



A novel four-node inverse-plate element for shape and stress sensing of laminated composite and sandwich plates

Adnan Kefal^{1,2,3*}

¹Faculty of Engineering and Natural Sciences, Sabanci University, Istanbul, 34956, Turkey

²Integrated Manufacturing Technologies Research and Application Center, Sabanci University, Istanbul, 34956, Turkey

³Faculty of Naval Architecture and Ocean Engineering, Istanbul Technical University, Istanbul, 34469, Turkey

Highlights:

- Structural health monitoring of composite and sandwich plates.
- A new four-node inverse-plate element based on refined zigzag theory.
- Precise stress and zigzag displacement predictions along the thickness direction of the plate.

Keywords:

- Shape and stress sensing
- Sensor measurements
- Inverse finite element method
- Refined zigzag theory
- Composite and sandwich structures

Article Info:

Research Article
Received: 24.04.2019
Accepted: 19.03.2020

DOI:

10.17341/gazimmfd.557477

Acknowledgement:

The financial support provided by TUBITAK under the grant No: 217M207 is greatly acknowledged.

Correspondence:

Author: Adnan Kefal
e-mail: kefaladnan@itu.edu.tr,
adnankefal@sabanciuniv.edu
phone: +90 212 285 6428

Graphical/Tabular Abstract

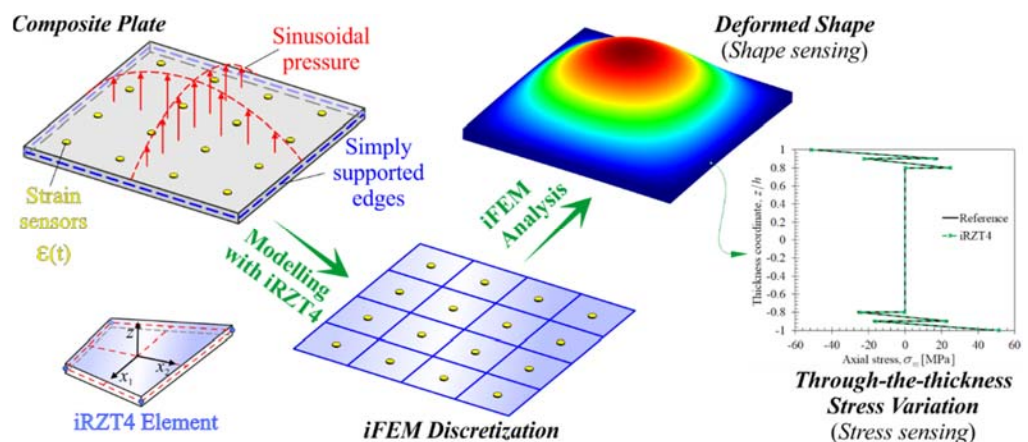


Figure A. iFEM/RZT4 methodology for shape and stress sensing of composite structures

Purpose: The main aim of this study is to develop a four-node quadrilateral inverse-plate element (iRZT4) based on shape-and stress-sensing algorithm of inverse finite element method (iFEM) coupled with refined zigzag theory (RZT). The latter aim is to demonstrate its sensing applications to composite structures.

Theory and Methods:

Firstly, a new mathematical formulation of the iRZT4 element has been developed through interpolating the kinematic variables of RZT theory with bilinear isoparametric and quadratic anisoparametric shape functions. Then, the analytical section strains of iRZT4 element along with experimentally measured counterparts are used to describe a weighted least-squares functional of the iFEM methodology. After that, this functional is minimized with respect to the displacement degrees-of-freedom (DOF) of the element and a compact form of governing equations is obtained for the iRZT4 element. Finally, assembling these equations over the whole discretization and subsequently applying problem-specific constraint boundary conditions to the final matrix-vector equations, unknown displacement DOFs are solved to predict total deformed shape of the discretization.

Results:

Shape and stress sensing of three different laminates with various span-to-thickness ratios are conducted using the iRZT4/iFEM formulation. The “strain-sensor” (experimental strain) data and reference solutions are generated numerically by performing high-fidelity direct finite element analyses. The “strain-sensor” data are used as input to the iRZT4 models, giving rise to the full-field displacement and stress reconstruction. According to the comparison of deflections as well as through-the-thickness distributions of displacements and stresses between iFEM and reference solutions, the high accuracy of the iRZT4 element is validated.

Conclusion:

The iRZT4 element is capable of providing precise displacement and stress predictions over the three-dimensional domain of thin/thick laminates, even if a low number of strain-sensor measurements are available in the iFEM analysis. Hence, this new element is practically useful for shape-sensing applications of composite structures.



Lamine kompozit ve sandviç plakaların şekil ve gerilme algılaması için yeni bir dört-düğüm noktalı ters-plaka elemanı

Adnan Kefal^{1,2,3*}

¹Sabancı Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, 34956, İstanbul, Türkiye

²Sabancı Üniversitesi, Tümlleştirilmiş Üretim Teknolojileri Araştırma ve Uygulama Merkezi, 34956, İstanbul, Türkiye

³İstanbul Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, 34469, İstanbul, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Kompozit ve sandviç plakaların yapısal sağlık izlemesi
- Hassaslaştırılmış zikzak teorisi tabanlı yeni bir dört-düğüm noktalı ters-plaka elemanı
- Plakanın kalınlık yönü boyunca hassas gerilme ve zikzak yer değiştirme tahminleri

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 24.04.2019

Kabul: 19.03.2020

DOI:

10.17341/gazimmfd.557477

Anahtar Kelimeler:

Şekil ve gerilme algılaması,
sensör ölçümleri,
ters sonlu elemanlar yöntemi
hassaslaştırılmış zikzak teorisi,
kompozit ve sandviç yapılar

ÖZET

Kompozit malzemeler, çeşitli mühendislik yapılarının ana yük taşıyıcı elemanlarının imalat sürecinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak, kompozit yapıların hizmet ömrü boyunca oluşan hasar birikimleri nedeniyle yapısal bütünlüklerinin azalması muhtemeldir. Durum odaklı bakım planlaması yoluyla bu istenmeyen hasarlardan kaçınmak için gerçek zamanlı şekil ve gerilme algılaması gerçekleştirebilen bir yapısal sağlık izleme sistemi kompozit yapılara entegre edilebilir. Bu amaçla, bu çalışmada, hassaslaştırılmış zikzak teorisi (RZT) ile birleştirilen ters sonlu elemanlar yöntemine (iFEM) dayanan bir hesaplama algoritması kullanılarak yeni bir dört düğümlü ters plaka elemanı (iRZT4) geliştirilmiştir. Burada sunulan iFEM/iRZT4 formülasyonu, RZT'nin membran, eğilme, enine kayma ve zikzak kesit gerinimlerini kullanan ağırlıklı en küçük kareler fonksiyonunu minimize etmektedir. Mevcut yaklaşımın şekil algılaması için temel faydası, herhangi bir yükleme bilgisi gerektirmemesi ve yalnızca yerleşik sensörlerden elde edilen gerinim ölçümlerini kullanmasıdır. Diğer bir avantaj ise, ince veya kalın lamine kompozit ve sandviç plakaların genel bir sınıfına uygulanabilir olmasıdır. iRZT4 elemanın yüksek algılama kabiliyeti ve doğruluğu, farklı laminasyon dizilimlerine sahip kompozit plakaların çeşitli sayısal analizlerinin gerçekleştirilmesi ve iFEM sonuçlarının referans çözümlerle kıyaslanmasıyla ortaya konmuştur.

A novel four-node inverse-plate element for shape and stress sensing of laminated composite and sandwich plates

H I G H L I G H T S

- Structural health monitoring of composite and sandwich plates.
- A new four-node inverse-plate element based on refined zigzag theory.
- Precise stress and zigzag displacement predictions along the thickness direction of the plate

Article Info

Research Article

Received: 24.04.2019

Accepted: 19.03.2020

DOI:

10.17341/gazimmfd.557477

Keywords:

Shape and stress sensing,
sensor measurements,
inverse finite element method
refined zigzag theory,
composite and sandwich
structures

ABSTRACT

Composite materials are widely utilized in manufacturing process of principal load bearing elements of various engineering structures. However, due to damage accumulation over the service life of the composite structures, their structural integrity are likely to diminish. To avoid from these undesirable failures by the way of condition-based maintenance scheduling, a structural health monitoring system that can perform real-time shape and stress sensing can be integrated to composite structures. For this purpose, in this study, a new four-node inverse-plate element (iRZT4) is developed using a computational algorithm based on the inverse finite element method (iFEM) coupled with the refined zigzag theory (RZT). The iFEM/iRZT4 formulation presented herein minimizes a weighted least-squares functional that uses membrane, bending, transverse shear, and zigzag section strains of RZT. The main benefit of the present approach for shape sensing is that it does not require any loading information and uses only strain measurements obtained from the on-board sensors. As for another advantage is that it is applicable to a general class of thin or thick laminated composite and sandwich plates. The high sensing capability and accuracy of the iRZT4 element is demonstrated by performing various numerical analyses of composite plates with different lamination sequences and comparing iFEM results against reference solutions.

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: adnankefal@sabanciuniv.edu, kefaladnan@itu.edu.tr / Tel: +90 212 285 6428
1768

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Yapısal sağlık izleme (YSİ), algılama sistemlerini (sensörleri) bir yapıya entegre ederek, bu algılama sistemlerinden toplanan veriyi gerçek zamanlı olarak analiz eden ve yapının küresel veya yerel yapısal durumu hakkında kesin ve gerçek zamanlı bilgi sağlayan disiplinler arası bir teknolojidir. Bu teknolojinin temel amacı yapısal davranışları izlemek ve sağlıklı bir yapısal durumu saptamaktır. YSİ'nin uygulanması, insan ve çevre güvenliğini arttırmanın yanı sıra bakım maliyetini de düşürmeye yöneliktir. Bu nedenle, YSİ sistemleri, birçok havacılık, deniz ve sivil yapılar için gerekli teknolojilerdir. Son yıllarda, kompozit ve sandviç malzeme sistemleri, gemi ve deniz yapıları, sivil ve askeri hava taşıtları ve rüzgar türbinleri gibi birçok farklı mühendislik uygulamasında birincil yapılar olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Kompozit yapılar sayısız avantajlar sunmasına rağmen, delaminasyon ve elyaf/matris çatlaması gibi çeşitli hasar türlerine maruz kalabilmektedir [1, 2]. Bu hasarlara bağlı olarak kompozit malzemelerin yük taşıma kapasiteleri ve yapısal bütünlükleri hızlıca azalabilir. Kompozit malzemenin/yapıların tahribatsız muayenesi genellikle zahmetli ve pahalıdır [3]. Dolayısıyla, bu yapıların yapısal bütünlüğünün YSİ sistemleri ile izlenmesi, tahribatsız muayene yöntemlerine kıyasla daha emniyetli ve az maliyetli bir alternatif sunmaktadır. Ayrıca, kompozit ve sandviç yapıların sahip olduğu katmanlı yapı, gömülü fiber Bragg grating (FBG) sensörleri gibi son teknoloji algılayıcı sistemler ile çalışan herhangi bir YSİ sisteminin bu yapılara rahatlıkla entegre edilmesini sağlar.

