





New formulations for multiple traveler minimum latency problem with time windows

Gözde Önder Uzun* , İmdat Kara 

Industrial Engineering Department, Baskent University, Ankara, 06810, Turkey

Highlights:

- Homogeneous and heterogeneous multiple traveler minimum latency problem with time windows
- New mathematical models with polynomial number of decision variables and constraints
- Analysis of mathematical models in terms of CPU times and linear programming relaxation values

Keywords:

- Minimum latency problem
- Routing
- Multiple travelers
- Time windows
- Mathematical modeling

Article Info:

Research Article
Received: 05.08.2020
Accepted: 15.07.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.777322

Correspondence:

Author: Gözde Önder Uzun
e-mail:
gonder@baskent.edu.tr
phone: +90 312 246 1235

Graphical/Tabular Abstract

Table A. Average CPU times and average percentage deviations for different number of nodes and different number of travelers for homogeneous and heterogeneous kLPTW

Mathematical Models	Number of nodes	k=2	k=3	k=4	k=5				
M1 existing homogeneous	20	103.96	0.042	28.07	0.031	68.42	0.029	9.40	0.021
	40	28.87	0.008	12.23	0.005	27.28	0.004	70.83	0.004
	60	56.91	0.005	16.124	0.009	32.242	0.002	52.532	0.002
	80	-	-	49.28	0.009	90.36	0	102.89	0
	100	-	-	843.77	0.008	-	-	-	-
M2 New homogeneous	20	1.21	0.025	0.47	0.013	0.41	0.011	0.36	0.010
	40	20.83	0.008	11.92	0.006	5.07	0.006	3.46	0.005
	60	7.01	0.002	103.61	0.008	54.81	0.004	31.54	0.005
	80	40.592	0.012	19.23	0.009	202.96	0.004	136.12	0.004
	100	300.73	0.009	180.84	0.007	23.19	0	191.23	0.006
M3 existing heterogeneous	20	99.33	0.066	-	-	-	-	-	-
	40	70.25	0.012	-	-	-	-	-	-
M4 New heterogeneous	20	25.26	0.020	27.55	0.023	51.64	0.022	69.50	0.019
	40	63.23	0.006	108.02	0.008	243.46	0.003	435.56	0.003
New heterogeneous	60	104.11	0.002	887.46	0.02	962.92	0.001	1098.47	0.001
	80	419.80	0.07	881.85	0.012	-	-	-	-

In this paper, new mathematical models for homogeneous and heterogeneous multiple traveler minimum latency problem with time windows (kLPTW), named as M2 and M4 are developed. These models are computationally compared with existing models named as M1 and M3 for kLPTW in terms of CPU times and percentage deviation from linear programming relaxation values. A short summary of the computational analysis is given in table A below. In Table A, k is the number of travelers. The first column under the number of traveler cell shows the average CPU times of problems solved in time limit and the second column shows the average percentage deviations. We observed that, our formulations are superior than the existing formulations for all the problems for both kLPTW types with respect to each performance criteria.

Purpose: The aim of this study is to develop new mathematical formulations for homogeneous and heterogeneous multiple traveler minimum latency problem with time windows.

Theory and Methods: Based on the mixed integer linear programming, mathematical models with polynomial number of decision variables and constraints are developed. Benchmark instances from the literature are solved with existing formulations and proposed new formulations by using CPLEX 12.5.0.1. CPU times and percentage deviation from linear programming relaxation values are considered as performance criteria.

Results: We solved 125 problems with varying number of nodes and time windows. In all the problem solved proposed formulations are better than the existing formulations in terms of both of the performance criteria.

Conclusion: The proposed formulations for homogeneous and heterogeneous multiple traveler minimum latency problem with time windows are superior than the existing formulations and able to solve the problems up to 100 nodes with narrow time windows. Proposed formulations may be used to solve small and moderate real-life problems very easily. They may also be used for testing the performance of the heuristics constructed for kLPTW.



Zaman pencereleli çok ekipli gecikme problemi için yeni matematiksel modeller

Gözde Önder Uzun*^{ID}, İmdat Kara^{ID}

Başkent Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 06810, Etimesgut Ankara Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Homojen ve heterojen zaman pencereleli çok ekipli gecikme problemi
- Polinom sayıda karar değişkenine ve kısıta sahip yeni matematiksel modeller
- Matematiksel modellerin CPU süreleri ve doğrusal programlama gevşetme değerlerinin analizi

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi
Geliş: 05.08.2020
Kabul: 15.07.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.777322

Anahtar Kelimeler:

Gecikme problemi,
rotalama,
çok gezgin,
zaman penceresi,
matematiksel modelleme

ÖZ

Gecikme problemi (GP), gezgin satıcı probleminin (GSP) önemli bir türünü oluşturmaktadır. Problem, bir hareketlinin (kişi, araç, ekip vb.) verilen bir başlangıç noktasından hareket edip tüm müşterileri ziyaret ederek toplam gecikmeyi en küçük yapan Hamilton yolunu veya turunu bulmaktır. Gecikme, bir müşterinin talebinin karşılanıncaya kadar geçen süreyi ifade etmektedir. Zaman pencereleli çok ekipli (gezginli) GP (ZPÇGP) ise her biri başlangıç düğümünden başlayıp, tüm müşterilerin belirlenmiş olan en erken ve en geç ziyaret zamanını ifade eden zaman penceresi aralığında talebini karşılayarak, toplam gecikmeyi en küçük yapan k adet turu veya yolu bulmayı amaçlamaktadır. Problem, düğümler arası seyahat gezgine (ekibe, araca) bağlı değil ise homojen, gezgine bağlı ise heterojen ZPÇGP olarak ele alınmaktadır. Kaynaklar incelendiğinde homojen durum için bir matematiksel model ve heterojen durum için de bir matematiksel model olduğu görülmüştür. Bu çalışmada, homojen ve heterojen durum için, polinom sayıda karar değişkenine ve kısıta sahip, matematiksel modeller önerilmiştir. Kaynaklarda var olan ve bu çalışmada geliştirilmiş olan matematiksel modeller kıyaslama problemleri kullanılarak farklı ekip sayıları için analiz edilmiştir. Sonuçlar CPU süreleri ve doğrusal programlama gevşetme değerlerinin en iyi değerden oransal sapmaları açısından karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, ZPÇGP için geliştirilen yeni matematiksel modellerin kaynaklarda var olan modellerden her problemde çok daha üstün olduğu görülmüştür.

New formulations for multiple travelers minimum latency problem with time windows

H I G H L I G H T S

- Homogeneous and heterogeneous multiple travelers minimum latency problem with time windows
- New mathematical models with polynomial number of decision variables and constraints
- Analysis of mathematical models in terms of CPU times and linear programming relaxation values

Article Info

Research Article
Received: 05.08.2020
Accepted: 15.07.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.777322

Keywords:

Minimum latency problem,
routing,
multiple travelers,
time windows,
mathematical modeling

