

Sıcaklığa maruz fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış eğri eksenli kirişte plastik akmanın başlaması

Yielding of functionally graded curved beam subjected to temperature

Mehmet HASKUL^{1*} 

¹Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Şırnak Üniversitesi, Şırnak, Türkiye.
mehmethaskul@sirnak.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 09.03.2019
Kabul Tarihi/Accepted: 26.11.2019

Düzeltilme Tarihi/Revision: 30.09.2019

doi: 10.5505/pajes.2019.92331
Araştırma Makalesi/Research Article

Öz

Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış silindirik olarak eğri eksenli kirişin elastik davranışı analitik olarak incelenmiştir. Çalışmada elastisite modülü üstel kuvvete bağlı olarak kirişin kalınlığı boyunca değiştiği varsayılmaktadır. Aynı zamanda genel lineer karışım kanunu uygulanarak, diğer özellikleri de (ısı genleşme katsayısı, ısı iletim katsayısı, akma dayanımı) üstel kuvvete göre değişmektedir. Poisson oranı ise sabit kalmakta değişmemektedir. Kirişe uygulanan sıcaklık dağılımı kirişin kalınlığı doğrultusunda ve radyal koordinatın bir fonksiyonu olarak değişmektedir. Kiriş düzlem gerilme durumunda olduğu varsayılmaktadır. Elastik davranışı belirlemek için von Mises akma kriteri kullanılmıştır. Kirişe pozitif, negatif ve homojen sıcaklıklar uygulanmış ve akmanın iç yüzeyde, dış yüzeyde ve aynı anda her iki yüzeyde başladığı görülmüştür.

Anahtar kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, Sıcaklık etkisi, von Mises kriteri, Eğri eksenli kiriş.

Abstract

In this study, the elastic behavior of the functionally graded cylindrically curved beam is analytically investigated. In the study, it is assumed that the modulus of elasticity varies along the thickness of the beam depending on the power law. Accordingly, by applying the general linear mixing law, other properties (thermal expansion coefficient, heat conduction coefficient, yield strength) vary according to the power law. Poisson's ratio remains constant. The temperature distribution applied to the beam varies with the thickness of the beam and as a function of the radial coordinate. The beam is assumed to be in the plane stress state. To determine the elastic behavior, von Mises yield criterion was used. Positive, negative and homogeneous temperatures were applied to the beam and the yielding was observed on the inner surface, the outer surface and at the same time on both surfaces.

Keywords: Functionally graded material, Temperature effect, von Mises criterion, Curved beam.

1 Giriş

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kavramı ilk olarak 1984'te ısı bariyer malzemeleri hazırlamak için önerildi[1]. O zamandan beri, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler önemli miktarda bilimsel değerlendirmeyi almış ve bu homojen olmayan katı malzemeler farklı mühendislik uygulamalarında kullanılmaya başlamıştır. Bu katı malzemelerin temel avantajları, özelliklerinin kullanıldığı alana göre uyarlanabilmesidir. Bu kompozitlerde, hem kompozisyon hem de yapı, hacim üzerinde kademeli olarak değişir ve istenilen elastik bir alanın üretilmesi için malzemenin özelliklerinde karşılık gelen değişikliklere neden olur. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin modellenmesi, üretimi ve özellikleri ile ilgili olarak çeşitli çalışmalar vardır [2]-[7]. Son yıllarda, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış borular, halkalar ve plakalar üzerine etki eden basınç ve (veya) sıcaklık değişiminin neden olduğu gerilme alanı ve FDM kirişlerin titreşim, burkulma analizi pek çok bilim adamı tarafından tartışılmıştır [8]-[23].

Makine parçalarının tasarımının önemi, eğri eksenli çubuk, kiriş ve panelin termal ve/veya mekanik kuvvetlere maruz kalan elastik davranışları için önem arz etmektedir. Ancak, homojen olmayan eğri eksenli kirişlerde termoelastik gerilme alanı problemi fazla dikkat çekmemiştir.