Bir yapının üç boyutlu deformasyonlarının ve gerilmelerinin yerleşik (in-situ) gerinim sensörleri vasıtasıyla gerçek zamanlı olarak hesap edilmesi işlemine "şekil ve gerilme algılama" denir. Aslında bu işlem, kompozit bir yapının YSİ'si gerçekleştirmek için gerekli temel bir teknolojidir. Ancak bir yapının şekil ve gerilme algılama analizi oldukça karmaşık bir matematiksel modellemeyi beraberinde getirmektedir. Bu ters problemin çözümü için Tikhonov ve Arsenin yüksek doğruluk derecesini garanti eden bir düzenleme terimi ortaya koymuştur [4]. Öte yandan, eğilme yüklerine maruz kalmış kiriş ve plaka yapılarındaki eğilme yer değiştirmelerin gerçek zamanlı hesabi için modal veya analitik yaklaşımlar içeren çeşitli şekil algılama algoritmaları önerilmiştir [5, 6]. Ancak, bu yaklaşımlar çok sayıda doğal titreşim modunun kullanılmasını gerektirmektedir. Bu nedenle, özellikle yüksek doğruluğa sahip bir ağ kullanılarak uygulanırsa, bu çok uzun hesaplama sürelerine sebep olan bir öz-değer analizi gerektirmektedir.

Ters sonlu elemanlar yöntemi (inverse Finite Element Method, iFEM), gerinim sensörleri ile donatılmış bir yapıdan toplanan ayrık gerinim değerlerini kullanarak, yapının bütününe ait üç boyutlu yer değiştirmelerini, gerinimlerini ve gerilmelerini (streslerini) gerçek zamanlı olarak hesap edebilmek için geliştirilen en son teknoloji bir şekil algılama yöntemidir. Orijinal haliyle iFEM metodolojisi, Tessler ve

Spangler [7, 8] tarafından plaka ve kabuk yapılarının şekil algılaması için NASA Langley Araştırma Merkezi'nde geliştirilmiştir. İlk yayınlanmasından bu yana, iFEM metodolojisi literatürde kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Örneğin, anizotropik C^0 -sürekli şekil fonksiyonlarını (shape functions) kullanan ve Mindlin-Reissner plaka teorisinin kinematik varsayımlarını benimseyen üç düğümlü bir ters-kabuk elemanı (iMIN3) geliştirmiştir [9]. Daha sonra, iMIN3 elemanının doğruluğu, deneysel olarak ölçülen gerçek zamanlı gerinim verilerini kullanarak laboratuvar testleri ile ortaya koyulmuştur [10]. iMIN3'ün yanı sıra, plaka ve kabuk yapılarının şekil algılaması için ilk dört düğümlü dörtgen ters-kabuk elemanı olan iQS4 formüle edilmiştir [11]. Akabinde, iQS4/iFEM metodolojisi kimyasal tanker, konteyner gemisi, kuru yük gemisi gibi deniz yapılarının şekil ve stres algılamasına numerik olarak uygulanmış ve bu yapıların için optimum sensör lokasyonları belirlenmiştir [12,-14]. Ayrıca, gerilme, eğilme, enine-kayma ve burulma deformasyon modları dahil olmak üzere Timoshenko kiriş teorisinin kinematik varsayımlarını kullanan bir ters-kiriş elemanı formüle edilmiştir [15]. Daha sonra, bu ters-kiriş elemanının üstün kabiliyetlerini, sayısal ve deneysel olarak elde edilen gerinim verilerini kullanarak statik ve dinamik yüklemeler için doğrulamıştır [16, 17]. Bununla birlikte, gerinim ve yer değiştirme sensörleri ile donatılmış yapıların iFEM metodolojisi tabanlı katı elemanlar ile şekil algılaması gerçekleştirilmiştir [18]. Öte yandan, uçak kanatlarında ölçülen gerinim verilerinin iFEM metodu ile birlikte kullanılması ile kanada ait yapısal deformasyonların farklı iFEM elemanları ile hesap edilmesini göstermiştir [19, 20].

Yakın bir zamanda, kompozit ve sandviç plakaların herhangi bir yerinde özellikle kalınlık doğrultusunda olan yer değiştirme, gerinim ve gerilme değişimlerinin yüksek doğrulukla tahmin edilmesini sağlayan Hassaslaştırılmış Zikzak Teorisi (Refined Zigzag Theory, RZT) geliştirilmiştir [21]. Akabinde, RZT'nin zikzak kinematığı kullanılarak iFEM tabanlı yeni bir üç-düğüm noktalı ters-plaka formülasyonu geliştirmiştir [22]. Ancak, önerilen varyasyonel ifade [22], RZT'nin ortalama (ilk) enine-kayma gerinim değerlerinin etkisini içermemektedir. Çok yakın bir zamanda, bu eksikliği gideren ve RZT'nin tüm gerinim ölçümlerini kullanan ağırlıklı en küçük kareler fonksiyonunu minimize eden bir iFEM-RZT formülasyonu geliştirmiştir [23, 24]. İncelenen literatür ışığında, iFEM-RZT konusunun çok yeni olup, yazarın bilgisi dahilinde henüz bu alanda bir dörtgen plaka eleman geliştiren bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışma ile literatürde ilk defa, iRZT4 olarak adlandırılan ve iFEM-RZT metodunu temel alan yeni bir dört-düğüm noktalı ters plaka eleman geliştirilecektir. Bu yeni plaka elemanın formülasyonu, yüksek mertebeden anizotropiye ve heterojenliğe sahip çok tabakalı kompozit ve sandviç plaka yapıların hassas yapısal sağlık tatbiki ve şekil algılaması için tasarlanmıştır. Bu doğrultuda, iRZT4 elemanı, bir kompozit veya sandviç malzemenin yapısal bütünlüğü hakkında doğru ve hassas bilgiler üretebilecek özgün bir YSİ sistemine kolayca entegre edilebilir.

2. DÖRT-DÜĞÜM NOKTALI TERS-PLAKA ELEMANIN İFEM-RZT FORMÜLASYONU (İFEM-RZT FORMULATION OF A FOUR-NODE INVERSE-PLATE ELEMENT)

Bu bölümde, iRZT4 olarak isimlendirilen yeni bir dört-düğüm noktalı dörtgen ters-plaka elemanına ait matematiksel formülasyon açık bir şekilde ifade edilecektir. Şekil 1a'de gösterildiği gibi elemanın referans (orta) yüzeyinin merkezine bir adet dik açılı Kartezyen koordinat sistemi (x_1, x_2, z) tanımlanmıştır. Burada, $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ koordinatları orta düzlem alanı A 'ya ait düzlem-içi koordinatlarıdır. Ayrıca, z sembolü laminatın kalınlık boyunca koordinatını ifade ederken, $z = 0$ düzlemi plakanın referans düzlemini temsil etmektedir. Şekil 1b'de ifade edildiği üzere iRZT4 elemanı her bir düğüm noktasında yedi serbestlik derecesine sahiptir. Bu serbestlik dereceleri sırasıyla pozitif x_1 , x_2 , z eksenleri boyunca ötelenmeler, pozitif x_1 ve x_2 eksenleri etrafında saat yönünün tersine dönmeler ve zikzak genlikleridir. iRZT4 elemanı ile n_p adet ortotropik tabakadan oluşan, kalınlığı $2h$ olan bir plakanın (laminatın) modellendiğini durumu ele alalım. Formülasyonda, aksi belirtilmedikçe, üst indis (k) , k 'inci katmanı belirtmek için kullanılırken, alt indis (i) , k 'inci ve $(k+1)$ 'inci tabakalar arasındaki ara yüzü ifade eder. Dolayısıyla, Şekil 1c'de $n_p = 3$ olduğu örnek bir laminat için gösterildiği gibi, k 'inci lamine kalınlığı $z \in [z_{(k-1)}, z_{(k)}]$ ($k = 1 - n_p$) aralığında tanımlanır ve $2h^{(k)}$ ile ifade edilir.

Laminatın rijit cisim hareketlerine karşı kısıtlandığını ve düzlemsel ve kalınlık yönü bileşenleri olan dış yüklerle maruz kaldığını varsayalım. Şekil 1a'da gösterildiği gibi, laminatın (veya iRZT4 elemanın) bazı noktalarından gerçek zamanlı gerinim ölçümleri yapıyor olsun. Burada bahsedilen ters problem, yalnızca in-situ (yerleşik) yüzey gerinimlerini ve kısıtlama koşullarını kullanarak, yükleme durumlarından bağımsız bir şekilde laminatın gerçek zamanlı deformasyonlarını RZT kinematığına uygun olarak hesap edilmesidir. Sunulan bu ters problemin çözümü için, öncelikle, laminatın herhangi bir materyal noktasındaki düzlem-içi yer değiştirme bileşenleri RZT'ye uygun olarak Eş. 1, Eş. 2 ve Eş. 3'deki gibi tanımlanmaktadır [21].

$$u_1^{(k)}(\mathbf{x}, z) \equiv u_1^{(k)} = u(\mathbf{x}) + z\theta_2(\mathbf{x}) + \phi_1^{(k)}(z)\psi_2(\mathbf{x}) \quad (1)$$

$$u_2^{(k)}(\mathbf{x}, z) \equiv u_2^{(k)} = v(\mathbf{x}) - z\theta_1(\mathbf{x}) - \phi_2^{(k)}(z)\psi_1(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$u_z(\mathbf{x}, z) \equiv u_z = w(\mathbf{x}) \quad (3)$$

Burada, $u_1^{(k)}$ ve $u_2^{(k)}$ yer değiştirme bileşenleri kalınlık koordinatı z 'nin sabit, doğrusal ve zikzak varyasyonları ile ifade edilmiş olup, u_z yer değiştirme bileşeni z 'ye göre sabit bir $w(\mathbf{x})$ çökmesi (pozitif z yönünde) ile ifade edilmektedir. Eş. 1, Eş. 2'de kullanılan $u(\mathbf{x})$ ve $v(\mathbf{x})$ sembolleri sırasıyla pozitif x_1 ve x_2 yönündeki membran yer değiştirmelerine karşılık gelirken, $\theta_1(\mathbf{x})$ ve $\theta_2(\mathbf{x})$ ifadeleri ile $\psi_1(\mathbf{x})$ ve $\psi_2(\mathbf{x})$ ifadeleri sırasıyla pozitif x_1 ve x_2 yönleri etrafındaki eğilme ve zikzak dönmelerini temsil etmektedir (Şekil 1a). Ayrıca, $\phi_\alpha^{(k)}(z)$ zikzak fonksiyonları Eş. 4'deki gibi kalınlık yönü boyunca parçalı doğrusal fonksiyonlardır.

$$\phi_i^{(k)}(z) \equiv \phi_i^{(k)} = z\beta_i^{(k)} + \alpha_i^{(k)} \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

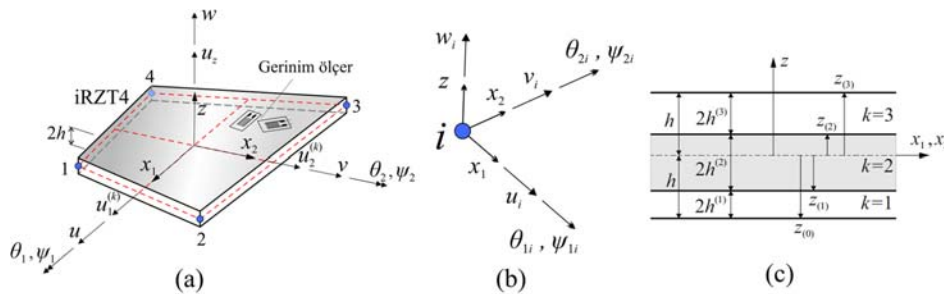
Burada $\beta_i^{(k)}$ ifadeleri zikzak fonksiyonlarının kalınlık koordinatı boyunca eğimlerini ifade etmekte olup bu eğimler her bir tabaka için ayrı ayrı sabit eğim fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $\alpha_i^{(k)}$ terimi laminalar arası yüzeylerde zikzak fonksiyonlarının sürekliliğini sağlayan kalınlık koordinatı boyunca parçalı sabit bir fonksiyondur. Bunlar Eş. 5 ve Eş. 6'daki gibi açıkça yazılabilir.

$$\beta_i^{(k)} = G_i / Q_{ii}^{(k)} - 1 \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots, n_p) \quad (5)$$

$$\alpha_i^{(k)} = \beta_i^{(k)}h + \sum_{j=2}^k 2h^{(j-1)} \left(\frac{G_i}{Q_{ii}^{(k)}} - \frac{G_i}{Q_{ii}^{(j-1)}} \right) \quad (i = 1, 2),$$

$$G_i = \left(\frac{1}{h} \sum_{j=1}^{n_p} h^{(j)} Q_{ii}^{(j)} \right)^{-1} \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

Burada G_i ve $Q_{ii}^{(k)}$ terimleri sırasıyla tüm laminatın ağırlıklı ortalama enine-kayma katsayılarını ve laminatın k 'inci katmanına ait kayma modüllerini ifade etmektedir.