ABSTRACT

One of the important variants of the Traveling Salesman Problem (TSP) is the Minimum Latency Problem (LP). In the LP, the purpose is to find a Hamiltonian path or tour starting from the origin while minimizing the total latency (waiting time or delay time) of all customers. The latency of a customer is defined as the time passed from the beginning of the tour (or path) until the completing the service for that customer. Multiple LP with time windows (kLPTW) finds k tours or paths, each starting at the depot and visiting the nodes within their earliest and latest time (time windows) while minimizing total latency. If travel times between nodes do not depend on the traveler, it is named as homogeneous kLPTW, if travel times between nodes depend on the traveler, it is named as heterogeneous kLPTW. As far as we are aware, there is only one formulation for homogeneous and one formulation for heterogeneous case. In this paper, we proposed a new formulation for homogeneous and a new formulation for heterogeneous case with polynomial number of decision variables and constraints. Then, we solved benchmark instances with our formulations and existing formulations with different number of travelers. We compared the formulations in terms of CPU times and percentage deviation of linear programming relaxation values from the best values. We observed that, our formulations are superior than the existing formulations for all the problems for both kLPTW types with respect to each performance criteria.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Rotalama problemlerinin temelini Gezgin Satıcı Problemi (GSP) oluşturmaktadır. Gezgin satıcı probleminde ele alınan temel amaç firmanın maliyetini veya gezginin kat ettiği toplam mesafeyi (veya zamanı) en küçüklemeektir. Ancak günümüz şartlarında firmaların varlıklarını sürdürebilmeleri için müşteri memnuniyetini en yüksek seviyede tutmak, dolayısıyla müşterilerin ihtiyaçlarını en kısa sürede karşılayarak, gecikmelerin toplamını en küçükleme, maliyeti en küçükleme kadar önemli bir unsur haline gelmiştir. Gecikme, bir müşterinin talebinin karşılanıncaya kadar geçen süreyi ifade etmektedir. Bu sebeple, rotalama problemlerinde kullanılan amaç fonksiyonu yapısı değişerek, toplam maliyetin en küçüklemeinin yerini, müşteri taleplerinin en kısa sürede yerine getirilmesi odaklı yaklaşımlar almıştır. Bu değişim, kaynaklarda çoğu aynı anlamda olan, Gecikme Problemi (Latency Problem) [1], Gezgin Tamirci Problemi (Traveling Repairman Problem) [2], Dağıtıcı Problemi (Deliveryman Problem) [3] veya Kümülatif Gezgin Satıcı Problemi (Cumulative Traveling Salesman Problem) [4] olarak isimlendirilen problem türlerinin önem kazanmasında büyük rol oynamıştır. Bu makalede, gecikme, gezgin tamirci ve dağıtıcı problemleri için aynı anlamda olmak üzere Gecikme Problemi (GP) isimlendirmesi kullanılacaktır.

Gecikme Probleminde amaç, bir gezginin verilen bir düğümden (müşteriden) başlayarak, tüm düğümlere uğradıktan sonra başlangıç noktasında veya verilen bir düğümden sona eren, toplam gecikmeyi en küçükleme Hamilton turunu veya yolunu araştırmaktır. GP'nin kaynaklarda çevrimiçi [5], kar tabanlı [6], çok ekipli [7], kapasite kısıtlı [8] ve birim talepli [9] gibi farklı uzantılarının da ele alındığı görülmektedir. GP'nin gerçek hayat problemleri göz önüne alındığında en önemli uzantılarının başında çok ekipli GP (ÇGP) gelmektedir. ÇGP, her bir ekibin aynı depodan yola çıktığı, her düğümün yalnız bir ekip tarafından talebinin karşılandığı, müşterilerin toplam gecikmesini en küçükleme yapan, k adet turun veya yolun araştırıldığı bir problemdir [10]. GP'nin bir diğer geniş uygulama alanına sahip uzantısı ise her bir müşterinin ziyaret edileceği zaman diliminin alt ve üst sınırlarının olduğu zaman pencereli GP'dir (ZPGP) [2]. ZPGP veya uzantılarının, özellikle günümüzde önemi her geçen gün artan e-ticaret, sanal market, okul servislerinin öğrencileri toplama ve dağıtım rotaları, acil yardım lojistiği, ecza depolarından eczanelere ilaç dağıtımı, kargo dağıtımı, bozulabilir ürünlerin dağıtımı veya toplanması gibi birçok gerçek hayat uygulamaları bulunmaktadır [11]. Bu uygulamaların çoğunda, dağıtıcı veya ekip veya araç sayısı birden fazladır. ZPGP de dağıtıcı sayısı birden fazla olduğunda, problem çok ekipli veya gezginli zaman pencereli gecikme problemi (ZPÇGP) olarak isimlendirilir. ZPÇGP'de amaç, her bir ekibin aynı depodan yola çıktığı, her düğümün ziyaret edileceği zaman diliminin alt ve üst sınırlarının olduğu ve her bir müşterinin talebinin yalnız bir ekip tarafından karşılandığı, müşterilerin toplam

gecikmesini en küçük yapan, k adet turu veya yolu araştırmaktır. GP, üssel zamanlı karmaşıklık fonksiyonuna sahip olan algoritmaların bulunduğu NP-zor sınıfında yer alan bir problem türüdür [2]. Bu nedenle GP ve uzantıları için çözüm yöntemleri genellikle kesin çözüm veren yöntemler ya da sezgiseller üzerine yoğunlaşmıştır [12]. Kaynaklara bakıldığında, ÇGP için Jmal vd. [7] kuantum parçacık sürüsü algoritması, Martin ve Salavatipour [8] yaklaşım algoritması, Hmayer ve Ezzine [13] rassal aramaya dayalı kümeleme algoritması, Nucamendi-Guillen vd. [14] yinelemeli ağgözlü sezgisel algoritma, Muritiba vd. [15] yinelemeli yerel arama algoritması önermişlerdir. Kar tabanlı GP için Avcı ve Avcı [6] yinelemeli yerel arama ile ağgözlü rassal uyarlamalı arama algoritması, Avcı ve Avcı [16] uyarlanabilir büyük komşu arama algoritması ve Pei vd. [17] değişken komşu arama algoritması gibi çözüm yaklaşımları geliştirmişlerdir. ZPÇGP için Heilporn vd. [11] ekleme ve değiştirme yöntemine dayalı sezgisel algoritma, Ban ve Nguyen [18] ağgözlü rassal uyarlamalı arama algoritması ve değişken komşu arama algoritmasına dayalı yaklaşım ve Ban [19] rassal değişken komşu azalış ve yinelemeli yerel arama algoritmaları ile tabu arama algoritmasının hibrit kullanıldığı yaklaşımlar geliştirilmişlerdir. ZPÇGP için çözüm yöntemi olarak Liu vd. [20] dal fiyat algoritması, Liu ve Jiang [21] ise hibrit büyük komşu arama algoritması önermişlerdir. ZPÇGP de GP'nin bir uzantısı olduğu için NP-zor sınıfında yer almaktadır. Bundan dolayı ZPÇGP için matematiksel modelleme üzerine yapılan çalışmaların oldukça az olduğu görülmektedir. ZPÇGP için kaynaklarda matematiksel model içeren ilk çalışma, 2000 yılında Van Der Meer [22] tarafından doktora tezi olarak yapılmıştır. Bu çalışmada özdeş ekipler kullanılmış olduğundan kaynaklardaki ilk çalışmanın homojen ZPÇGP için yapıldığı söylenebilmektedir. Kaynaklardaki matematiksel model içeren diğer yayın ise 2013 yılında Bjelic vd. [23] tarafından yapılan çalışmadır. Yazarlar, çalışmada önerdikleri matematiksel modelde ekiplerin hızlarının farklı olmasından kaynaklanan heterojenlik durumunu ele almışlardır. Bu anlamda kaynaklardaki ikinci çalışmanın heterojen ZPÇGP için yapıldığı görülmektedir.

Son yıllarda kullanıcı odaklı matematiksel modellerin geliştirildiği, böylece küçük ve orta ölçekli problemlerin en iyi çözümlerinin kısa sürede doğrudan bulunabildiği görülmektedir [24, 25]. Bu gelişim, matematiksel modellerin gerçek hayatta yaygın olarak kullanılabilirliğini sağlamaktadır. Matematiksel modellerin geliştirilmiş olması ile hem özel durumlara cevap veren ek kısıtların modele kolay eklenebilmesi ve en iyi çözüm sonrası analizler yapma imkânının ortaya çıkması, hem de gerçek hayattaki çoğu problemin çözümlerinin paket programlarla doğrudan bulunabilmesi mümkün olmaktadır. ZPÇGP için az sayıda matematiksel modelin geliştirilmiş olmasının yanı sıra, modelleme konusunda yaşanan bu gelişmeler ve modellemenin sağladığı avantajlar, ZPÇGP için yeni matematiksel modeller geliştirme konusunda motivasyon kaynağı olmuştur.