Timoshenko ve Goodier [24] eğri eksenli kirişlerin basit eğilme altında düzlemsel gerilme varsayımıyla elastik durumdaki

deformasyon davranışlarını incelemiştir. Boley ve Barrekette [25] radyal yönde değişen sıcaklık altında homojen eğri eksenli kirişlerdeki termoelastik gerilmeleri araştırmıştır. Çalışmalarında elastisite teorisinden elde edilen çözümü, malzemelerin dayanımına dayanan yaklaşık bir çözümle karşılaştırmışlardır. Shaffer ve House [26] ideal plastik malzemeden yapılmış basit eğilmeye maruz eğri eksenli çubuktaki açıl ve radyal yönde gerilme dağılımlarını elde etmek için analitik model geliştirmiştir. Aynı yükleme durumu için Shaffer ve House [27] şekil değiştirme ve yer değiştirmeler için denklemler elde etmişlerdir. Arslan, Mack ve Gamer [28], homojen panelin ısı yük altında elastik davranışı, Arslan ve Mack [29] elastik-plastik davranışı için analitik çözümler sunmuşlardır. Dryden [30] fonksiyonel olarak derecelendirilmiş eğri eksenli kirişlerin elastik gerilme analizini araştırmıştır. Mohammadi ve Dryden [31],[32], fonksiyonel olarak derecelendirilmiş eğri eksenli kiriş içindeki ısı gerilmeler problemini ve termoelastik gerilme alanını araştırmışlardır. Arslan ve Sülü [33] farklı malzemeden yapılmış iki tabakalı ve basit eğilme durumundaki eğri eksenli kirişin plastik davranışını incelemişlerdir. Eraslan ve Akis [34], fonksiyonel derecelendirilmiş dönen şaft ve disk için düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme için analitik çözümler elde etmişlerdir.

Bu çalışmada sıcaklığa maruz fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) yapılmış eğri eksenli kiriş için analitik bir çözüm elde edilmiştir. Elastisite modülünün üstel kuvvete göre kirişin kalınlığı boyunca değiştiği varsayılmıştır ve genel lineer

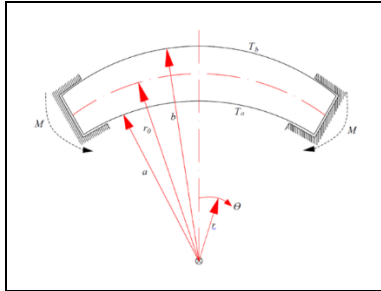
*Yazışılan yazar/Corresponding author

karışım kanunu uygulanarak diğer termoelastik özellikler (ısıl genleşme katsayısı, ısıl iletkenlik katsayısı, akma dayanımı ve yoğunluk) üstel kuvvete göre değişmektedir. Poisson oranı sabit kalmakta değişmemektedir. Sıcaklık dağılımı radyal doğrultuda ve kararlı hal olarak nitelendirdiğimiz bir şekilde değişmektedir. Eğri eksenli kirişi düzlem gerilme durumunda olduğu varsayılmaktadır.

Yapılan literatür araştırması incelendiğinde kiriş çubuk, halka veya panellerle ilgili olarak ya sıcaklık altında yada mekanik yüklemeye altında yapının elastik davranışları ele alınmıştır. Bu nedenle, bu çalışma fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin üretilmiş ve düzlem gerilme durumundaki eğri eksenli kirişin hem sıcaklık hem de mekanik yük altında elastik analizini göstermektedir. Bu çalışmanın özgünlüğü, çeşitli üstel derecelendirme parametrelerinin, tüm malzeme özelliklerinin, sıcaklık ve mekanik yüklerin FDM kirişinin yer değiştirme ve gerilmeleri üzerindeki etkisinin belirlenmesidir.

2 Problemin matematiksel modellenmesi

Şekil 1'de iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan eğri eksenli kirişin geometrisi gösterilmiştir. Eğri eksenli kiriş açılal yönde (θ) sabit mesnetlerle desteklenmektedir. Bu mesnetler kirişin uç kısımlarında hareket etmesine izin vermekte fakat kirişin orta yüzeyinin ($r=r_0=(a+b)/2$) eğrilik yarıçapının ise sabit kalmasını sağlamaktadır. Kirişe herhangi bir yüzeyinde sıcaklık uygulandığında bu mesnetler kirişin hareketini engellemekte ve kiriş mekanik olarak bir yüke maruz kalmaktadır. Bundan dolayı fonksiyonel derecelendirilmiş eğri eksenli kiriş hem sıcaklık hem de mekanik bir yüklemeye maruz kalmaktadır.