Şekil 1. (a) iRZT4 elemanı (b) Düğüm noktalarının serbestlik dereceleri (c) Üç katmanlı bir laminat için tabaka gösterimi
(a) The iRZT4 element (b) The nodal degrees of freedom (c) Layer notation for a three-layer laminate)

Doğrusal gerinim-yer değiştirme bağıntıları kullanılarak, Eş. 1, Eş. 2 ve Eş. 3'ün ilgili kısmi türevlerinin hesaplanması ile düzlem-içi ve enine-kayma gerinim bileşenleri kinematik değişkenlerin tamamını temsil eden \mathbf{u} vektörü cinsinden Eş. 7 ve Eş. 8'deki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{11}^{(k)} \\ \mathcal{E}_{22}^{(k)} \\ \gamma_{12}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1}^{(k)} \\ u_{2,2}^{(k)} \\ u_{1,2}^{(k)} + u_{2,1}^{(k)} \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{e}(\mathbf{u}) + z\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\mu}^{(k)}(\mathbf{u}, z) \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{1z}^{(k)} \\ \gamma_{2z}^{(k)} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_{1,z}^{(k)} + u_{z,1}^{(k)} \\ u_{2,z}^{(k)} + u_{z,2}^{(k)} \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_\gamma^{(k)}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \mathbf{H}_\eta^{(k)}\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_\gamma^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 + \beta_1^{(k)} & 0 \\ 0 & 1 + \beta_2^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_\eta^{(k)} = \begin{bmatrix} -\beta_1^{(k)} & 0 \\ 0 & -\beta_2^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} \equiv [u \quad v \quad w \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \psi_1 \quad \psi_2]^T \quad (9)$$

Eş. 7'de verilen vektörler $\mathbf{e}(\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u})$ ve $\boldsymbol{\mu}^{(k)}(\mathbf{u})$ sırasıyla membran gerinim ölçüleri, eğilme eğrilikleri ve zikzak gerinim ölçülerini temsil etmektedir. Öte yandan, Eş. 8'de verilen $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ ve $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})$ sırasıyla birinci (ortalama) ve ikinci enine-kayma gerinim ölçülerini temsil eder. Bu gerinim ve eğrilik ölçüleri, kinematik değişkenlerin türevi cinsinden Eş. 10, Eş. 11 ve Eş. 12'deki gibi açıkça tanımlanabilir.

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = [u_{,1} \quad v_{,2} \quad u_{,2} + v_{,1}]^T, \quad \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) = [\theta_{2,1} \quad -\theta_{1,2} \quad \theta_{2,2} - \theta_{1,1}]^T \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(k)}(\mathbf{u}, z) = \mathbf{H}_\phi^{(k)}(z)\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}) \equiv \begin{bmatrix} \phi_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1^{(k)} & \phi_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{2,1} \\ -\psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} \\ -\psi_{1,1} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \equiv [\gamma_1 \quad \gamma_2]^T = [w_{,1} + \theta_2 \quad w_{,2} - \theta_1]^T, \quad \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) = [\gamma_1 - \psi_2 \quad \gamma_2 + \psi_1]^T \quad (12)$$

Eş. 10, Eş. 11 ve Eş. 12'de ifade edilen gerinim ölçülerini, iFEM yöntemine uygun şekilde hem analitik ve hem de deneysel olarak hesaplamak gerekmektedir. Analitik hesaplama için öncelikle iRZT4 elemanına ait herhangi bir x_1 veya x_2 koordinatının izoparametrik eşleştirilmesi yapılabilir. Bu işlem, lineer şekil fonksiyonları cinsinden Eş. 13 ve Eş. 14'deki gibi ifade edilebilir.

$$\chi(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) \chi_i \quad (\chi = x_1, x_2) \quad (13)$$

$$N_i(s, t) = \frac{1}{4}(1 + s_i s)(1 + t_i t) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

Burada χ_i ($\chi = x_1, x_2$) ve $(s_i, t_i) \in [-1, +1]$ sembolleri sırasıyla ilgili i düğüm noktasının referans eksen ve izoparametrik koordinatlarını ifade etmektedir. Geliştirilen iRZT4 ters-plaka elemanına ait iFEM-RZT denklemlerinin sayısal olarak (Gauss-Jacobi karesel formülü ile) kolayca integral edilebilmesi amacıyla bu eşleştirme kullanılabilir. iFEM-RZT'nin kinematik değişkenleri, bir iRZT4 elemanın bütün düğüm noktalarındaki serbestlik dereceleri cinsinden Eş. 15 ve Eş. 16'daki gibi elde edilebilir.

$$\chi = \sum_{i=1}^4 N_i \chi_i \quad (\chi = u, v, \theta_1, \theta_2, \psi_1, \psi_2) \quad (15)$$

$$w = \sum_{i=1}^4 (N_i w_i - L_i (\theta_{1i} - \psi_{1i}) - M_i (\theta_{2i} - \psi_{2i})) \quad (16)$$

Burada verilen L_i ve M_i şekil fonksiyonları ikinci dereceden anizoparametrik şekil fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar ilk olarak Tessler ve Hughes [25] tarafından geliştirilmiş olup çeşitlik sonlu elemanlar uygulamalarında literatürde çok kez kullanılmıştır. Bu fonksiyonlar Eş. 17'deki gibi açık bir şekilde verilebilir.

$$M_i = a_j N_{j+4} - a_i N_{i+4}, \quad L_i = b_j N_{j+4} - b_i N_{i+4} \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 4, 1, 2, 3) \quad (17)$$

burada a_i ve b_i terimleri Eş. 18'de ifade edildiği gibi kenar uzunluk koordinatlarının sekizde birini tanımlanmaktadır.

$$a_i = \frac{x_i - x_k}{8}, \quad b_i = \frac{y_k - y_i}{8} \quad (i = 1, 2, 3, 4; k = 2, 3, 4, 1) \quad (18)$$

Ayrıca, Eş. 17'de kullanılan N_i ($i = 5, 6, 7, 8$) ifadesi ikinci dereceden serendipity tipi bir sonlu elemanın kenar-orta düğüm noktalarında tanımlanan şekil fonksiyonlarına karşılık gelmekte olup Eş. 19'daki gibi tanımlanabilir.

$$N_{i+4} = \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 + t_i t) \quad (i = 1, 3), \quad N_{i+4} = \frac{1}{2}(1 + s_i s)(1 - t^2) \quad (i = 2, 4) \quad (19)$$

Eş. 15 ve Eş. 16 ile tanımlanan kinematik değişkenler, Eş. 10, Eş. 11 ve Eş. 12'de ifade edilen gerinim ölçülerini analitik olarak tanımlamak için Eş. 20'deki gibi kullanılabilir.

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}^z \mathbf{u}^e \quad (\chi = \mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}) \quad (20)$$

$$\mathbf{u}^e = [\mathbf{u}_1^e \ \mathbf{u}_2^e \ \mathbf{u}_3^e \ \mathbf{u}_4^e]^T, \quad \mathbf{u}_i^e = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{li} \ \theta_{2i} \ \psi_{li} \ \psi_{2i}]^T \quad (i=1,2,3,4) \quad (21)$$

Burada \mathbf{u}^e ve \mathbf{u}_i^e vektörleri sırasıyla iRZT4 elemanına ait bütün ve tek bir düğüm noktasının serbestlik derecelerini ifade etmektedir. Ayrıca, \mathbf{B}^χ ($\chi = \mathbf{e}, \mathbf{\kappa}, \mathbf{\mu}, \mathbf{\gamma}, \mathbf{\eta}$) matrisleri bir iRZT4 elemanın gerinim-yer değiştirme ilişkilerini membran, eğilme, zikzak, birinci ve ikinci enine-kayma gerinim ölçülerine uygun şekilde tanımlar. Bu matrisler iRZT4 elemanın şekil fonksiyonlarını ve bunların türevlerini içermekte olup Eş. 22, Eş. 23, Eş. 24 ve Eş. 25'deki gibi açıkça tanımlanabilir.

$$\mathbf{B}^\chi = [\mathbf{B}_1^\chi \ \mathbf{B}_2^\chi \ \mathbf{B}_3^\chi \ \mathbf{B}_4^\chi] \quad (\chi = \mathbf{e}, \mathbf{\kappa}, \mathbf{\mu}, \mathbf{\gamma}, \mathbf{\eta}) \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_i^e \equiv \begin{bmatrix} N_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,2} & N_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^\kappa \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,1} & N_{i,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_i^\mu \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{i,1} & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{B}_i^\gamma \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,1} & -L_{i,1} & -M_{i,1} + N_i & L_{i,1} & M_{i,1} \\ 0 & 0 & N_{i,2} & -L_{i,2} - N_i & -M_{i,2} & L_{i,2} & M_{i,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^\eta \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,1} & -L_{i,1} & -M_{i,1} + N_i & L_{i,1} & M_{i,1} - N_i \\ 0 & 0 & N_{i,2} & -L_{i,2} - N_i & -M_{i,2} & L_{i,2} + N_i & M_{i,2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

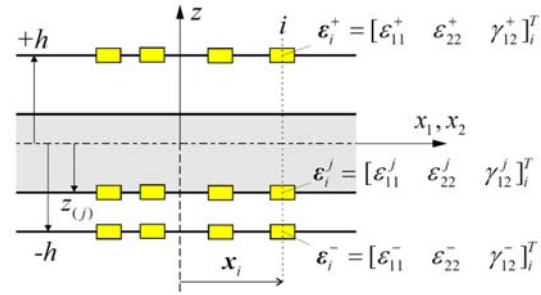
Burada ifade edilen N_i , L_i ve M_i şekil fonksiyonlarının x_1 ve x_2 eksenlerine göre türevleri, bu şekil fonksiyonlarının izoparametrik koordinatlara göre alınan türevleri ile zincir kuralına uygun şekilde ilişkilendirilmesi ve ilgili Jacobian matrisinin tersinin alınması ile kolayca elde edilebilir.