Makalede, homojen ve heterojen ZPÇGP için yeni matematiksel modellerin geliştirilmesi hedeflenmiş ve bu amaçla polinom sayıda karar değişkenine ve kısıta sahip karma tamsayılı matematiksel modeller geliştirilmiştir. Homojen ve heterojen ZPÇGP için kaynaklarda var olan modeller ile bu çalışmada geliştirilen iki model 100 düğüme kadar olan kıyaslama problemleri kullanılarak karşılaştırmalı sayısal analize tabi tutulmuştur. CPU süreleri ve doğrusal programlama gevşetme (DPG) değerlerinin en iyi değerden oransal sapmaları yönüyle incelenen sonuçlarda, geliştirilen matematiksel modellerin her problemde var olan modellere göre oldukça üstün olduğu görülmüştür.

İkinci bölümde ZPÇGP probleminin tanımlanması yapılarak, kaynaklarda var olan modellere değinilmiştir. Üçüncü bölümde homojen ZPÇGP için geliştirilen yeni matematiksel model ve dördüncü bölümde heterojen ZPÇGP için geliştirilen yeni matematiksel model ayrıntılı olarak tanıtılmıştır. Beşinci bölümde var olan modeller ile yeni geliştirilen modeller için karşılaştırmalı sayısal analizler yapılmış ve sonuçlar tabloalanmıştır. Sonuç ve yapılacak çalışmalara ise son bölüm olan altıncı bölümde değinilmiştir.

2. PROBLEMİN TANIMLANMASI VE VAR OLAN MATEMATİKSEL MODELLER (PROBLEM DESCRIPTION AND EXISTING FORMULATIONS)

$G = (V, A)$ yönlü veya yönsüz bir serim olup, $\{0\}$ başlangıç düğümünü (depo) göstermek üzere;

- $V : \{1, \dots, n\}$ müşteriler kümesini,
- $A : \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ ayrıtlar kümesini,
- $a_i : i$. müşterinin hizmet almasının en erken zamanını (zaman penceresinin alt sınırı),
- $b_i : i$. müşterinin hizmet almasının en geç zamanını (zaman penceresinin üst sınırı),
- k : hizmet verecek ekip (araç, kişi, tamirci vb.) sayısını ifade etmektedir.

ZPÇGP problemi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

- Her düğüm (müşteri) yalnız bir kez ziyaret edilmelidir.
- Her ekip depo düğümünden yola çıkmalı ve depo düğümünde (bazı özel durumlarda herhangi bir düğümde) seyahatini tamamlamalıdır.
- Her müşteri belirlenmiş olan zaman penceresi aralığında ziyaret edilmeli, ekip zaman penceresinin alt sınırından önce düğüme ulaşırsa beklemelidir.
- Amaç toplam gecikmeyi en küçük yapacak ekip sayısı kadar (k tane) turu (özel durumlarda yolu) bulmaktır.

ZPÇGP için kaynaklarda matematiksel model içeren ilk yayın, 2000 yılında Van Der Meer [22] tarafından doktora tezi olarak yapılmıştır. Bu çalışmada özdeş ekipler kullanılmış olup zaman diliminin yalnızca alt sınırı ele alınmış, zaman penceresi ifadesi “hizmete başlama anı belirlenmiş” anlamında kullanılmıştır. Van Der Meer’in bu çalışması, kaynaklarda yer alan ilk homojen ZPÇGP modeli

olup, bu makale homojen durum için var olan ilk formülasyon olarak ele alınmıştır. Ortak gösterimler ve parametrelere ek olarak, kullanılan yeni tanımlamalar ve matematiksel model aşağıda verilmiştir.

- $K : \{1, \dots, k\}$ ekipler kümesi,
- $n+1$: bitiş düğümü (yapay depo),
- $N : \{0, \dots, n+1\}$,
- $c_{ij} : i$. düğümden j . düğüme geçiş süresi
- M : yeterince büyük pozitif bir sayı olarak ele alınmıştır.

Modelin karar değişkenleri şöyle tanımlanmıştır;

- s_i : i . düğümün servis zamanı
- s_0^k : k ekibinin depodan çıkış zamanı
- s_{n+1}^k : k ekibinin depoya dönüş zamanı
- $x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{eğer } k \text{ ekibi } i. \text{ düğümden } j. \text{ düğüme geçmiş ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$

Model ise şu şekildedir;

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ij}^k = 1 \quad i \in V \quad i \neq j \quad (1)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij}^k - \sum_{j \in N} x_{ji}^k = 0 \quad i \in V \quad \forall k \in K \quad i \neq j \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0j}^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{in+1}^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$s_i - s_j + Mx_{ij}^k \leq M - c_{ij} \quad i, j \in V \quad \forall k \in K \quad i \neq j \quad (5)$$

$$s_0^k - s_j + Mx_{0j}^k \leq M - c_{0j} \quad j \in V \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$s_i - s_{n+1}^k + Mx_{in+1}^k \leq M - c_{in+1} \quad i \in V \quad \forall k \in K \quad (7)$$

$$s_i \geq a_i \quad i \in V \quad (8)$$

$$s_i \leq b_i \quad i \in V \quad (9)$$

$$s_0^k = 0 \quad \forall k \in K \quad (10)$$

$$s_{n+1}^k \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (11)$$

$$\sum_{j \in N} x_{n+1j}^k = 0 \quad \forall k \in K \quad (12)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0}^k = 0 \quad \forall k \in K \quad (13)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad i, j \in N \quad i \neq j \quad \forall k \in K \quad (14)$$

kısıtları altında

$$Enk \sum_{i \in V} s_i \quad (15)$$

(Eş. 1) numaralı kısıt her düğümün bir ekip tarafından bir defa ziyaret edilmesini sağlamaktadır. (Eş. 2) numaralı kısıt bir düğüme bir ekip tarafından giriş varsa çıkışında olmasını sağlar. (Eş. 3) numaralı kısıt ekiplerin depodan çıkışını, (Eş.

4) numaralı kısıt ise ekiplerin $n+1$. düğüm olan yapay depoya dönüşünü sağlamaktadır. Ancak, amaç fonksiyonunda $n+1$. düğüme geçiş süresi dahil edilmemektedir. (Eş. 5, Eş. 6, Eş. 7) numaralı kısıtlar alt tur engelleme kısıtlarıdır. (Eş. 8, Eş. 9, Eş. 10, Eş. 11) numaralı kısıtlar zaman penceresi ile ilgili kısıtlardır. Modelin orijinalinde zaman penceresinin üst sınırı ele alınmamakla birlikte, bu çalışmada zaman penceresinin alt ve üst sınırları dikkate alındığı için modelin var olan kısıtlarına (Eş. 9) numaralı kısıt eklenti yapılmıştır. (Eş. 12, Eş. 13) numaralı kısıtlar akış korunum kısıtlarıdır. (Eş. 15) numaralı amaç fonksiyonu ise toplam gecikmeyi hesaplamaktadır. Van der Meer modeli, $kn^2+2kn+3n+6k$ sayıda kısıta ve $kn^2+4kn+k$ sayıda 0-1 karar değişkenine sahiptir.

Kaynaklardaki matematiksel model içeren diğer yayın ise 2013 yılında Bjelic vd. [23] tarafından yapılan çalışmadır. Burada ele alınan matematiksel modelin Van der Meer [22] tarafından 2000 yılında yapılan ve yukarıda verilen model ile karar değişkenleri, parametreler, amaç fonksiyonu ve kısıtlar açısından büyük oranda aynı olduğu belirlenmiştir. Gözlemlenen tek fark, homojen ekipler yerine heterojen ekiplerin kullanılmasına bağlı olarak, müşteriler arası seyahat sürelerinin ekibe bağlı olmasıdır. Bjelic vd. [23]'nin çalışmaları, kaynaklarda yer alan ZPÇGP için matematiksel modelleme geliştirilen ikinci yayın olup, heterojen durum hali için ilk çalışmadır. Yazarlar, önerilen model ile yalnızca 13 düğümlü bir problem için örnek çözüm yapmış, düğüm sayısının arttığı problemler için sezgisel algoritma önerilmişlerdir. Bjelic vd. [23] tarafından önerilen model, bu makalede, heterojen durum için var olan formülasyon olarak ele alınmış, modelin Van der Meer [22] modeline benzerliği nedeniyle bu modele makalede yer verilmemiştir.