Şekil 1. Eğri eksenli kiriş ve koordinat düzlemi.

Figure 1. Curved beam and coordinate axis.

2.1 Problemin tanımı

Şekil 1'de görüldüğü gibi kirişin iç ve dış yüzeyi serbest yüzeyler olduğundan herhangi bir gerilme oluşmaz ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\sigma_r|_{r=a} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_r|_{r=b} = 0 \quad (2)$$

Kirişin radyal yönde yer değiştirmesi;

$$r = r_0: \quad u_{r_0} = 0 \quad (3)$$

Burada, $r_0=(a+b)/2$ kirişin orta yüzeyinden geçen eğrilik yarıçapıdır. Kiriş açılal yönde sabit mesnetlerle desteklendiğinden dolayı M eğilme momenti oluşacaktır ve aşağıdaki denklemde ifade edilmektedir.

$$M = \int_a^b \sigma_\theta r dr \quad (4)$$

2.2 Temel denklemler

Şekil değiştirme ve yer değiştirme arasındaki bağıntı Timoshenko ve Goodier [24] notasyonu takip edilerek;

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

Denklem (7) FDM eğri eksenli kirişin sabit eğrilik yarıçapı için radyal yer değiştirmenin sadece r 'ye bağlı bir fonksiyon olduğunu göstermektedir.

Radyal yönde denge denklemi;

$$\sigma_\theta = \frac{d}{dr}(r\sigma_r) \quad (8)$$

ve uygunluk bağıntısı

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 0 \quad (9)$$

denklemleri ifade edilmektedir. Uygunluk bağıntısı (9) her iki tarafın integralinin alınmasıyla aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = C_1 \quad (10)$$

Burada, C_1 integral sabitidir. FDM eğri eksenli kirişte Poisson oranı (ν) sabit fakat elastisite modülü $E = E(r)$ 'ye ve ısı genleşme katsayısı $\alpha = \alpha(r)$ 'ye göre değişmektedir ve kirişin düzlem gerilme durumunda ($\sigma_z=0$) olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda genelleştirilmiş Hooke kanunu aşağıdaki gösterildiği gibi olur.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(r)} [\sigma_r - \nu\sigma_\theta] + \alpha(r)T, \quad (11)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E(r)} [\sigma_\theta - \nu\sigma_r] + \alpha(r)T, \quad (12)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E(r)} [\sigma_r + \sigma_\theta] + \alpha(r)T, \quad (13)$$

FDM kirişin malzeme özelliklerini tarif etmek için genel lineer karışım kanunu kullanılmıştır.

$$Pr_{eff}(r) = Pr_0V_0(r) + Pr_1V_1(r) \quad (14)$$

Denklem (14)'te Pr_{eff} etkin malzeme özelliklerini belirtmektedir. $0 \leq V_i \leq 1$ ve V_i kirişin kalınlığı yönünde malzemedeki hacim oranında meydana gelen değişimi göstermektedir. Bununla birlikte, FDM kirişte belirtilen ve $V_0(a) = 1$, örneğinde gösterilen 0 (sıfır) kirişin iç yüzeyindeki saf bileşeni ve 1 (bir) indeksi ise dış yüzeyindeki ikinci saf bileşeni temsil etmektedir ve aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$V_1(r) = 1 - V_0(r) \quad (15)$$

Elastisite modülü üstel kuvvete bağlı olarak değişmektedir ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^m \quad (16)$$

Denklem (16) ve (15), denklem (14)'te yerine konularak matematiksel işlemler yapılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$V_0(r) = \frac{E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^m - E_1}{E_0 - E_1} \quad (17)$$

Denklem (17)'de elde edilen ifade Denklem (14)'te yerine konularsa, genel lineer karışım kanunu; ısıl genişleme katsayısı $\alpha(r)$, yoğunluk $\rho(r)$, tek eksenli akma gerilmesi $\sigma_V(r)$ ve ısıl iletkenlik katsayısı $k(r)$ için yeniden düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilmiş olur.

