3 (1902): 381–422.

Hilbert, David, ve Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik I*. Berlin: Springer, 1934.

Hvidsten, Michael. *Exploring Geometry*. Boca Raton: CRC Press, 2016.

Kant, Immanuel. *Kritik Der Reinen Vernunft*. Hamburg: Felix Meiner, 1956.

Klein, Felix. *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*. Çeviren Gert Schubring. C. II: Geomet. Berlin: Springer, 2016.

Pasch, Moritz. *Vorlesungen Über Neuere Geometrie*. Leipzig: B. G. Teubner, 1882.

Plato, Von Jan. "The Development of Proof Theory". Içinde *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, editör Edward N. Zalta. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018. https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/proof-theory-development/.

Poincaré, Henri. "Mathematics and Logic: II". Içinde *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, editör William Bragg Ewald, 1038–52. Oxford: Oxford University Press, 1996.

Richard, Zach. "Hilbert's Program". Içinde *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, editör Edward N. Zalta. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019. https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/hilbert-program/.

Roselló, Joan. "Hilbert, Göttingen and the Development of Modern Mathematics". New Castle: Cambridge Scholars Publishing, 2019.

Sibley, Thomas Q. *Thinking Geometrically A Survey of Geometries*. Washington: The Mathematical Association of America, 2015.

Sieg, Wilfried. "Hilbert's Proof Theory". Içinde *Logic from Russell to Church*, editör Dov M. Gabbay ve John Woods. Amsterdam: North-Holland, 2009.

Sobczyk, Garret. *New Foundations in Mathematics: The Geometric Concept of Number*. New York: Birkhäuser, 2013.