3. HOMOJEN ZPÇGP İÇİN GELİŞTİRİLEN MATEMATİKSEL MODEL (A NEW FORMULATION FOR HOMOGENEOUS KLPTW)

Homojen ZPÇGP için önerilen matematiksel model, 2013 yılında Kara vd. [26] tarafından zaman pencereli GSP için geliştirilen model temel alınarak oluşturulmuştur. Bu model düğüm tabanlı bir yapıya sahiptir. Problem tanımında verilen ortak gösterim ve parametrelere ek olarak;

- c_{ij} : i . düğümden j . düğüme geçiş süresini ifade etmektedir.

Modelin karar değişkenleri şöyle tanımlanmıştır;

- t_i : i . düğüme varış zamanı
- s_i : i . düğümün servis zamanı
- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i. \text{ düğümden } j. \text{ düğüme geçiş varsa} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$

Homojen ZPÇGP için önerilen yeni model aşağıda verilmiştir:

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (16)$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} = k \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i0} = k \quad (19)$$

$$s_i \geq a_i \quad i = 1, \dots, n \quad (20)$$

$$s_i \leq b_i \quad i = 1, \dots, n \quad (21)$$

$$t_i - c_{0i}x_{0i} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (22)$$

$$t_i + (b_i - c_{0i})x_{0i} \leq b_i \quad i = 1, \dots, n \quad (23)$$

$$s_i \geq t_i \quad i = 1, \dots, n \quad (24)$$

$$s_i - t_j + (b_i - c_{0j} + c_{ij})x_{ij} \leq b_i - c_{0j} \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad (25)$$

$$t_j - s_i + (b_j - a_i - c_{ij})x_{ij} \leq b_j - a_i \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad (26)$$

$$s_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (27)$$

$$t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (28)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i, j = 0, \dots, n \quad i \neq j \quad (29)$$

kısıtları altında

$$Enk \sum_{i=1}^n s_i \quad (30)$$

(Eş. 16, Eş. 17) numaralı kısıtlar atama kısıtları olup, her düğümün bir defa ve yalnız bir ekip tarafından ziyaretini garanti ederler. (Eş. 18) numaralı kısıt depodan k adet ekibin çıkışını ve (Eş. 19) numaralı kısıt ise depoya k adet ekibin dönüşünü sağlamaktadır. (Eş. 20, Eş. 21) numaralı kısıtlar her düğümün zaman penceresi aralığında ziyaret edilmesini sağlar. (Eş. 22, Eş. 23) numaralı kısıtlar ilk düğüme varış zamanı ve depodan ilk düğüme geçiş süresi ile ilgili kısıtlardır. Bu kısıtların geçerli olduğunun ispatı Önerme 1'de gösterilmiştir. (Eş. 24) numaralı kısıt s_i ve t_i karar değişkenleri arasındaki ilişkiyi sağlar. (Eş. 25, Eş. 26) numaralı kısıtlar alt tur engelleme kısıtlarıdır. Bu kısıtların ZPÇGP için geçerli olduğunun kanıtı ise Önerme 2'de verilmiştir. Modelin (Eş. 30) numaralı amaç fonksiyonu toplam gecikmeyi en küçüklemek olarak yazılmıştır. Homojen ZPÇGP için önerilen matematiksel model, $2n^2+5n+2$ sayıda kısıta ve n^2+n sayıda 0-1 karar değişkenine sahiptir. Polinom sayıda kısıta ve polinom sayıda karar değişkenine sahip olması CPLEX vb. paket programlar ile doğrudan kullanılabilme avantajını beraberinde getirmektedir. Kaynaklarda var olan Van der Meer [22] modelinin kısıt sayısı ve karar değişkeni sayısı da polinom sayıda olmasına rağmen k değerine bağlı olduğundan dolayı, ekip sayısı arttıkça problemin kısıt ve karar değişkeni sayısı da artmaktadır.

Önerme 1: Aşağıdaki eşitsizlikler ZPÇGP için geçerli eşitsizliklerdir [26].

$$t_i - c_{0i}x_{0i} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (22)$$

$$t_i + (b_i - c_{0i})x_{0i} \leq b_i \quad i = 1, \dots, n \quad (23)$$

İspat: Eğer bir ekip depodan i . düğüme gelmişse $x_{0i} = 1$ olacaktır. Bu durumda, (Eş. 22) numaralı kısıt $t_i \geq c_{0i}$ haline dönüşecektir ve (Eş. 23) numaralı kısıt $t_i \leq c_{0i}$ olacaktır, buradan $t_i = c_{0i}$ eşitliği elde edilir ki i . düğümün ziyaret edilen ilk düğüm olması bu eşitliği doğrulamaktadır. Eğer i . düğüm ziyaret edilen ilk düğüm değilse $x_{0i} = 0$ olacaktır. Bu durumda, (Eş. 22) numaralı kısıt $t_i \geq 0$ haline dönüşecektir, (Eş. 23) numaralı kısıt ise $t_i \leq b_i$ olacaktır ve zaman penceresi gereği bu sonuç doğrudur.

Önerme 2: Aşağıdaki eşitsizlikler ZPÇGP için alt turları engelleyen geçerli eşitsizliklerdir [26].

$$s_i - t_j + (b_i - c_{0j} + c_{ij})x_{ij} \leq b_i - c_{0j} \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad (25)$$

$$t_j - s_i + (b_j - a_i - c_{ij})x_{ij} \leq b_j - a_i \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad (26)$$

İspat: İlk olarak $x_{ij} = 1$ ve $x_{ji} = 1$ durumlarının aynı anda gerçekleşmesi bir alt tur oluştuğunu göstermektedir. $x_{ij} = 1$ ve $x_{ji} = 1$ olduğunda (Eş. 25, Eş. 26) numaralı kısıtlardan $c_{ij} + c_{ji} + s_i + s_j = t_i + t_j$ elde edilir. $s_i \geq t_i$ ve $s_j \geq t_j$ olması gerektiğinden bu eşitlik mümkün değildir dolayısıyla $x_{ij} = 1$ ve $x_{ji} = 1$ aynı anda gerçekleşmez. Bunun yanı sıra i ve j düğümleriyle ilgili aşağıdaki üç durum söz konusu olabilir:

- $x_{ij} = 1, x_{ji} = 0$
- $x_{ij} = 0, x_{ji} = 1$
- $x_{ij} = 0, x_{ji} = 0$

İlk durum $x_{ij} = 1$ ve $x_{ji} = 0$ olduğu durumdur. $x_{ij} = 1$ için (Eş. 25) numaralı kısıt $t_j \geq s_i + c_{ij}$ olacaktır ve (Eş. 26) numaralı kısıt $t_j \leq s_i + c_{ij}$ olacaktır. Bu durumda $t_j = s_i + c_{ij}$ elde edilir. $s_i \geq t_i$ olduğundan ve (Eş. 25, Eş. 26) numaralı kısıtlar t_i 'lerin sürekli artan değerler almasını sağlayacağı için ara düğümlerde de alt turların oluşması engellenecektir. İkinci durum için de aynı çıkarım geçerlidir. Son durum için $x_{ij} = x_{ji} = 0$ olduğunda, (Eş. 25, Eş. 26) numaralı kısıtlardan $c_{0j} + a_i \leq b_i + b_j$ ve $c_{0i} + a_j \leq b_i + b_j$ elde edilir. $a_i \leq b_i, c_{0j} \leq b_j, a_j \leq b_j$ ve $c_{0i} \leq b_i$ her zaman sağlanacağından dolayı $x_{ij} = x_{ji} = 0$ olduğunda da bu kısıtlar geçerlidir.

4. HETEROJEN ZPÇGP İÇİN GELİŞTİRİLEN MATEMATİKSEL MODEL (A NEW FORMULATION FOR HETEROGENEOUS KLPTW)

Heterojen ZPÇGP önerilen matematiksel model, homojen ZPÇGP için geliştirilen modelin heterojene dönüştürülmesi ile elde edilmiştir. Problem tanımında verilen ortak gösterim ve parametrelere ek olarak;

- $K : \{1, \dots, k\}$ ekipler kümesini,
- $n+1$: bitiş düğümünü (yapay depo),
- c_{ij}^k : k ekibinin i . düğümden j . düğüme geçiş süresini ifade etmektedir.