$$Pr_{eff}(r) = A_{Pr} \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_{Pr} \quad (18)$$

$$A_{Pr} = \frac{E_0(Pr_0 - Pr_1)}{E_0 - E_1}, \quad B_{Pr} = \frac{E_0 Pr_1 - E_1 Pr_0}{E_0 - E_1} \quad (19)$$

Burada; Pr genel bir ifadedir ve kirisin diğer malzeme özelliklerini α , ρ , σ_y ve k simgelemek için kullanılmıştır. Bu özellikler radyal koordinata bağlı olarak değişmektedir. Fakat Poisson oranı sabit kalmaktadır.

Açısal ve radyal yer değiştirme aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [35].

$$\vartheta = C_1 r \theta + C_2 \sin \theta \quad (20)$$

$$u = r \varepsilon_\theta - C_1 r - C_2 \cos \theta. \quad (21)$$

F gerilme fonksiyonu kullanılarak $\sigma_r = F/r$ ve $\sigma_\theta = dF/dr$ olarak tanımlanabilir. Bu ifadeler Genelleştirilmiş Hooke kanununda (11)-(13) yerine konularak şekil değiştirme ifadeleri, F gerilme fonksiyonu cinsinden elde edilmiş olur. Elde edilen denklemler uygunluk denklemi (10)'da yerine konularsa Denklem (22)'de verilen bir diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

$$r^{1-m} F'' + (1-m)r^{-m} F' - r^{-1-m} (1-v)F = -\frac{E_0}{a^m} \left[r \left(A_\alpha \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_\alpha \right) T' + m \left(A_\alpha \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_\alpha \right) T - C_1 \right] \quad (22)$$

Denklem (22)'nin çözümü;

$$F = C_3 r^{-\frac{m-S}{2}} + C_4 r^{\frac{m+S}{2}} + \frac{E_0 C_1 r^{1+m}}{m a^m (1+v)} + \frac{E_0 r^{(m-S)/2}}{2 S a^{2m}} \times \left[\begin{aligned} &(2+m-S)r^S \left(a^m B_\alpha \int_a^r \xi^{-\frac{m-S}{2}} T d\xi + A_\alpha \int_a^r \xi^{\frac{3m-S}{2}} T d\xi \right) \\ &- (2+m+S) \left(a^m B_\alpha \int_a^r \xi^{\frac{m+S}{2}} T d\xi + A_\alpha \int_a^r \xi^{\frac{3m+S}{2}} T d\xi \right) \end{aligned} \right] \quad (23)$$

Burada C_3 ve C_4 integral sabitleridir ve

$$S = \sqrt{4 + m^2 - 4m\nu} \quad (24)$$

Denklem (22) radyal gerilme $\sigma_r = F/r$ ve çevresel gerilme $\sigma_\theta = dF/dr$ ifadelerinde yerine yerleştirilerek aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\sigma_r = C_3 r^{-\frac{2+m-S}{2}} + C_4 r^{-\frac{2+m+S}{2}} + \frac{E_0 C_1 r^m}{m a^m (1+v)} + \frac{E_0 r^{-\frac{2+m-S}{2}}}{2 S a^{2m}} + \frac{E_0 r^{-\frac{2+m+S}{2}}}{2 S a^{2m}} \quad (25)$$

$$\sigma_\theta = \frac{m-S}{2} C_3 r^{-\frac{2+m-S}{2}} + \frac{m+S}{2} C_4 r^{-\frac{2+m+S}{2}} + \frac{E_0 C_1 (1+m)r^m}{m a^m (1+v)} - \frac{E_0 r^m}{a^{2m}} (a^m B_\alpha + r^m A_\alpha) T + \frac{E_0 r^{-\frac{2+m-S}{2}}}{4 S a^{2m}} \times \left[\begin{aligned} &(2+m-S)r^S \left(a^m B_\alpha \int_a^r \xi^{-\frac{m-S}{2}} T d\xi + A_\alpha \int_a^r \xi^{\frac{3m-S}{2}} T d\xi \right) \\ &- (2+m+S) \left(a^m B_\alpha \int_a^r \xi^{\frac{m+S}{2}} T d\xi + A_\alpha \int_a^r \xi^{\frac{3m+S}{2}} T d\xi \right) \end{aligned} \right] \quad (26)$$