Öte yandan, Eş. 10 ve Eş. 11'de tanımlanan gerinim ölçülerinin deneysel hesabı için yapıdan gerinim ölçerler (strain gaugeler), gerinim rozetleri (strain rosette) ve/veya gömülü FBG sensörleri vasıtasıyla, in-situ gerinim verileri toplamak gerekmektedir. Bu doğrultuda, Şekil 2'de gösterildiği gibi her belirli bir (x_i, z) ($i=1-n_s$) konumu için üç farklı gerinim rozeti kalınlık yönü boyunca yerleştirilmelidir. Burada n_s sembolü her bir üçlü sensör

yerinin toplam sayısını belirtmektedir. Bu sensörlerden okunan gerinim değerleri Eş. 26'daki gibi ifade edilebilir.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^\alpha = [\varepsilon_{11}^\alpha \ \varepsilon_{22}^\alpha \ \gamma_{12}^\alpha]^T \quad (\alpha = +, -, j) \quad (26)$$

Burada, 11, 22 ve 12 alt indisleri sırasıyla x_1 ve x_2 doğrultularındaki gerinimleri ve x_1, x_2 düzlemindeki kayma gerinimini ifade etmek için kullanılmıştır. Ayrıca, +, - ve j üst indisleri sırasıyla üst yüzeyde bulunan, alt yüzeyde bulunan ve j'inci ara yüzeyde gömülü olan gerinim sensörlerini belirtmektedir.



Şekil 2. Gerinim rozetleri ve deneysel yüzey gerinim ölçümleri (Strain rosettes and experimental surface strain measurements)

Laminatın üst ve alt yüzeylerindeki zikzak fonksiyonları sıfır olduğundan, Eş. 10'da verilen membran gerinimleri ve eğilme eğriliklerinin deneysel karşılıkları, orijinal iFEM plaka formülasyonu [8] kullanılarak Eş. 27'deki gibi açıkça hesaplanabilir.

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^+ + \boldsymbol{\varepsilon}_i^-), \quad \mathbf{K}_i = \frac{1}{2h}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^+ - \boldsymbol{\varepsilon}_i^-) \quad (i=1,2,\dots,n_s) \quad (27)$$

Ayrıca, Eş. 7 ve Eş. 27'nin birlikte kullanılması ile belirli bir ayrık sensör bölgesinin j'inci katmanında $(x_i, z_i = z_{(j)})$ oluşan zikzak gerinim ölçülerinin deneysel karşılıkları Eş. 28'deki gibi hesap edilir [22].

$$\mathbf{M}_i^j = \boldsymbol{\varepsilon}_i^j - \mathbf{E}_i - z_{(j)}\mathbf{K}_i \quad (i=1,2,\dots,n_s) \quad (28)$$

Burada gereken gerinim uyumluluğunu yakalamak için zikzak gerinim ölçülerinin analitik karşılıklarını tam olarak aynı j'inci ara yüzünde hesaplaması gerekmektedir. Deneysel düzlem-içi gerinim ölçülerinin aksine, Eş. 12'de verilen birinci ve ikinci enine-kayma gerinim ölçülerinin deneysel karşılıkları, yani $\boldsymbol{\Gamma}_i$ ve \mathbf{H}_i , yüzey gerinim verileri $(\boldsymbol{\varepsilon}_i^+, \boldsymbol{\varepsilon}_i^-, \boldsymbol{\varepsilon}_i^j)$ vasıtasıyla doğrudan hesaplanamaz. Ancak, Kefal vd. [23, 24] tarafından geliştirilen hesaplama prosedürü vasıtasıyla $\boldsymbol{\Gamma}_i$ ve \mathbf{H}_i deneysel gerinim ölçümlerini hesaplamak mümkündür. Bu hesaplama aracı, özellikle kalın kompozit plakalar/kabuklar gibi daha büyük enine kayma gerilmesi meydana getiren problemlerin şekil ve stres algılamasında yararlı olmaktadır. Ancak, ince kompozit

plakalar/kabuklar için, düzlem-içi gerinim bileşenlerinin deformasyona katkısı enine-kayma gerinim bileşenlerinden çok daha fazladır. Dolayısıyla, ince kabukların iFEM analizi sırasında Γ_i ve H_i 'nin katkıları ihmal edilebilir.

iRZT4 elemanına ait sonuç denklemlerine ilerlemek için öncelikle, analitik ve deneysel gerinim ölçüleri, iFEM-RZT en küçük kareler fonksiyonuna Eş. 29'daki gibi yerleştirilmelidir.

$$\Phi(\mathbf{u}^e) = \frac{1}{A} \iint_A \left(\omega_e \|\boldsymbol{\varphi}_e(\mathbf{u}^e)\|^2 + \omega_\kappa (2h)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\kappa(\mathbf{u}^e)\|^2 + \omega_\mu \|\boldsymbol{\varphi}_\mu(\mathbf{u}^e)\|^2 + \omega_\gamma \|\boldsymbol{\varphi}_\gamma(\mathbf{u}^e)\|^2 + \omega_\eta \|\boldsymbol{\varphi}_\eta(\mathbf{u}^e)\|^2 \right) dA \quad (29)$$

Eş. 30 ve Eş. 31'de açıkça verildiği gibi $\boldsymbol{\varphi}_i$ ($i = e, \kappa, \mu, \gamma, \eta$) sembolü her bir gerinim ölçüsü için deneysel ve analitik değerler arasındaki hatayı temsil etmektedir.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_e(\mathbf{u}^e) &\equiv \mathbf{e}(\mathbf{u}^e) - \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\varphi}_\kappa(\mathbf{u}^e) \equiv \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}^e) - \mathbf{K}, \\ \boldsymbol{\varphi}_\gamma(\mathbf{u}^e) &\equiv \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^e) - \boldsymbol{\Gamma}, \quad \boldsymbol{\varphi}_\eta(\mathbf{u}^e) \equiv \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}^e) - \mathbf{H} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_\mu(\mathbf{u}^e) \equiv \boldsymbol{\mu}^{(k)}(\mathbf{u}^e, z_{(j)}) - \mathbf{M}^j \quad (31)$$

Eş. 29'da verilen kare Öklid normları matematiksel olarak $\|\boldsymbol{\varphi}_i\|^2 \equiv \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i$ gibi genişletebilir. Ayrıca, Eş. 31'de verilen gömülü sensörlerin yeri, yani j-inci ara yüz, laminatın üst ve alt sınırlayıcı yüzeyleri hariç kalınlık koordinatına göre herhangi bir ara yüz ($2 < k < (n_p - 1)$) için $j = k$ veya $j = k - 1$) olabilir. Eş. 29'da verilen ω_χ ($\chi = e, \kappa, \mu, \gamma, \eta$) sembolü, her bir kesit gerinimine karşılık gelen ağırlık sabitini temsil eder. Bu ağırlık sabitleri az sayıda gerinim verileri içeren şekil algılama problemlerinde önemli bir rol oynarlar. Her analitik kesit gerinimine karşılık deneysel bir değer var olması durumunda, bu sabitler Eş. 32'deki gibi bir birim cinsinden ifade edilmektedir.

$$\omega_\chi = 1 \quad (\chi = e, \kappa, \mu, \gamma, \eta) \quad (32)$$

Ancak, eğer herhangi bir deneysel gerinim bileşeni mevcut değilse, ilgili ağırlık sabiti, birim büyüklüğe kıyasla çok daha küçük, mesela $\lambda = 10^{-5}$ gibi, bir sayıya eşitlenir ve bu kesit gerinimine karşılık gelen kareli norm, indirgenmiş formuyla Eş. 33'deki gibi yeniden tanımlanabilmektedir.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}_\chi(\mathbf{u}^e)\|^2 &\equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{u}^e)^T \boldsymbol{\chi}(\mathbf{u}^e) \quad (\omega_\chi = \lambda; \chi = e, \kappa, \gamma, \eta), \\ \|\boldsymbol{\varphi}_\mu(\mathbf{u}^e)\|^2 &\equiv \boldsymbol{\mu}^{(k)}(\mathbf{u}^e, z_{(j)})^T \boldsymbol{\mu}^{(k)}(\mathbf{u}^e, z_{(j)}) \quad (\omega_\mu = \lambda) \end{aligned} \quad (33)$$

Bu ağırlık katsayılarının sağladığı temel avantaj, deneysel kesit gerinim ölçülerinin hiçbirine sahip olmayan "gerinimsiz" ters elemanların iFEM analizlerinde

kullanılabilmesidir. Böyle bir ters eleman için, Eş. 30 ve Eş. 31'de verilen her kare norm, küçük ağırlık sabitleri ile çarpılmalıdır. Böylece, herhangi bir iFEM modeli nispeten çok daha az sayıda yerleşik gerinim sensörü verisine sahip olsa bile, deneysel gerinim verileri içeren ters elemanlar arasındaki zorunlu enterpolasyon bağlantısı ve gerinim uyumluluğu hala korunabilir. Son olarak, ağırlıklı en küçük kareler fonksiyonu $\Phi(\mathbf{u}^e)$ 'nin, iRZT4 elemanın düğüm noktalarına ait tüm serbestlik derecelerine (yani \mathbf{u}^e 'ye) göre birinci dereceden kısmi türevi alınarak minimize edilmesi sonucunda, iFEM-RZT metodolojisinin lineer denklem sistemi Eş. 34'deki gibi matris formunda elde edilir.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{u}^e)}{\partial \mathbf{u}^e} = 2(\mathbf{k}^e \mathbf{u}^e - \boldsymbol{\varepsilon}^e) = 0 \Rightarrow \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (34)$$

Burada elde edilen iFEM-RZT denklemleri bir iRZT4 ters-plaka elemanı için Eş. 35 ve Eş. 36'daki formdadır.

$$\mathbf{k}^e = \frac{1}{A} \iint_A \left(\begin{aligned} &\omega_e (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{B}^e + \omega_\kappa 4h^2 (\mathbf{B}^\kappa)^T \mathbf{B}^\kappa \\ &+ \omega_\mu (\mathbf{B}^\mu)^T (\mathbf{H}_\phi^{(k)}(z_{(j)}))^T \mathbf{H}_\phi^{(k)}(z_{(j)}) \mathbf{B}^\mu \\ &+ \omega_\gamma (\mathbf{B}^\gamma)^T \mathbf{B}^\gamma + \omega_\eta (\mathbf{B}^\eta)^T \mathbf{B}^\eta \end{aligned} \right) dA \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{A} \iint_A \left(\begin{aligned} &\omega_e (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} + \omega_\kappa 4h^2 (\mathbf{B}^\kappa)^T \mathbf{K} \\ &+ \omega_\mu (\mathbf{B}^\mu)^T (\mathbf{H}_\phi^{(k)}(z_{(j)}))^T \mathbf{M}^j \\ &+ \omega_\gamma (\mathbf{B}^\gamma)^T \boldsymbol{\Gamma} + \omega_\eta (\mathbf{B}^\eta)^T \mathbf{H} \end{aligned} \right) dA \quad (36)$$

Burada sol-taraf-matrisine \mathbf{k}^e ve sağ-taraf-vektörüne $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ait integraller sayısal olarak Gauss integrasyon yöntemi ile hesap edilebilir. Sağ-taraf-vektörü her bir gerinim ölçer okuması için tekrar oluşturulmalıdır zira bu okumalar vektörün elde edilmesindeki ana girdiyi sağlamaktadır.