Modelin karar değişkenleri şöyle tanımlanmıştır;

- t_i^k : k ekibinin i . düğüme varış zamanı
- s_i : i . düğümün servis zamanı
- $x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{eğer } k \text{ ekibi } i. \text{ düğümden } j. \text{ düğüme geçmiş ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$

Bu gösterimlerle, heterojen ZPÇGP için önerilen model şöyledir:

$$\sum_j x_{0j}^k = 1, \quad k \in K \quad (31)$$

$$\sum_i x_{in+1}^k = 1, \quad k \in K \quad (32)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i=0}^n x_{ij}^k = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad (33)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}^k = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad (34)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_j x_{ij}^k - \sum_{k \in K} \sum_l x_{li}^k = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (35)$$

$$s_i \geq a_i \quad i = 1, \dots, n \quad (36)$$

$$s_i \leq b_i \quad i = 1, \dots, n \quad (37)$$

$$t_i^k - c_{0i}^k x_{0i}^k \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad k \in K \quad (38)$$

$$t_i^k + (b_i - c_{0i}^k) x_{0i}^k \leq b_i \quad i = 1, \dots, n \quad k \in K \quad (39)$$

$$s_i \geq \sum_k t_i^k \quad i = 1, \dots, n \quad (40)$$

$$s_i - \sum_k t_j^k + \sum_k (b_i + c_{ij}^k) x_{ij}^k \leq b_i \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad k \in K \quad (41)$$

$$\sum_k t_j^k - s_i + \sum_k (b_j - a_i - c_{ij}^k) x_{ij}^k \leq b_j - a_i \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad k \in K \quad (42)$$

$$s_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (43)$$

$$t_i^k \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad k \in K \quad (44)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n+1 \quad i \neq j \quad k \in K \quad (45)$$

kısıtları altında

$$Enk \sum_{i=1}^n s_i \quad (46)$$

(Eş. 31, Eş. 32) numaralı kısıtlar depodan k adet ekibin çıkmasını ve depoya k adet ekibin dönmesini sağlamaktadır. (Eş. 33, Eş. 34) numaralı kısıtlar atama kısıtlarıdır. (Eş. 35)

numaralı kısıt akış korunum kısıtı olup her düğüme giren ekiple çıkan ekibin aynı olmasını garanti etmektedir. (Eş. 36, Eş. 37) numaralı kısıtlar zaman penceresini sağlayan kısıtlardır. (Eş. 38, Eş. 39) numaralı kısıtlar k ekibinin ilk düğüme varış zamanı ve depodan ilk düğüme geçiş süresi ile ilgili kısıtlardır. (Eş. 40) numaralı kısıt s_i ve t_i^k karar değişkenleri arasındaki ilişkiyi sağlamaktadır. (Eş. 41, Eş. 42) numaralı kısıtlar alt tur engelleme kısıtlarıdır. (Eş. 46) numaralı amaç fonksiyonunda ise toplam gecikme en küçüklenmektedir. Heterojen ZPÇGP için önerilen matematiksel model, $2kn^2+2k+6n$ sayıda kısıta ve kn^2 sayıda 0-1 karar değişkenine sahiptir. Polinom sayıda kısıta ve polinom sayıda karar değişkenine sahip olduğu için CPLEX vb. paket programlar ile doğrudan kullanılabilme avantajına sahiptir.

5. SAYISAL ANALİZLER (COMPUTATIONAL ANALYSIS)

Homojen ve heterojen ZPÇGP için kaynaklarda var olan iki matematiksel modelin ve yeni geliştirilen matematiksel modellerin performanslarını karşılaştırmak için sayısal analizler yapılmıştır. Yapılan analizlerde $k=2$, $k=3$, $k=4$ ve $k=5$ olmak üzere dört farklı ekip sayısı ele alınmıştır ve sonuçlar hem CPU süreleri hem de DPG değerlerinin en iyi değerden oransal sapmaları yönüyle incelenmiştir. Bu analizler için kaynaklarda Dumas vd. [27] tarafından hazırlanan simetrik yapıdaki kıyaslama problemleri ele alınmıştır. Kullanılan problem gruplarının her biri 20, 40, 60, 80 ve 100 düğümlüdür ve zaman penceresi genişliği 20, 40,

60, 80 ve 100 olan verileri içermektedir. Bu verilerde farklı zaman penceresi genişlikleri için 5 farklı problem bulunmaktadır ve toplamda 125 adet kıyaslama problemi elde edilmiştir. Problemler her bir düğüm için koordinat değerlerini içermektedir ve düğümler arası geçiş süreleri matrisi Öklid uzaklığına göre hazırlanarak kullanılmıştır. Tüm problemler için CPLEX 12.5.0.1 paket programı ve Intel Core i7-3630QM CPU 2.40 GHz ve 16 GB RAM özelliklerinde bilgisayar kullanılarak en iyi çözümler araştırılmıştır. Tüm çözümler için üst süre sınırı 3600 saniye olarak alınmıştır. Yapılan analizler sonucunda 5 adet problemi içeren gruplarda süre sınırı içerisinde en az bir problem için en iyi çözüme ulaşılmadı ise ortalama CPU süresi ve ortalama sapma oranları hesaplanmamıştır. Ortalama CPU süreleri ve ortalama sapma oranları süre sınırı içinde elde edilen en iyi değerler için hesaplanmıştır. Sapma oranları hesaplanırken (En iyi değer - DPG) / (En iyi değer) formülasyonu kullanılmıştır. Heterojen ZPÇGP için yapılan sayısal analizlerde $c_{ij}^k = (c_{ij}/v_k)$ formülü ile hesaplanmaktadır. Formülde v_k , k ekibinin hızını göstermekte ve $v_k = 1 + 0,1(k - 1)$ olduğu kabul edilmektedir. Sayısal analizlerde, homojen ZPÇGP için kaynaklarda yer alan Van der Meer [22] modeli M1 kodlaması ile, homojen ZPÇGP için önerilen model ise M2 kodlaması ile gösterilmiştir. Heterojen ZPÇGP için kaynaklarda yer alan Bjelic vd. [23] modeli için M3 kodlaması, heterojen ZPÇGP için önerilen model içinse M4 kodlaması kullanılmıştır. Tablo 1’de homojen ZPÇGP için M1 ve M2 modelleri ile farklı düğüm sayıları ve farklı ekip

Tablo 1. Homojen ZPÇGP’nin farklı düğüm sayıları ve farklı ekip sayıları için ortalama CPU süreleri (s)
(Average CPU times for different node numbers and different traveler values for homogeneous kLPTW)

Düğüm Sayısı	Zaman Penceresi Genişliği	k=2		k=3		k=4		k=5	
		Ortalama CPU M1	Ortalama CPU M2	Ortalama CPU M1	Ortalama CPU M2	Ortalama CPU M1	Ortalama CPU M2	Ortalama CPU M1	Ortalama CPU M2
20	20	0,192	0,114	0,34	0,15	0,798	0,084	1,566	0,08
20	40	0,474	0,188	0,606	0,176	1,498	0,138	2,936	0,128
20	60	3,882	0,56	3,878	0,306	12,016	0,27	24,998	0,284
20	80	8,062	1,25	4,306	0,366	5,94	0,338	8,118	0,308
20	100	507,22	3,964	131,234	1,328	321,86	1,232	-	1,006
40	20	2,328	0,932	3,188	0,482	2,852	0,362	4,248	0,312
40	40	55,41	5,92	21,272	1,086	51,702	0,772	137,41	0,58
40	60	-	55,64	-	7,578	-	5,44	-	4,014
40	80	-	-	-	13,126	-	6,314	-	4,632
40	100	-	-	-	37,31	-	12,486	-	7,766
60	20	56,906	7,01	16,124	2,516	32,242	1,456	52,532	1,27
60	40	-	-	-	10,564	-	8,334	-	7,444
60	60	-	-	-	218,01	-	21,228	-	11,644
60	80	-	-	-	65,918	-	17,042	-	11,886
60	100	-	-	-	221,06	-	225,98	-	125,47
80	20	-	40,592	49,282	8,35	90,36	7,276	102,89	4,416
80	40	-	-	-	30,118	-	20,9	-	27,848
80	60	-	-	-	-	-	76,074	-	53,534
80	80	-	-	-	-	-	164,35	-	135,14
80	100	-	-	-	-	-	746,21	-	459,66
100	20	-	300,73	843,774	23,49	-	23,192	-	19,156
100	40	-	-	-	338,19	-	-	-	27,154
100	60	-	-	-	-	-	-	-	66,256
100	80	-	-	-	-	-	-	-	652,36