Yukarıdaki denklemlerde C_1 , C_2 , C_3 ve C_4 olmak üzere dört tane bilinmeyen integral sabitleri mevcuttur. İntegral sabitlerinin belirlenmesi için $\sigma_r(a) = 0$ ve $\sigma_r(b) = 0$ ile kirisin sabit olarak kaldığı $r = r_0$ ve $\theta = 0$ yani $u(r_0, \theta = 0) = 0$ ile bilinmeyenler a elde edilebilir ve aşağıda verilmiştir.

$$C_1 = \frac{m(1+\nu)[L_1(a^S(m-S-2\nu) - r_0^S(m+S-2\nu))L_2]}{2 S a^m L_3} \quad (27)$$

$$C_2 = 0 \quad (28)$$

$$C_3 = \frac{E_0}{2 S (a^S - b^S)} \left\{ a^{-2m+S} L_1 + \frac{(a^{-2m+S} b^{\frac{2+m+S}{2}} - a^{\frac{2-3m+S}{2}} b^S)}{L_3} \right. \quad (29)$$

$$\left. \times [L_1(r_0^S(m+S-2\nu) - a^S(m-S-2\nu)) - L_2] \right\}$$

$$C_4 = \frac{E_0}{2 a^{2m} S (a^S - b^S)} \left\{ (a^{(2+m+S)/2} - b^{(2+m+S)/2}) \times \frac{L_1(r_0^S(m+S-2\nu) - a^S(m-S-2\nu)) - L_2}{L_3} \right\} \quad (30)$$

Burada,

$$L_1 = (2+m+S) \left(a^m B_\alpha \int_a^b r^{\frac{m+S}{2}} T dr + A_\alpha \int_a^b r^{\frac{3m+S}{2}} T dr \right) - b^S (2+m-S) \left(a^m B_\alpha \int_a^b r^{\frac{m-S}{2}} T dr + A_\alpha \int_a^b r^{\frac{3m-S}{2}} T dr \right) \quad (31)$$

$$L_2 = (a^S - b^S) [r_0^S (2+m-S)(m+S-2\nu)] \left(a^m B_\alpha \int_a^{r_0} r^{\frac{m-S}{2}} T dr + A_\alpha \int_a^{r_0} r^{\frac{3m-S}{2}} T dr \right) - (2+m+S)(m-S-2\nu) \quad (32)$$

$$\times \left(a^m B_\alpha \int_a^{r_0} r^{\frac{m+S}{2}} T dr + A_\alpha \int_a^{r_0} r^{\frac{3m+S}{2}} T dr \right) L_3 = r(m-S-2\nu) (a^S b^{\frac{2+m+S}{2}} - a^{\frac{2+m+S}{2}} b^S) + r_0^S (m+S-2\nu) \left(a^{\frac{2+m+S}{2}} - b^{\frac{2+m+S}{2}} \right) - 2 r_0^{\frac{2+m+S}{2}} (a^S - b^S) (1 - (1+m)\nu) \quad (33)$$

Denklem (26)'da verilen Çevresel gerilme σ_θ , Denklem (4)'te yerine konularak eğilme momenti M elde edilmiş olur.

2.3 Sıcaklık alanı

Sıcaklık dağılımı radyal doğrultuda ve kararlı hal olarak nitelendirdiğimiz şekilde bir değişim içinde olduğu varsayılmaktadır. Kirisin iç veya dış yüzeylerin sıcaklık artışı yavaşça arttığı düşünülmüştür ve zamandan bağımsız olarak hesaplanmıştır. Peng ve Li [14] tarafından elde edilen sıcaklık denklemi kullanılmıştır. Denklem (34)'te verilmiştir.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rk(r) \frac{dT(r)}{dr}] = 0 \quad (34)$$