Eş. 36'da ifade edilen deneysel kesit gerinimleri ($\mathbf{E}, \mathbf{K}, \mathbf{M}^j, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{H}$), bir iRZT4 elemanın yüzey koordinatlarının sürekli bir fonksiyonu halinde olup elemanın bütün yüzeyinde mevcut olması durumuna karşılık gelmektedir. Gerçek bir yapıdan böylesine çok veri elde etmek çok sayıda sensörün yerleştirilmesine sebep olacaktır. Bunun yerine, bir iRZT4 elemanın üzerinden toplanan birkaç sensör verisi eğri uydurma yöntemleri (curve-fitting methods) ile deneysel gerinimlerin sürekli fonksiyonlarının elde edilmesini sağlayabilir. Eğer her bir iRZT4 elemanından bir adet düzlem-içi noktada veri toplanıyorsa, o zaman Eş. 36'da verilen sürekli deneysel ölçümler, toplanan tek noktadaki karşılık gelecek şekilde her bir gauss noktasında sabit alınabilir. Bir iFEM-RZT modelinin her iRZT4 elemanına ait lokal denklemler, klasik sonlu eleman montaj işlemlerinin gerçekleştirilmesi ile global olarak Eş. 37'deki forma ulaşır:

$$\mathbf{AU} = \mathbf{Q} \quad (37)$$

Buradaki global denklemleri çözebilmek için modelin fiziksel kısıt koşullarının (yani, yapının rijit gövde

hareketlerini devre dışı bırakacak kısıtlama sınır koşullarının) bu denklemlere uygulanması gerekmektedir. Örneğin, bu sınır koşulları klasik sonlu elemanlar analizine benzer şekilde matris indirgeme yöntemi ile gerçekleştirilebilir ve Eş. 38'de verilen indirgenmiş matris-vektör denkliği elde edilebilir.

$$A_R U_R = Q_R \quad (38)$$

Bu matrisin çözümü A_R matrisinin tersinin alınması ve denklemin her iki tarafının bu ters matris ile soldan çarpılması ile elde edilebilir. Burada dikkat edilmelidir ki A_R matrisi kesin-pozitif ve her zaman tekil olmayan bir matristir ve tersi mevcuttur. Ayrıca, A_R matrisi sensör okumalarından bağımsızdır ve küçük gerinim değişimlerinde sürekli aynı kalmaktadır dolayısıyla gerçek zamanlı analiz esnasında bir kere tersi alınmalıdır. Bu sayede, Eş. 38, herhangi bir şekil algılama analizi sırasında çok hızlı bir şekilde gerçek zamana uygun olarak çözülebilir.

3. SAYISAL ÖRNEKLER (NUMERICAL EXAMPLES)

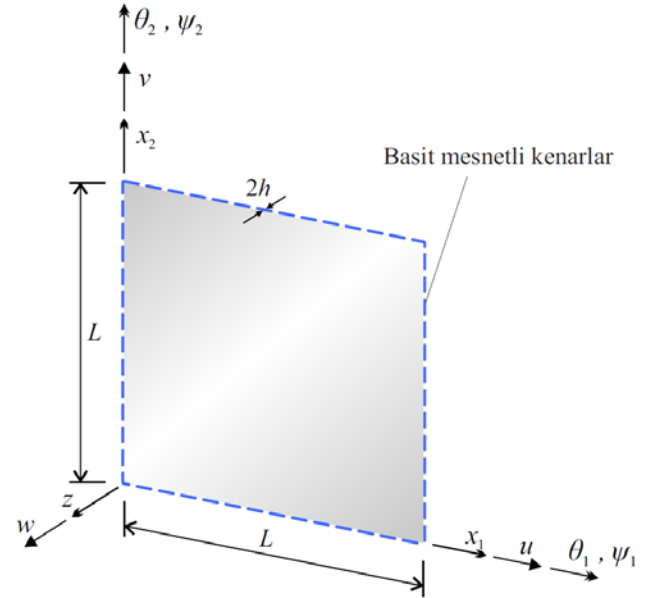
Bir önceki bölümde sunulan matematiksel modelin doğruluğunu göstermek amacıyla bu bölümde basit mesnetli kare bir plakanın şekil ve stres algılama analizlerini iRZT4 elemanı kullanılarak gerçekleştirilecektir. Şekil 3'te gösterildiği gibi, plaka boyutları $L = 1$ [m] olacak şekilde $L \times L$ [m²] olarak tanımlanmıştır. Ayrıca, laminatın toplam kalınlığı $2h$ olup, dört farklı kenar-kalınlık oranı $\rho = L/2h = 5, 10, 20, 40$ vasıtasıyla kalın ve orta kalın plakaları temsil eden tabaklı kompozit veya sandviç bir laminattır. Ele alınan laminatların malzemeleri, tek yönlü karbon-epoksi kompozit (ortotropik malzeme) ve PVC (polyvinyl chloride) dolgu (izotropik malzeme) olarak seçilmiştir. Bu malzemelerin mekanik özellikleri Tablo 1'de açıkça listelenmiştir. Üç farklı tipte laminat, yani çapraz tabakalı kompozit (laminat A), açılı tabakalı sandviç (laminat B) ve antisimetrik sandviç (laminat C) ele alınmıştır. Bu laminatların pozitif z yönünde laminasyon dizilimleri Tablo 2'de listelenmiştir.

Laminata basınç büyüklüğünün $q_0 = -1$ [MPa] olan sinüzoidal değişken bir pozitif z yönünde bir basınç $q(x_1, x_2) = q_0 \sin(\pi x_1 / L) \sin(\pi x_2 / L)$ uygulanmaktadır. Öte yandan, Şekil 3'te görüldüğü gibi plakanın kenarları basit mesnet ile desteklenmiştir. Burada, çapraz tabakalı veya antisimetrik laminatlar (A ve C) için kinematik sınır koşulları Eş. 39'daki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} v = w = \theta_1 = \psi_1 = 0 \quad (x_1 = 0, x_1 = L), \\ u = w = \theta_2 = \psi_2 = 0 \quad (x_2 = 0, x_2 = L) \end{aligned} \quad (39)$$

Öte yandan, açılı tabakalı laminat (B) için kinematik sınır koşulları Eş. 40'daki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} u = w = \theta_1 = \psi_1 = 0 \quad (x_1 = 0, x_1 = L), \\ v = w = \theta_2 = \psi_2 = 0 \quad (x_2 = 0, x_2 = L) \end{aligned} \quad (40)$$



Şekil 3. Basit mesnetle desteklenmiş kompozit plaka (Simply supported composite plate)

Tablo 1. Ortotropik ve izotropik malzemelerin mekanik özellikleri (Mechanical properties of orthotropic and isotropic materials)

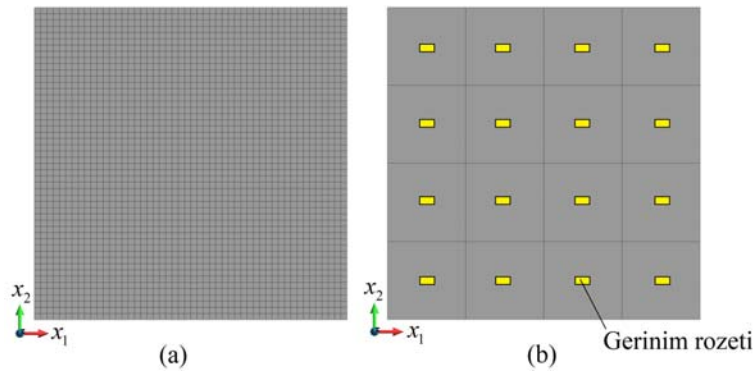
Malzeme	Young modülü [GPa]	Poisson oranı	Kayma modülü [GPa]
K Tek yönlü karbon-epoksi kompozit	$E_1^{(k)} = 157.9$ $E_2^{(k)} = E_3^{(k)} = 9.584$	$\nu_{12}^{(k)} = \nu_{13}^{(k)} = 0.32$ $\nu_{23}^{(k)} = 0.49$	$G_{12}^{(k)} = G_{13}^{(k)} = 5.930$ $G_{23}^{(k)} = 3.227$
P PVC dolgu	$E^{(k)} = 0.104$	$\nu^{(k)} = 0.3$	$G^{(k)} = 0.04$

Tablo 2. Pozitif z yönünde laminasyon dizilimleri (Lamination sequence along positive z direction)

Laminat	Normalizasyon lamina kalınlığı, $h^{(k)}/h$	Lamina malzemesi	Lamina açısı [°]
A Çapraz tabakalı kompozit	0,5/0,5	K/K	0/90
B Açılı tabakalı sandviç	(0,05) ₂ /0,8/(0,05) ₂	(K) ₂ /P/(K) ₂	30/-45/0/45/-30
C Antisimetrik sandviç	(0,025) ₈ /0,7/(0,025) ₄	(K) ₈ /P/(K) ₄	(0/90) ₄ /0/(90/0) ₂

Sunulan problemin doğru bir referans çözümünü elde etmek için RZT tabanlı FEM analizleri vasıtasıyla problem üzerinde yakınsama çalışması yapılmıştır. Bu analizler sonucunda problemin her bir farklı laminasyon dizimi için en yakınsak çözümler, Şekil 4a'da gösterilen 35707 serbestlik derecesine sahip 2500 adet düzgün dağılmış dörtgen elemandan oluşan sonlu eleman ağı ile elde edilmiştir. Her laminatın (A, B, C) farklı kenar-kalınlık oranları için sonlu elemanlar analizden elde edilen kinematik değişkenlerin maksimum değerleri sırasıyla Tablo 3-Tablo 5'de listelenmiştir. Bu maksimum değerler, iFEM analizinden elde edilen ilgili maksimum değerlerle kıyaslanarak iRZT4 elemanın doğruluğunu göstermek için kullanılmıştır. Ayrıca, sonlu elemanlar analiz ile elde edilen

yüksek doğrulukta bu ötelemler ve rotasyonlar, iFEM-RZT analizinde kullanılacak gerinim rozetlerinin deneysel gerinim değerlerini simüle etmek için kullanılmaktadır. Diğer bir deyişle, yeterince yakınsak deformasyon sonuçları sağlayan yüksek doğrulukta sonlu eleman ağını kullanarak her bir laminat (A, B, C) için gerinim sensörü verileri simüle edilmiştir. Bu simülasyon işlemine örnek verecek olursak, Şekil 4b'de görünen sarı ile gösterilmiş sensör noktalarını kapsayan sonlu elemanların sürekli gerinim fonksiyonları kullanılarak sırasıyla x_1 ve x_2 yönündeki normal gerinim değerleri ve x_1x_2 düzlemindeki kayma gerinim değeri hesap edilmiştir. Akabinde bu değerler ilgili iFEM-RZT analizde deneysel veri girdisi olarak kullanılmıştır. Buradaki iFEM analizlerinde, gerilme rozetleri düzenli olarak dağılmıştır.



Şekil 4. (a) Sonlu elemanlar analizi için ayrıklaştırma (b) iRZT4 modeli ($n = 4$).