M1: Van der Meer [22] modeli / M2: Homojen ZPÇGP için önerilen model

sayıları için elde edilen ortalama CPU süreleri saniye cinsinden verilmiştir. Tablo 1’de önerilen modelin (M2) sonuçlarını içeren sütun italik olarak verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde k=2 için var olan modelin (M1) 20 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaştığı, 40 düğümlü problemlerin zaman penceresi 40 genişliğine kadar ve 60 düğümlü problemlerin zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümlere ulaştığı görülmektedir. M2 modeli ise 20 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözümlere ulaşmış, 40 düğümlü problemlerin zaman penceresi 60 genişliğine kadar ve 60, 80 ve 100 düğümlü problemlerin zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri elde etmiştir. k=3 için bakıldığında, M1 modelinin 20 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaştığı, 40 düğümlü problemlerin zaman penceresi 40 genişliğine kadar ve 60, 80 ve 100 düğümlü problemlerin zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri elde ettiği görülmektedir. M2 modeli ise 20, 40 ve 60 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaşmış, 80 ve 100 düğümlü problemlerin zaman penceresi 40 genişliğine kadar en iyi çözümlerini elde etmiştir. k=4 için, M1 modelinin 20 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaştığı, 40 düğümlü problemlerin zaman penceresi 40 genişliğine kadar, 60 ve 80 düğümlü problemlerin zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri elde ettiği görülmektedir. M2 modeli 20, 40, 60 ve 80 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaşmış, 100 düğümlü problemlerde zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri bulmuştur. k=5 için bakıldığında, M1 modelinin

20 düğümlü problemlerin zaman penceresi 80 genişliğine kadar en iyi çözümlere ulaştığı, 40 düğümlü problemlerin zaman penceresi 40 genişliğine kadar, 60 ve 80 düğümlü problemlerde zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri elde ettiği görülmektedir. M2 modeli ise 20, 40, 60 ve 80 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözümleri elde etmiş, 100 düğümlü problemlerde zaman penceresi 80 genişliğine kadar en iyi çözümlere ulaşmıştır.

Tablo 1’deki CPU değerlerine bakıldığında, M2’nin tüm k değerleri için M1’e göre en iyi çözüme çok daha kısa sürede eriştiği görülmektedir. Bu durum çözülen tüm problem boyutları için geçerlidir. 20 müşteri problemlerde, her k değeri için zaman penceresi genişledikçe var olan modelin işlem süresinde çok hızlı bir artış olurken, önerilen modelde çok daha düşük bir oranda artmaktadır. M1 için bir problem seti haricinde, her iki modelinde en iyi çözüme eriştiği 20 müşteri problemlerde ortalama CPU süreleri k=2 alındığında M1 için 103,96 ve M2 için 1,21, k=3 alındığında M1 için 28,07 ve M2 için 0,25, k=4 alındığında M1 için 68,42 ve M2 için 0,41 ve k=5 alındığında M1 için 9,40 ve M2 için 0,36 olmakta, var olan model 20 müşteri problemlerde ortalama 56,28 saniyede en iyi çözümlere ulaşırken, önerilen model 0,57 saniyede erişmektedir. Yukarıdaki analizlerde homojen ZPÇGP için önerilen model var olan modele göre çok daha büyük boyutlu problemlerin en iyi çözümünü bulabilmiş, her ikisinin de en iyi çözüme erişebildiği problemlerde ise, var olan modele göre 33 misli

Tablo 2. Homojen ZPÇGP’nin farklı düğüm sayıları ve farklı ekip sayıları için ortalama sapma oranları
(Average percentage deviations for different node numbers and different traveler values for homogeneous kLPTW)

Düğüm Sayısı	Zaman Penceresi Genişliği	k=2		k=3		k=4		k=5	
		Ortalama CPU M1	Ortalama CPU M2	Ortalama CPU M1	Ortalama CPU M2	Ortalama CPU M1	Ortalama CPU M2	Ortalama CPU M1	Ortalama CPU M2
20	20	0,009	0,003	0,006	0,001	0,006	0	0,006	0
20	40	0,022	0,007	0,017	0,002	0,017	0,002	0,017	0,002
20	60	0,043	0,016	0,033	0,007	0,032	0,006	0,032	0,005
20	80	0,058	0,036	0,035	0,014	0,031	0,007	0,03	0,008
20	100	0,081	0,063	0,064	0,041	0,058	0,038	-	0,037
40	20	0,004	0,002	0,003	0	0,002	0	0,002	0
40	40	0,012	0,007	0,006	0,001	0,006	0,001	0,006	0,001
40	60	-	0,016	-	0,007	-	0,005	-	0,004
40	80	-	-	-	0,009	-	0,011	-	0,011
40	100	-	-	-	0,015	-	0,012	-	0,01
60	20	0,005	0,002	0,009	0	0,002	0	0,002	0
60	40	-	-	-	0,006	-	0,001	-	0,002
60	60	-	-	-	0,008	-	0,002	-	0,005
60	80	-	-	-	0,012	-	0,004	-	0,007
60	100	-	-	-	0,016	-	0,011	-	0,011
80	20	-	0,012	0,009	0,006	0	0	0	0
80	40	-	-	-	0,011	-	0,002	-	0,002
80	60	-	-	-	-	-	0,002	-	0,002
80	80	-	-	-	-	-	0,005	-	0,006
80	100	-	-	-	-	-	0,01	-	0,012
100	20	-	0,009	0,008	0,004	-	0	-	0
100	40	-	-	-	0,009	-	-	-	0
100	60	-	-	-	-	-	-	-	0,008
100	80	-	-	-	-	-	-	-	0,015

M1: Van der Meer [22] modeli / M2: Homojen ZPÇGP için önerilen model

daha kısa sürede çözüm vermiştir. Tablo 2’de M1 ve M2 modelleri ile farklı düğüm ve ekip sayıları için ortalama sapma oranları verilmiştir.

Tablo 2’de önerilen modelin (M2) sonuçlarını içeren sütun italik olarak verilmiştir. Değerler incelendiğinde, ortalama sapma oranları için de benzer sonuçların elde edildiği, M2’nin tüm k değerleri için var olan modele (M1) göre ortalama sapma oranları açısından çok daha küçük değerlere sahip olduğu görülmektedir. Bu durum çözülen tüm problem boyutları için geçerlidir. M1 için bir problem seti haricinde, her iki modelinde en iyi çözüme eriştiği 20 müşterili problemlerde ortalama sapma oranları k=2 alındığında M1 için 0,043 ve M2 için 0,025, k=3 alındığında M1 için 0,031 ve M2 için 0,013, k=4 alındığında M1 için 0,029 ve M2 için 0,011 ve k=5 alındığında M1 için 0,021 ve M2 için 0,01 olmakta, M1 için 20 müşterili problemlerde ortalama sapma oranı 0,032 iken, M2 için 0,015 olmaktadır.

Bu değerlere göre M2 modelinin M1 modeline göre oldukça üstün olduğu gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, homojen ZPÇGP için yapılan sayısal analizler sonucunda ortalama CPU süreleri ve ortalama sapma oranlarına bakıldığında, tüm ekip sayıları için M2 modelinin M1 modeline göre her problemde çok daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Tablo 3’te heterojen ZPÇGP için M3 ve M4 modelleri ile farklı düğüm sayıları ve farklı ekip sayıları için elde edilen ortalama CPU süreleri saniye cinsinden verilmiştir.