Isıl iletkenlik katsayısı $k(r)$ ve Denklem (18)'de yerine konularak $k(r) = A_k \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_k$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik Denklem (34)'te yerine konular ve matematiksel işlemler yapılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$T(r) = \frac{D_1 \left\{ m \ln(r) - \ln \left[A_k \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_k \right] \right\}}{m B_k} + D_2 \quad (35)$$

Burada, D_1 ve D_2 integral sabitleridir. Denklem (37)'te verilen sıcaklık denkleminde iç yüzey sıcaklığı için T_a ve dış yüzey sıcaklığı T_b , yani $T(a)=T_a$, $T(b)=T_b$ tanımlanması yapılırsa; genel sıcaklık denklemi elde edilir.

$$T(r) = \frac{\left\{ m \ln \left(\frac{r}{b}\right) + \ln [A_k (b/a)^m + B_k] - \ln [A_k \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_k] \right\} T_a - m \ln \left(\frac{b}{a}\right) - \ln [A_k + B_k] + \ln [A_k \left(\frac{b}{a}\right)^m + B_k]}{-m \ln \left(\frac{r}{a}\right) + \ln [A_k (r/a)^m + B_k] - \ln [A_k + B_k]} T_b + \frac{\left\{ -m \ln \left(\frac{r}{a}\right) + \ln [A_k (r/a)^m + B_k] - \ln [A_k + B_k] \right\} T_b - m \ln \left(\frac{b}{a}\right) - \ln [A_k + B_k] + \ln [A_k \left(\frac{b}{a}\right)^m + B_k]}{-m \ln \left(\frac{b}{a}\right) - \ln [A_k + B_k] + \ln [A_k \left(\frac{b}{a}\right)^m + B_k]} T_a \quad (36)$$

2.4 Gerilme dağılımı ve üst kuvvet etkisi

FDM eğri eksenli kirişteki elastik sınırları belirlemek için von Mises akma kriteri ve üst kuvvet aşağıda verilmiştir.

$$\sigma_M(r) = \sigma_y(r), \quad \sigma_M = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad (37)$$

$$m_{ext} = \frac{\ln(\bar{E}_1)}{\ln(b)} \quad (38)$$

Sayısal sonuçlar için aşağıdaki boyutsuz ifadeler kullanılmıştır.

$$\bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_0}, \quad \bar{M} = \frac{M}{a^2 \sigma_{y,0}}$$

$$\bar{T} = \frac{\alpha_0 E_0 T}{\sigma_{y,0}}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad \bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{y,0}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Üstel kuvvet değişimi $m_{ext} \leq m < 0$ veya $0 < m \leq m_{ext}$ bağıntısıyla $\bar{E}_1 > 1$ veya $\bar{E}_1 < 1$ ilişkilidir.

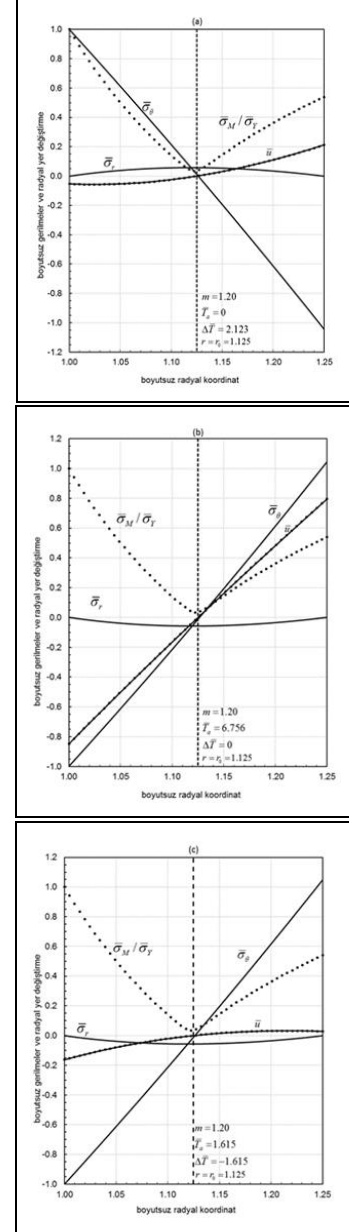
Sıcaklık dağılımı özellikle yüzey sıcaklık farkları $\Delta T = T_b - T_a$ üstel kuvvet parametresi m değerine göre uygun olarak alınır. İç yüzey ve dış yüzey sıcaklığı daima referans sıcaklık değerinde tutulmaktadır.