((a) Discretization for finite element analysis (b) iRZT4 model ($n = 4$))

Tablo 3. Laminat A'ya ait farklı kenar-kalınlık oranları için sonlu elemanlar analizinden elde edilen yapısal tepkilerin maksimum veya minimum değerleri

(Maximum or minimum values of structural responses obtained from finite element analysis for different span-to-thickness ratios of laminate A)

ρ	u^{ref}, v^{ref} [m]	w^{ref} [m]	$\theta_x^{ref}, \theta_y^{ref}$ [rad]	$\psi_x^{ref}, \psi_y^{ref}$ [rad]
5	$2,439 \times 10^{-5}$	$-2,170 \times 10^{-4}$	$5,129 \times 10^{-4}$	$5,507 \times 10^{-5}$
10	$9,431 \times 10^{-5}$	$-1,401 \times 10^{-3}$	$4,066 \times 10^{-3}$	$1,184 \times 10^{-4}$
20	$3,737 \times 10^{-4}$	$-1,054 \times 10^{-2}$	$3,245 \times 10^{-2}$	$2,412 \times 10^{-4}$
40	$1,491 \times 10^{-3}$	$-8,295 \times 10^{-2}$	$2,594 \times 10^{-1}$	$4,848 \times 10^{-4}$

Tablo 4. Laminat B'ye ait farklı kenar-kalınlık oranları için sonlu elemanlar analizinden elde edilen yapısal tepkilerin maksimum veya minimum değerleri

(Maximum or minimum values of structural responses obtained from finite element analysis for different span-to-thickness ratios of laminate B)

ρ	u^{ref} [m]	v^{ref} [m]	w^{ref} [m]	θ_x^{ref} [rad]	θ_y^{ref} [rad]	ψ_x^{ref} [rad]	ψ_y^{ref} [rad]
5	$9,729 \times 10^{-5}$	$3,554 \times 10^{-5}$	$-5,760 \times 10^{-3}$	$2,732 \times 10^{-3}$	$1,572 \times 10^{-3}$	$1,539 \times 10^{-2}$	$1,652 \times 10^{-2}$
10	$1,778 \times 10^{-4}$	$6,755 \times 10^{-5}$	$-1,313 \times 10^{-2}$	$9,198 \times 10^{-3}$	$4,473 \times 10^{-3}$	$3,224 \times 10^{-2}$	$3,694 \times 10^{-2}$
20	$4,621 \times 10^{-4}$	$4,509 \times 10^{-4}$	$-3,212 \times 10^{-2}$	$3,849 \times 10^{-2}$	$2,292 \times 10^{-2}$	$6,286 \times 10^{-2}$	$7,839 \times 10^{-2}$
40	$1,568 \times 10^{-3}$	$1,903 \times 10^{-3}$	$-1,064 \times 10^{-1}$	$2,123 \times 10^{-1}$	$1,740 \times 10^{-1}$	$1,228 \times 10^{-1}$	$1,611 \times 10^{-1}$

Tablo 5. Laminat C'ye ait farklı kenar-kalınlık oranları için sonlu elemanlar analizinden elde edilen yapısal tepkilerin maksimum veya minimum değerleri

(Maximum or minimum values of structural responses obtained from finite element analysis for different span-to-thickness ratios of laminate C)

ρ	u^{ref} [m]	v^{ref} [m]	w^{ref} [m]	θ_x^{ref} [rad]	θ_y^{ref} [rad]	ψ_x^{ref} [rad]	ψ_y^{ref} [rad]
5	$5,015 \times 10^{-5}$	$5,071 \times 10^{-5}$	$-3,739 \times 10^{-3}$	$2,188 \times 10^{-3}$	$1,675 \times 10^{-3}$	$9,396 \times 10^{-3}$	$9,897 \times 10^{-3}$
10	$4,668 \times 10^{-5}$	$4,939 \times 10^{-5}$	$-1,128 \times 10^{-2}$	$8,415 \times 10^{-3}$	$6,955 \times 10^{-3}$	$2,707 \times 10^{-2}$	$2,849 \times 10^{-2}$
20	$6,211 \times 10^{-5}$	$5,085 \times 10^{-5}$	$-3,134 \times 10^{-2}$	$3,793 \times 10^{-2}$	$3,476 \times 10^{-2}$	$6,087 \times 10^{-2}$	$6,396 \times 10^{-2}$
40	$5,358 \times 10^{-4}$	$4,925 \times 10^{-4}$	$-1,147 \times 10^{-1}$	$2,356 \times 10^{-1}$	$2,294 \times 10^{-1}$	$1,258 \times 10^{-1}$	$1,318 \times 10^{-1}$

Her bir gerinim rozet konfigürasyonu, plaka kenarları boyunca n sayıda eleman alt bölümleriyle oluşturulmuş bir iRZT4 ayrıklaştırması ile ilgilidir. Örneğin, n parametresinin $n=4$ olarak seçilmesi durumunda toplam $n \times n = 16$ adet iRZT4 elemanı ile plaka Şekil 4b’de verilen şekilde modellenilebilir. Buradaki sensör konfigürasyonu için her bir iRZT4 elemanının geometrik merkezinde kalınlık yönü boyunca üç adet gerinim sensörü yerleştirilmiştir. Yani $n=4$ olması durumunda kullanılan toplam sensör sayısı 48 adet olmaktadır. Bu sensörlerin kalınlık koordinatı boyunca kesin lokasyonları şu şekilde seçilmiştir: (i) alt yüzey gerinim rozeti, (ii) üst yüzey gerinim rozet, (iii) alttan birinci ile ikinci katman arasında gömülü gerinim rozeti. Gerçekleştirilen iFEM-RZT analizlerinin yakınsaklığını incelemek amacıyla buradaki n parametresi $n=4,6,8,10$ olacak şekilde değiştirilmiş ve her bir iFEM ağına ait sensör pozisyonlarından gerinim değerleri toplanmıştır. Böylece, bahsedilen sensör konfigürasyonunun sahip olduğu şekil ve stres algılama kabiliyetlerinin hassasiyeti iRZT4 elemanı için ölçülebilir. Buradaki temel hedef, gerçek deneysel gerinim verilerini kullanarak iRZT4 elemanı ile yapılacak şekil ve gerilme algılama analizi sırasında kullanılan sensör sayısını en aza indirerek istenilen hassasiyetle doğru deformasyon ve gerilme sonuçlarını elde edebilmektir. iFEM-RZT analizleri esnasında her bir laminat (A, B, C) için membran, eğilme ve zikzak kesit gerinimlerine karşılık gelen ağırlık katsayıları $\omega_e = \omega_k = \omega_\mu = 1$ şeklinde bire eşitlenmiştir. Öte yandan, birinci ve ikinci kayma kesit gerinimlerinin ağırlık katsayıları laminat A için $\omega_\gamma = 10^{-4}$ ve $\omega_\eta = 10^{-8}$ olarak seçilirken, sandviç laminatlar B ve C için bu ağırlık katsayıları için $\omega_\gamma = 10^{-8}$ ve $\omega_\eta = 10^{-4}$ şeklinde seçilmiştir.

Farklı kenar-kalınlık oranlarına sahip Laminat A için elde edilen iFEM deformasyon ve rotasyon sonuçlarının maksimum değerleri referans çözümler ile Tablo 6, Tablo 7’de listelenen yüzde farkların hesaplanması vasıtasıyla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalara göre ele alınan her bir kenar-kalınlık oranı için iRZT4 elemanı sadece $n=4$ ağına karşılık gelen sensör konfigürasyonu kullanarak bile yüksek doğrulukta (%1’den az hata payı ile) düzlem-içi ötelenmeleri elde edebilmektedir (Tablo 6). Öte yandan, Tablo 7’de listendiği üzere iRZT4 ($n=4$) modeli yaklaşık %7 hata payı ile eğilme dönmelerini elde ederken, bu hatalar zikzak genliklerinin tahminleri için %2 mertebesinde ya da daha azdır. Sensör sayısının artırılması yani n parametresinin yükselmesi ve iRZT4 ağ modelinin aynı oranda yoğunlaştırılması sayesinde elde edilen sonuçlardaki hata payı düzlem-içi ötelenmeler, eğilme ve zikzak dönmeleri için en fazla %1 mertebesinde.

Öte yandan, enine çökme değerlerindeki hata payı Laminat A’nın çok kalın olması durumunda en yoğun sensör modeli ile bile %25 mertebesinde. Bu hata payının fazla olmasının temel sebebi, kalın Laminat A için ortaya çıkan enine kayma gerinimlerinin oldukça yüksek olmasından kaynaklanmaktadır. Bu hata payı kalınlığın azalması ile iRZT4 ($n=4$) modeli için %4’e kadar gerilemiştir. Tablo 6’dan görüleceği üzere, daha yoğun bir iRZT4 modelin için kalınlık azaldıkça daha doğru bir enine çökme değerinin ($\rho=40, n=10$ için %1 hata payı) elde edilmesine imkân tanımıştır. Unutulmamalıdır ki Kefal vd. [23, 24] tarafından geliştirilen hesaplamalı yöntem ile deneysel enine kayma kesit gerinimlerinin hesaplanması ve akabinde iFEM-RZT analizine girdi olarak kullanılması ile buradaki çökme değerlerinin doğruluğunun artırılması mümkündür. Ancak,

Tablo 6. Laminat A’ya ait u, v, w kinematik değişkenlerinin maksimum değerleri için iFEM-RZT ve referans çözümleri arasındaki yüzde farklar

(Percent differences between iFEM-RZT and reference solutions for maximum values of u, v, w kinematic variables of laminate A)

iRZT4 Modeli n	Yüzde Fark, $ 1 - \chi/\chi^{ref} $, (%) ($\chi = u, v$)				Yüzde Fark, $ 1 - w/w^{ref} $, (%)			
	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=20$	$\rho=40$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=20$	$\rho=40$
4	0,39	0,39	0,39	0,39	27,44	11,27	5,97	4,54
6	0,11	0,12	0,13	0,12	25,85	9,12	3,63	2,14
8	0,07	0,08	0,08	0,07	25,37	8,45	2,90	1,40
10	0,07	0,07	0,07	0,07	25,16	8,17	2,59	1,08

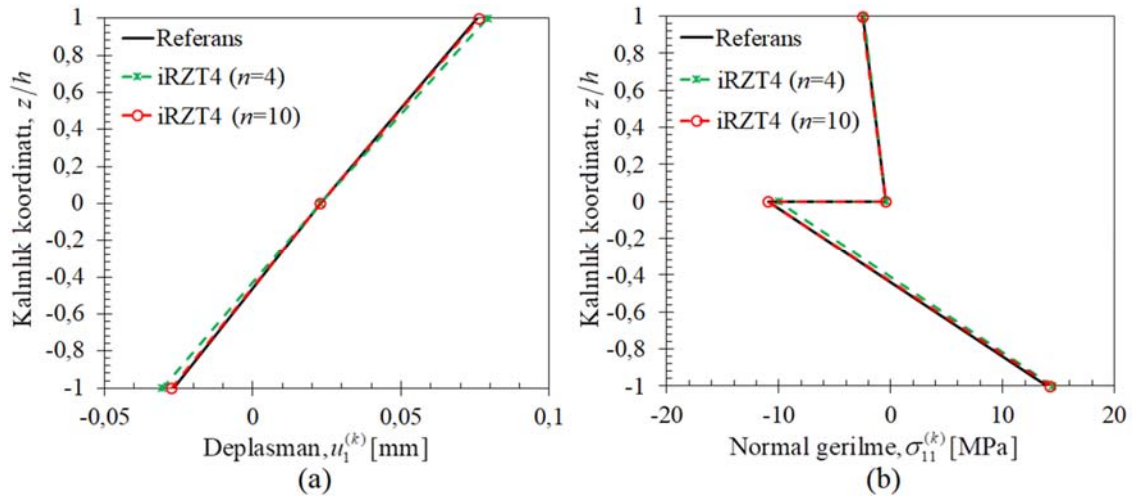
Tablo 7. Laminat A’ya ait θ_i, ψ_i ($i=1,2$) kinematik değişkenlerinin maksimum değerleri için iFEM-RZT ve referans çözümleri arasındaki yüzde farklar

(Percent differences between iFEM-RZT and reference solutions for maximum values of θ_i, ψ_i ($i=1,2$) kinematic variables of laminate A)

iRZT4 Modeli n	Yüzde Fark, $ 1 - \theta_i/\theta_i^{ref} $, (%) ($i=1,2$)				Yüzde Fark, $ 1 - \psi_i/\psi_i^{ref} $, (%) ($i=1,2$)			
	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=20$	$\rho=40$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=20$	$\rho=40$
4	6,93	6,93	6,92	6,92	0,34	0,49	0,81	2,07
6	3,01	3,01	3,01	3,01	0,04	0,03	0,31	1,08
8	1,66	1,66	1,66	1,66	0,18	0,14	0,03	0,66
10	1,03	1,04	1,04	1,03	0,08	0,11	0,22	0,66

hali hazırda elde edilen çökme değerleri iRZT4 elemanın orta kalınlıkta seyrek sensör dağılımı için ($\rho = 20, n = 4$) yakınsak sonuçlar verdiğini kanıtlamaktadır. Dolayısıyla, genel olarak, Laminat A için doğru şekil algılama sonuçlarının elde edildiği görülmektedir. Bununla birlikte, kalınlık yönü boyunca deplasmanların ve normal gerilmelerin değişimi Şekil 5'te gösterilmektedir. Bu şekilden görüleceği üzere, iRZT4 ($n = 4$) modeli, plakanın bütününde referans sonuçlarla uyumlu deplasman ve gerilme algılamasını yüksek doğrulukla elde etmiştir. Ağ yoğunluğunun artırılması, yani iRZT4 ($n = 10$) modelinin kullanılması, iFEM-RZT analiz sonuçlarının referans çözümlerle birebir örtüşmesine imkân vermiştir.