Tablo 3’te önerilen modelin (M4) sonuçlarını içeren sütun italik olarak verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde k=2 için var olan modelin (M3) 20 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaştığı, 40 düğümlü problemlerin zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri elde ettiği görülmektedir. M4 modeli 20 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaşmış, 40 düğümlü problemlerde zaman penceresi 40 genişliğine kadar, 60 ve 80 düğümlü problemlerde zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümlere ulaşmıştır. k=3, k=4 ve k=5 için bakıldığında, M3 modeli süre sınırı içerisinde hiçbir problem grubunun tamamında en iyi

çözüme ulaşamamıştır. k=3 için M4 modelinin 20 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaştığı, 40 ve 60 düğümlü problemlerin zaman penceresi 40 genişliğine kadar ve 80 düğümlü problemlerde zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri elde ettiği görülmektedir. k=4 ve k=5 için M4 modeli 20 düğümlü problemlerin hepsinde en iyi çözüme ulaşmış, 40 düğümlü problemlerde zaman penceresi 40 genişliğine kadar ve 60 düğümlü problemlerde zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri elde etmiştir.

Tablo 3’teki CPU değerlerine bakıldığında, M4’ün, yalnızca k=2 için bazı problem setlerinde en iyi çözüme ulaşabilen M3’e göre, çok daha kısa sürede en iyi çözümlere eriştiği görülmektedir. k=2 olarak alındığında her iki modelinde en iyi çözüme eriştiği 20 müşterili problemlerde ortalama CPU süreleri için M3 modeli 99,33 saniyede en iyi çözümlere ulaşırken, M4 modeli 25,26 saniyede en iyi çözümlere erişmektedir.

Yukarıdaki analizler heterojen ZPÇGP için önerilen modelin var olan modele göre çok daha büyük boyutlu problemlerin en iyi çözümünü bulabildiği, her ikisinin de en iyi çözüme erişebildiği problemlerde ise, var olan modele göre 4 misli daha kısa sürede çözüm verdiği görülmektedir.

Tablo 4’te heterojen ZPÇGP için M3 ve M4 modelleri ile farklı düğüm sayıları ve farklı ekip sayıları için elde edilen ortalama sapma oranları verilmiştir. Sapma oranları Tablo 2’deki gibi hesaplanmıştır.

Tablo 4’te önerilen modelin (M4) sonuçlarını içeren sütun italik olarak verilmiştir. Değerler incelendiğinde, ortalama sapma oranları için de benzer sonuçların elde edildiği, M4’ün var olan modele (M3) göre ortalama sapma oranları açısından çok daha küçük değerlere sahip olduğu görülmektedir. k=2 alındığında her iki modelinde en iyi çözüme eriştiği 20 müşterili problemlerde ortalama sapma oranları M3 için 0,066 iken, M2 için 0,019 olmaktadır.

Bu değerlere göre M4 modelinin M3 modeline göre oldukça üstün olduğu gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, heterojen ZPÇGP için yapılan sayısal analizler sonucunda ortalama

Tablo 3. Heterojen ZPÇGP’nin farklı düğüm sayıları ve farklı ekip sayıları için ortalama CPU süreleri (s)
(Average CPU times for different node numbers and different traveler values for heterogeneous kLPTW)

Düğüm Sayısı	Zaman Penceresi Genişliği	k=2		k=3		k=4		k=5	
		Ortalama CPU		Ortalama CPU		Ortalama CPU		Ortalama CPU	
		M3	M4	M3	M4	M3	M4	M3	M4
20	20	3,742	1,446	-	1,496	-	2,362	-	3,558
20	40	3,608	2,26	-	3,996	-	7,096	-	8,504
20	60	6,504	5,3	-	9,744	-	17,046	-	14,048
20	80	23,36	12,168	-	10,752	-	15,502	-	17,212
20	100	459,43	105,13	-	111,76	-	216,21	-	304,19
40	20	70,254	15,814	-	61,25	-	104,3	-	202,19
40	40	-	110,65	-	154,79	-	382,61	-	668,92
60	20	-	104,11	-	400,36	-	962,92	-	1098,4
60	40	-	-	-	1374,5	-	-	-	-
80	20	-	419,80	-	881,84	-	-	-	-

M3: Bjelic vd. [23] modeli / M4: Heterojen ZPÇGP için önerilen model

Tablo 4. Heterojen ZPÇGP'nin farklı düğüm sayıları ve farklı ekip sayıları için ortalama sapma oranları
(Average percentage deviations for different node numbers and different traveler values for heterogeneous kLPTW)

Düğüm Sayısı	Zaman Penceresi Genişliği	k=2		k=3		k=4		k=5	
		Ortalama CPU		Ortalama CPU		Ortalama CPU		Ortalama CPU	
		M3	M4	M3	M4	M3	M4	M3	M4
20	20	0,065	0,004	-	0,003	-	0,003	-	0,003
20	40	0,039	0,015	-	0,007	-	0,011	-	0,010
20	60	0,052	0,021	-	0,014	-	0,024	-	0,015
20	80	0,083	0,023	-	0,045	-	0,023	-	0,021
20	100	0,09	0,035	-	0,048	-	0,049	-	0,045
40	20	0,012	0,003	-	0,006	-	0,001	-	0,001
40	40	-	0,008	-	0,009	-	0,005	-	0,005
60	20	-	0,002	-	0,008	-	0,001	-	0,001
60	40	-	-	-	0,032	-	-	-	-
80	20	-	0,07	-	0,012	-	-	-	-

M3: Bjelic vd. [23] modeli / M4: Heterojen ZPÇGP için önerilen model

CPU süreleri ve ortalama sapma oranlarına bakıldığında, tüm ekip sayıları için M4 modelinin M3 modeline göre her problemde çok daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

6. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu makalede, $O(n^2)$ büyüklüğünde 0-1 karar değişkenine ve $O(n^2)$ büyüklüğünde kısıta sahip, homojen ve heterojen ZPÇGP için yeni karma tamsayı karar modelleri sunulmuştur. Homojen ve heterojen ZPÇGP için geliştirilen modellerin kaynaklarda var olan modeller ile farklı düğüm sayılarına sahip kıyaslama problemleri kullanılarak ve farklı ekip sayıları ele alınarak karşılaştırmalı sayısal analizleri yapılmıştır. Modellerin performansları CPU süreleri ve DPG değerlerinin en iyi değerden oransal sapmaları yönüyle incelenmiştir.

Homojen ZPÇGP için ekip sayıları 2, 3, 4 ve 5 alınarak yapılan sayısal analizler sonucunda, ortalama CPU süreleri için, ekip sayısı 2 iken M1 modeli en fazla 60 düğümlü problemlerde en iyi çözümlere ulaşabilirken, M2 modelinin 100 düğümlü problemlerde en iyi çözümleri elde edebildiği görülmüştür. Ekip sayısı 3 olduğunda, M1 ve M2 modelleri 100 düğümlü problemlerde en iyi çözümlere ulaşabilmiş ancak M1 modeli 60, 80 ve 100 düğümlü problemlerde yalnızca zaman penceresi 20 genişliği için en iyi çözümleri bulabilmiştir. Ekip sayısı 4 için bakıldığında, M2 modelinin 100 düğümlülere kadar bütün problemlerde en iyi çözümleri yakalamış, M1 modeli ise 40, 60 ve 80 düğümlülere zaman penceresi genişliği küçük olanlar için en iyi çözümleri bulmuştur. Ekip sayısı 5 olduğunda ise, M2 modeli ele alınan bütün problemlerde en iyi çözümlere ulaşmış, M1 modeli için çözülebilen problem boyutu açısından ekip sayısı 4 olduğundaki durum ile benzer sonuçlar elde edilmiştir. Homojen ZPÇGP için tüm ekip sayıları baz alındığında M2 modeli, M1'e göre ortalama çözüm süresi açısından %88 daha iyi performans göstermiştir. Ortalama sapma oranları için bulunan değerler ise, ortalama CPU süreleri için elde edilen sonuçlarla paralellik gösterdiği görülmüştür.