Tablo 8, Tablo 9'da farklı kenar-kalınlık oranlarını sahip Laminat B için elde edilen iFEM-RZT sonuçları ve referans çözümler arasındaki yüzde farklar hesaplanmış ve listelenmiştir. Bu sonuçlar ışığında, tüm ötelenme veya rotasyonlar için iFEM tahminlerinin, çok az sayıda sensör kullanılması ile bile, referans çözümlere çok hızlı bir şekilde yakınsadığı görülmektedir. Örneğin, iRZT4 ($n = 4$) modeli kalın sandviç Laminat B ($\rho = 5$) için referans çözümlere kıyasla yaklaşık %5 hata payı ile hem u düzlem-içi ötelenmeleri hem de w enine çökmeleri yüksek doğrulukta elde etmiştir. Benzer şekilde, iRZT4 ($n = 4$) modeli kalın Laminat B'ye ait eğilme ve zikzak rotasyonları için %7'den az hata ile sonuçlar elde etmiştir. Bu hata payları, laminatın



Şekil 5. Laminat A kalınlığı boyunca (a) $u_1^{(k)}(0, L/2, z)$ deplasman ve (b) $\sigma_{11}^{(k)}(L/2, L/2, z)$ normal gerilme dağılımları
((a) $u_1^{(k)}(0, L/2, z)$ displacement and (b) $\sigma_{11}^{(k)}(L/2, L/2, z)$ normal stress distributions along the thickness of laminate A)

Tablo 8. Laminat B'ye ait u , w kinematik değişkenlerinin maksimum değerleri için iFEM-RZT ve referans çözümleri arasındaki yüzde farklar

(Percent differences between iFEM-RZT and reference solutions for maximum values of u , w kinematic variables of laminate B)

iRZT4 Modeli n	Yüzde fark, $ 1 - u/u^{ref} $, (%)				Yüzde fark, $ 1 - w/w^{ref} $, (%)			
	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 40$	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 40$
4	4,60	1,88	0,29	1,16	4,06	3,73	3,73	3,88
6	2,02	0,86	0,07	0,44	1,65	1,32	1,30	1,44
8	1,12	0,48	0,03	0,24	0,90	0,56	0,55	0,69
10	0,68	0,27	0,06	0,19	0,57	0,24	0,22	0,36

Tablo 9. Laminat B'ye ait θ_1 , ψ_2 kinematik değişkenlerinin maksimum değerleri için iFEM-RZT ve referans çözümleri arasındaki yüzde farklar.

(Percent differences between iFEM-RZT and reference solutions for maximum values of θ_1 , ψ_2 kinematic variables of laminate B)

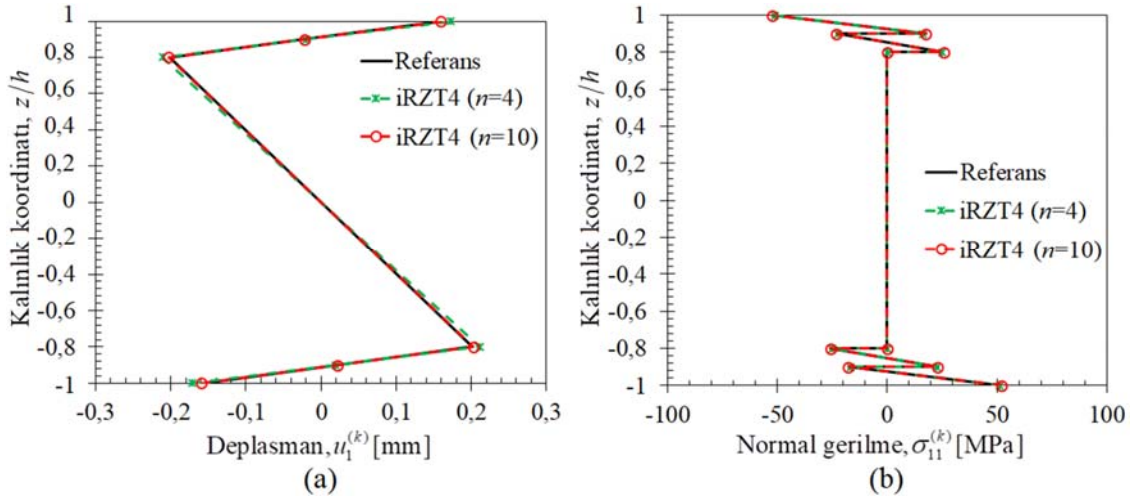
iRZT4 Modeli n	Yüzde fark, $ 1 - \theta_1/\theta_1^{ref} $, (%)				Yüzde fark, $ 1 - \psi_2/\psi_2^{ref} $, (%)			
	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 40$	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 40$
4	5,37	5,05	5,45	6,27	6,67	6,46	6,19	5,97
6	2,35	2,21	2,38	2,73	2,91	2,82	2,70	2,61
8	1,29	1,22	1,31	1,51	1,60	1,56	1,49	1,43
10	0,80	0,75	0,81	0,93	1,00	0,97	0,93	0,89

incelemesiyle birlikte genel olarak azalırken, modelin daha yoğun sensör verileri kullanması ile birlikte neredeyse yok denecek hale (%1'de az) indirgenmiştir. Bu sonuçlar, iRZT4 elemanının, üstün şekil algılama yeteneklerini ortaya koymaktadır. Buna ek olarak, sandviç Laminat B'nin kalın hali için düzlem içi yer değiştirmelerin ve normal gerilmelerinin kalınlık dağılımları Şekil 6'da gösterildiği gibi referans çözümlerle kıyaslanmıştır. Bu kıyaslama sonuçlarına göre, kalınlık yönü boyunca oluşan yüksek dereceden zikzak düzlem içi deplasman ve gerilme dağılımları iRZT4 ($n = 4$) modeli ile referans çözümlerle uyumlu şekilde elde edilmiştir. Son olarak, kalınlık boyunca zikzak dağılımlar iRZT4 ($n = 10$) modelinin kullanılması ile referans çözümlerden ayırt edilmeyecek kadar doğru şekilde Şekil 6'da verildiği gibi elde edilir.

Son olarak, farklı kalınlıktaki antisimetrik Laminat C için iFEM-RZT ile elde edilen kinematik değişkenler ve referans çözümler arasındaki yüzde farklar Tablo 10, Tablo 11'de listelenmiştir. Bu karşılaştırmadan anlaşılacağı üzere, iRZT4 ($n = 4$) modeli ele alınan dört farklı kenar-kalınlık oranlarındaki antisimetrik laminata ait u , w yer değiştirmelerinin maksimum değerleri için sırasıyla %7 ve %5,5'dan az hata payı ile doğru tahminler elde etmiştir (Tablo 10). Benzer doğruluk seviyesi, Tablo 11'de verildiği

üzere, θ_1 ve ψ_2 dönmelerinin maksimum değerleri içinde iRZT4 ($n = 4$) modeli kullanılması ile elde edilmiştir. Sonuç olarak, iFEM-RZT analizi esnasında az sayıda sensör verisinin kullanılması, Laminat C'ye ait tüm kritik ötelenmelerin ve dönmelerin referans çözümlerle uyum sağlayacak şekilde elde edilmesini mümkün kıldığı görülmektedir. Dolayısıyla, iRZT4 ($n = 4$) modeli yüksek çözünürlükte deforme olmuş Laminat C şekil algılamasını yapabildiği görülmektedir.

Tablo 10, Tablo 11'den görüleceği üzere, iFEM-RZT ve referans çözümler arasındaki hata payları, genel olarak hem laminatın incelemesiyle hem de iRZT4 modelinde daha yoğun sensör verileri kullanması sayesinde %1 mertebesine indirgenmiştir. Buna ek olarak, Şekil 7'de gösterildiği gibi, kenar-kalınlık oranı $\rho = 5$ olan antisimetrik sandviç Laminat C'ye ait, $u_1^{(k)}$ yer değiştirmelerin ve $\sigma_{11}^{(k)}$ normal gerilmelerinin kalınlık koordinatı boyunca zikzak bir yol izlediği saptanmıştır. Bu zikzak dağılımlarda, iRZT4 ($n = 4$) modeli ile referans çözümlere kıyasla neredeyse mükemmel bir uyum içinde elde edilmiştir. Hatta, iRZT4 ($n = 10$) modeline karşılık gelen deplasman ve gerilme dağılımları referans çözümlerden neredeyse ayırt edilemeyecek doğrulukta sonuç vermektedir (Şekil 7).



Şekil 6. Laminat B kalınlığı boyunca (a) $u_1^{(k)}(0, L/2, z)$ deplasman ve (b) $\sigma_{11}(L/2, L/2, z)$ normal gerilme dağılımları
((a) $u_1^{(k)}(0, L/2, z)$ displacement and (b) $\sigma_{11}^{(k)}(L/2, L/2, z)$ normal stress distributions along the thickness of laminate B)

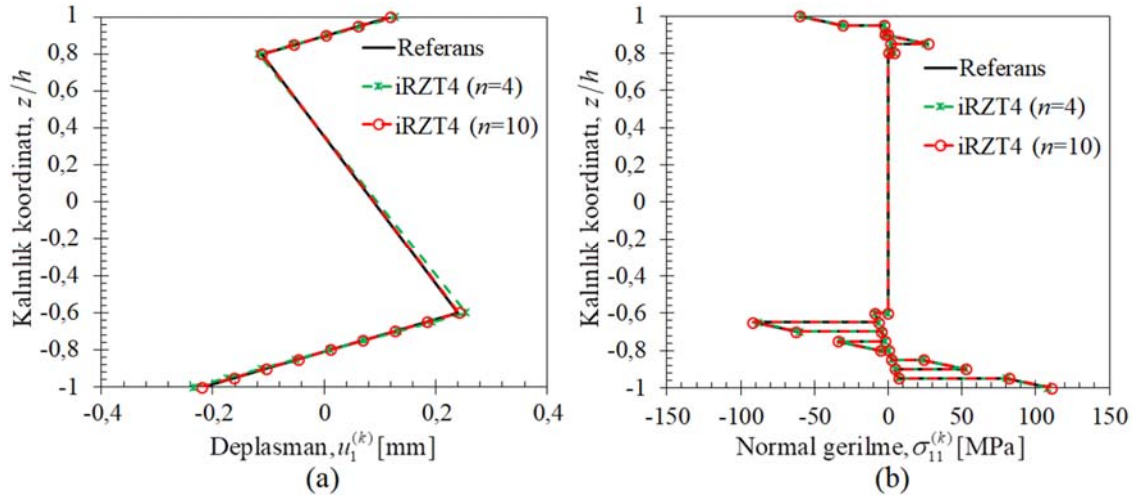
Tablo 10. Laminat C'ye ait u , w kinematik değişkenlerinin maksimum değerleri için iFEM-RZT ve referans çözümleri arasındaki yüzde farklar

(Percent differences between iFEM-RZT and reference solutions for maximum values of u , w kinematic variables of laminate C)

iRZT4 Modeli n	Yüzde fark, $ 1 - u/u^{ref} $, (%)				Yüzde fark, $ 1 - w/w^{ref} $, (%)			
	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 40$	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 40$
4	6,96	7,13	6,26	6,63	5,50	4,09	3,85	4,03
6	3,02	3,09	2,73	2,89	3,13	1,68	1,41	1,50
8	1,67	1,70	1,51	1,59	2,39	0,92	0,65	0,73
10	1,04	1,06	0,93	0,99	2,06	0,59	0,32	0,41

Tablo 11. Laminat C'ye ait θ_1 , ψ_2 kinematik değişkenlerinin maksimum değerleri için iFEM-RZT ve referans çözümleri arasındaki yüzde farklar(Percent differences between iFEM-RZT and reference solutions for maximum values of θ_1 , ψ_2 kinematic variables of laminate C)

iRZT4 Modeli n	Yüzde fark, $ 1 - \theta_1 / \theta_1^{ref} $, (%)				Yüzde fark, $ 1 - \psi_2 / \psi_2^{ref} $, (%)			
	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 40$	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 20$	$\rho = 40$
4	6,06	6,29	6,62	6,83	6,74	6,75	6,72	6,33
6	2,64	2,74	2,88	2,97	2,94	2,96	2,96	2,88
8	1,45	1,51	1,59	1,64	1,62	1,64	1,64	1,59
10	0,90	0,94	0,99	1,02	1,02	1,04	1,04	0,98

**Şekil 7.** Laminat C kalınlığı boyunca (a) $u_1^{(k)}(0, L/2, z)$ deplasman ve (b) $\sigma_{11}^{(k)}(L/2, L/2, z)$ normal gerilme dağılımları(a) $u_1^{(k)}(0, L/2, z)$ displacement and (b) $\sigma_{11}^{(k)}(L/2, L/2, z)$ normal stress distributions along the thickness of laminate C)

Bu nedenle, bu sonuçlar, az sayıda $n=4$ elementin gerinim rozetine sahip olduğu bir iRZT4 modelinin, çok sayıda olana $n=10$ kıyasla, kalınlık yönü boyunca benzer şekil ve gerinim dağılımları ürettiğini kanıtlamaktadır. Bu sonuçlar ışığında, iRZT4 elemanın, az sayıda sensör verisi kullanılması ile bile üstün şekil ve gerilme algılama yeteneklerine sahip olduğu görülmektedir.

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Ayrık konumlarda gerinim sensörlerinin yerleştirildiği çok katmanlı kompozit ve sandviç plakaların şekil ve gerilme algılamasını gerçekleştirmek amacıyla iRZT4 olarak isimlendirilen yeni bir dört-düğüm noktalı ters-plaka elemanın iFEM-RZT formülasyonu sunulmuştur. Formülasyon, RZT plaka teorisi ile tutarlı olan bütün gerinim ölçümleri kümesini oluşturan ağırlıklı en küçük kareler fonksiyonunun minimize edilmesi ile elde edilmiştir. iRZT4 elemanı, C^0 -sürekli ayrıklaştırma için uygun olup düzlem-içi ötelenme, eğilme ve zikzak dönme kinematik değişkenlerini lineer polinomlar ile ifade etmektedir. Bununla birlikte, düzlem-dışı ötelenme kinematik değişkenin karesel şekil fonksiyonları ile ifade etmektedir. Böylece, iRZT4 formülasyonu kayma-kilitlenmesi (shear-locking) özel durumundan arındırılmıştır. iRZT4 elemanın bir avantajı, ince ve orta kalınlıktaki levha ve kabuk yapılarının analizi

için kullanılabilirliği, çünkü mevcut iFEM-RZT varyasyon prensibi RZT'nin tam enine-kayma deformasyonu için uygundur. Ele alınan çeşitli laminasyon dizimlerinin şekil ve gerilme analizlerinin neticesinde, iRZT4 ayrıklaştırmasının birleşik eğilme ve membran yapısal tepkilerini hesaplama noktasında, yüksek doğruluk gösterdiği ispatlanmıştır. Her bir laminasyon dizimi için sensör konumlarının ve sensör sayısının çözümlerin doğruluğu üzerinde etkileri incelenmiştir.

Sonuç olarak, buradaki problemlerin çözümünde kullanılan en yoğun ve en seyrek sensör verisi içeren iRZT4 modellerinden her ikisi ile de yer değiştirmelerin ve gerilmelerin kalınlık boyunca olan zikzak dağılımlarını oldukça yüksek hasiyetle doğru olarak hesaplandığı gözlemlenmiştir. Diğer bir deyişle, iRZT4 elemanın kullanılması sayesinde, göreceli olarak seyrek gerinim verilerinin varlığında bile, deforme olmuş yapısal şekillerin ve gerilmelerin yeterince doğru bir şekilde yeniden yapılandırılabilirdiği gösterilmiştir. Bu doğrultuda, iRZT4 elemanın mühendislik yapılarına uygulanması için pratik olarak kullanılması mümkündür. Son olarak, yeni iRZT4 elemanı, herhangi bir genel amaçlı sonlu eleman yazılımında kolayca entegre edilebilir niteliktedir. Böylece, iRZT4/iFEM-RZT teknolojisi, lamine kompozit ve sandviç yapıların gerçek zamanlı yapısal sağlık izlemesi için yüksek potansiyelli bir hesaplama aracı olma özelliğine sahiptir.

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGEMENT)

Bu çalışmanın yapılmasında 217M207 numaralı proje kapsamında sağlanan desteklerinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Yağmur S., Kurt A., Şeker U, Evaluation and mathematical modeling of delamination and cutting forces in milling of carbon fiber reinforced composite (CFRP) materials, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 35 (1), 457-466, 2020.
2. İnal O., Ataş A., Experimental investigation of pinned joints in NCF Glass-Fibre reinforced composite plates, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 33 (4), 1445-1458, 2018.
3. Yıldırım, T., Tosun Felekoğlu, K., Gödek, E., Keskinateş, M., Felekoğlu, B., Önal, O., Investigation of multiple cracking behavior of cement-based fiber composites by digital image correlation method, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 34 (1), 479-494, 2019.
4. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y., *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston and Sons, Washington, DC, 1977. doi:10.1137/1021044
5. Davis, M.A., Kersey, A.D., Sirkis, J., Friebele, E.J., Shape and vibration mode sensing using a fiber optic Bragg grating array, *Smart Materials and Structures*, 5 (6), 759-765, 1996.
6. Bogert, P.B., Haugse, E.D., Gehrki, R.E., Structural shape identification from experimental strains using a modal transformation technique, *Proceedings of 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Norfolk, VA, 2003. doi:10.2514/6.2003-1626
7. Tessler, A., Spangler, J.L., A variational principal for reconstruction of elastic deformation of shear deformable plates and shells, *NASA TM-2003-212445*, 2003.
8. Tessler, A., Spangler, J.L., A least-squares variational method for full-field reconstruction of elastic deformations in shear-deformable plates and shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19 (2), 327-339, 2005.
9. Tessler, A., Spangler, J.L., Inverse FEM for full-field reconstruction of elastic deformations in shear deformable plates and shells, *Proceedings of 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring*, Munich, Germany, 2004.
10. Vazquez, S.L., Tessler, A., Quach, C.C., Cooper, E.G., Parks, J., Spangler J.L., Structural health monitoring using high-density fiber optic strain sensor and inverse finite element methods, *NASA TM-2005-213761*, 2005.
11. Kefal, A., Oterkus, E., Tessler, A., Spangler, J.L. A quadrilateral inverse-shell element with drilling degrees of freedom for shape sensing and structural health monitoring. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 19, 1299-1313, 2016.
12. Kefal, A., Oterkus, E., Displacement and stress monitoring of a chemical tanker based on inverse finite element method, *Ocean Engineering*, 112, 33-46, 2016.
13. Kefal, A., Oterkus, E., Displacement and stress monitoring of a Panamax containership using inverse finite element method, *Ocean Engineering*, 119, 16-29, 2016.
14. Kefal, A., Mayang, J.B., Oterkus, E., Yildiz, M., Three dimensional shape and stress monitoring of bulk carriers based on iFEM methodology, *Ocean Engineering*, 147, 256-267, 2018.
15. Gherlone, M., Cerracchio, P., Mattone, M., Di Sciuva, M., Tessler, A., Shape sensing of 3D frame structures using an inverse finite element method, *International Journal of Solids and Structures*, 49 (22), 3100-3112, 2012.
16. Gherlone, M., Cerracchio, P., Mattone, M., Di Sciuva, M., Tessler, A., An inverse finite element method for beam shape sensing: theoretical framework and experimental validation, *Smart Materials and Structures*, 23 (4), 045027, 2014.
17. Zhao, Y., Du, J., Bao, H., Xu, Q., Optimal Sensor Placement Based on Eigenvalues Analysis for Sensing Deformation of Wing Frame Using iFEM, *Sensors*, 18 (8), 2424, 2018.
18. Mooij C., Martinez, M., Benedictus, R., iFEM benchmark problems for solid elements, *Smart Materials and Structures*, In-Press, 2019.
19. Miller, E.J., Manalo, R., Tessler, A., Full-Field Reconstruction of Structural Deformations and Loads from Measured Strain Data on a Wing Test Article using the Inverse Finite Element Method, *NASA TM-2016-219407*, 2016.
20. Kefal, A., Yildiz, M., Modeling of Sensor Placement Strategy for Shape Sensing and Structural Health Monitoring of a Wing-Shaped Sandwich Panel Using Inverse Finite Element Method, *Sensors*, 17 (12), 2775, 2017.
21. Tessler, A., Di Sciuva, M., Gherlone, M., A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 5 (2), 341-367, 2010.
22. Cerracchio, P., Gherlone, M., Di Sciuva, M., Tessler, A., A novel approach for displacement and stress monitoring of sandwich structures based on the inverse finite element method, *Composite Structures*, 127, 69-76, 2015.
23. Kefal, A., Tessler, A., Oterkus, E., An enhanced inverse finite element method for displacement and stress monitoring of multilayered composite and sandwich structures, *Composite Structures*, 179, 514-540, 2017.

24. Kefal, A., Tessler, A., Oterkus, E., An Efficient Inverse Finite Element Method for Shape and Stress Sensing of Laminated Composite and Sandwich Plates and Shells, NASA/TP-2018-220079, 2018.
25. Tessler, A., Hughes, T.J.R., An improved treatment of transverse shear in the Mindlin-type four-node quadrilateral element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39 (3), 311-335, 1983.