Heterojen ZPÇGP için ekip sayıları 2, 3, 4 ve 5 alınarak yapılan sayısal analizler sonucunda, ortalama CPU süreleri için, M3 modeli yalnızca ekip sayısı 2 iken 40 düğümlü ve 20 zaman penceresi genişliğindeki problemler için en iyi çözümleri bulabilmiştir. Diğer ekip sayıları için ele alınan problem gruplarının hiçbirinde en iyi çözümlere ulaşamamıştır. M4 modeli ise, ekip sayısı 2 ve 3 iken 80 düğümlü problemlere kadar, ekip sayısı 4 ve 5 iken 60 düğümlü problemlere kadar en iyi çözümleri bulmuştur. Heterojen ZPÇGP için tüm ekip sayıları baz alındığında M4 modeli, M3'e göre ortalama çözüm süresi açısından %53 daha iyi performans göstermiştir. Ortalama sapma oranları için bulunan değerler ise, ortalama CPU süreleri için elde edilen sonuçlarla paralellik gösterdiği görülmüştür.

Ekip sayıları 2, 3, 4 ve 5 alınarak yapılan sayısal analizler sonucunda, homojen ve heterojen ZPÇGP için geliştirilen modeller verilen süre sınırı içerisinde daha fazla problem için en iyi çözüme ulaşabilmiştir. Ayrıca zaman penceresi genişliği arttıkça çözüm süreleri de artmaktadır. Bu makalede geliştirilen modellerin kaynaklarda var olan modellere göre hem CPU süreleri hem de DPG değerlerinin en iyi değerden oransal sapmaları yönüyle her problem için oldukça üstün olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, homojen ZPÇGP ve heterojen ZPÇGP için önerilen yeni modellerin küçük ve orta boyutlu problemlerde kullanılabilirliği anlaşılmıştır.

Son yıllarda çok ekipli gecikme (gezgin tamirci) problemi ile ilgili yeni karar modelleri önerilmiştir [28, 29, 15]. Gelecek çalışmalarda, bu yeni modellerin zaman pencereli duruma uyarlanarak bu makalede önerilen modellerle ayrıntılı bir sayısal analize tabi tutulması planlanmaktadır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Conway R., Maxwell W., Miller L., Theory of scheduling, Addison-Wesley, New York, A.B.D., 1967.
2. Tsitsiklis J.N., Special cases of traveling salesman and repairman problems with time windows, Networks, 22 (3), 263-282, 1992.

3. Fischetti M., Laporte G., Martello S., The deliveryman problem and cumulative matroids, *Oper. Res.*, 41 (6), 1055-1064, 1993.
4. Bianco L., Mingozzi A., Ricciardelli S., The traveling salesman problem with cumulative costs, *Networks*, 23 (2), 81-91, 1993.
5. Zhang H., Tong W., Lin G., Xu Y., Online minimum latency problem with edge uncertainty, *Eur. J. Oper. Res.*, 273 (2), 418-429, 2019.
6. Avcı M., Avcı M.G., A GRASP with iterated local search for the traveling repairman problem with profits, *Computers and Industrial Engineering*, 113 (C), 323-332, 2017.
7. Jmal S., Haddar B., Chabchoub H., Apply the quantum particle swarm optimization for the K-traveling repairman problem, *Soft Computing*, 23 (23), 12547-12560, 2019.
8. Martin C.S., Salavatipour M.R., Approximation Algorithms for Capacitated k-Travelling Repairmen Problems, 27th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2016), Sydney-Australia, 1-12, 12-14 December, 2016.
9. Nucamendi S., Cardona-Valdes Y., Angel-Bello Acosta F., Minimizing customers' waiting time in a vehicle routing problem with unit demands, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 54 (6), 886-881, 2015.
10. Fakcharoenphol J., Harrelson C., Rao S., The k-traveling repairmen problem, *ACM Trans. Algorithms*, 3 (4), 1-16, 2007.
11. Heilporn G., Cordeau J., Laporte G., The delivery man problem with time windows, *Discrete Optim.*, 7 (4), 269-282, 2010.
12. Silva M.M., Subramanian A., Vidal T., Ochi L.S., A simple and effective metaheuristic for the minimum latency problem, *Eur. J. Oper. Res.*, 221 (3), 513-520, 2012.
13. Hmayer A., Ezzine I.O., CLARANS heuristic based approach for the k-traveling repairman problem, *International Conference on Advanced Logistics and Transport (ICALT 2013)*, Susa-Tunisia, 535-538, 29-31 May, 2013.
14. Nucamendi-Guillen S., Martinez-Salazar I., Angel-Bello F., Moreno-Vega J.M., A mixed integer formulation and an efficient metaheuristic procedure for the k-travelling repairmen problem, *J. Oper. Res. Soc.*, 67 (8), 1121-1134, 2016.
15. Muritiba A.E.F., Bonates T., Oliveira Da Silva S., Iori M., Branch-and-cut and iterated local search for the weighted k-traveling repairman problem: an application to the maintenance of speed cameras, *Transportation Science*, 55 (1), 139-159, 2021.
16. Avcı M.G., Avcı M., An adaptive large neighborhood search approach for multiple traveling repairman problem with profits, *Comput. Oper. Res.*, 111, 367-385, 2019.
17. Pei J., Mladenovic N., Urošević D., Brimberg J., Liu X., Solving the traveling repairman problem with profits: A Novel variable neighborhood search approach, *Information Sciences*, 507, 108-123, 2020.
18. Ban H.B., Nguyen D.N., Metaheuristic for the traveling repairman problem with time window constraints, 2019 IEEE-RIVF International Conference on Computing and Communication Technologies (RIVF), Danang-Vietnam, 1-6, 20-22 March, 2019.
19. Ban H.B., A metaheuristic for the delivery man problem with time windows, *J. Comb. Optim.*, 2021.
20. Liu S., Qin S., Zhang R., A branch-and-price algorithm for the multi-trip multi-repairman problem with time windows, *Transp. Res. Part E Logist. Transp. Rev.*, 116, 25-41, 2018.
21. Liu R., Jiang Z., A hybrid large-neighborhood search algorithm for the cumulative capacitated vehicle routing problem with time-window constraints, *Applied Soft Computing Journal*, 80, 18-30, 2019.
22. Van Der Meer R., Operational control of internal transport, *Doktora Tezi*, Erasmus Üniversitesi, Hollanda, 2000.
23. Bjelic N., Vidovic M., Popovic D., Variable neighborhood search algorithm for heterogeneous traveling repairmen problem with time windows, *Expert Syst. Appl.*, 40 (15), 5997-6006, 2013.
24. Kara I., Derya T., Formulations for minimizing tour duration of the traveling salesman problem with time windows, *Procedia Economics and Finance*, 26 (2015), 1026-1034, 2015.
25. Atasagun G.C., Karaoğlan İ., A mathematical model for the time dependent vehicle routing problem with simultaneous pick-up and delivery, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 34 (4), 1743-1755, 2019.
26. Kara I., Koc O.N., Altıparmak F., Dengiz B., New integer linear programming formulation for the traveling salesman problem with time windows: minimizing tour duration with waiting times, *Optimization*, 62 (10), 1309-1319, 2013.
27. Dumas Y., Desrosiers J., Gelinat E., Solomon M.M., An optimal algorithm for the traveling salesman problem with time windows, *Oper. Res.*, 43 (2), 367-371, 1995.
28. Kara İ., Önder Uzun G., Derya T., Formulations for the multiple traveling repairmen problem: computational analysis and some extensions, 7th International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, Rabat-Morocco, 1174-1175, 11-13 April, 2017.
29. Angel-Bello F., Cardona-Valdes Y., Alvarez A., Mixed integer formulations for the multiple minimum latency problem, *Operational Research*, 19 (1), 369-398, 2019.