2.5 Sayısal bulgular

Yapılan çalışmada plastik akmanın başlaması ile kirişin tamamen elastik sınırlar içinde incelenmesi olarak ele alınmaktadır. Bundan dolayı kiriş referans sıcaklığına kadar sıcaklık uygulanır. Kiriş referans sıcaklığına ulaştığı anda sıcaklık uygulaması kaldırılır. Bu durumda kirişin önce her hangi bir yüzeyinde (iç veya dış yüzey) akma başlarsa sıcaklık kaldırılır ve böylece kiriş elastik sınırlar içinde kalmaktadır. FDM eğri eksenli kiriş iç yüzeyi alüminyum dış yüzeyi ise çelik olacak biçimde tasarlanmış ve sayısal sonuçlar hesaplanmıştır.

Bu durumda, kirişin malzeme özellikleri ve yüzey yarıçap oranları belirtilmiştir. Kiriş yarıçap oranı $b/a=1.25$, $\nu=0.3$, $E_1/E_0=2.86$, $\alpha_1/\alpha_0=0.72$, $k_1/k_0=0.21$, $\sigma_{y,1}/\sigma_{y,0}=6.67$, $\rho_1/\rho_0=2.86$ değerleri alüminyum/çelik FDM kiriş için boyutsuz ifadelerdir. Burada Denklem (38) kullanılarak maksimum FDM üstel kuvvet parametresi $m = m_{ext} = 4.705$ olarak elde edilir.

Kirişte sıcaklık etkisi ve buna bağlı olarak meydana gelen moment etkisi ile oluşan gerilmeler farklı yüzey sıcaklık durumuna göre elde edilmiştir. Yüzey sıcaklık farkı ($\Delta \bar{T} = \bar{T}_b - \bar{T}_a$) m üstel derecelendirme parametresine uygun şekilde $\Delta \bar{T} > 0$, $\Delta \bar{T} = 0$ ve $\Delta \bar{T} < 0$ üç farklı sıcaklık durumu incelenmiştir. Şekil 2 $m=1.20$ için farklı sıcaklıklardaki gerilme ve radyal doğrultudaki yer değişimini göstermektedir.



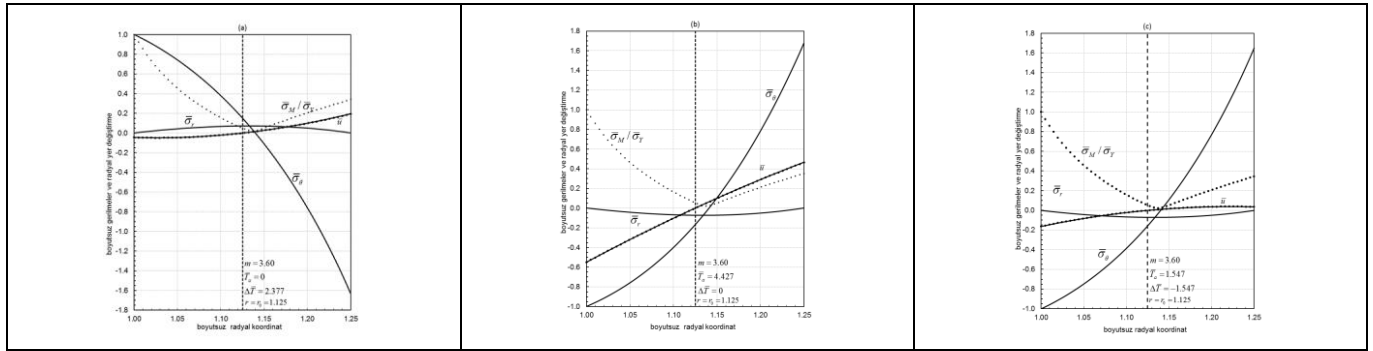
Şekil 2. $m=1.20$ üstel kuvvet parametresine göre farklı sıcaklıklardaki gerilme ve radyal yer değiştirme. (a): Pozitif sıcaklık $\bar{T}_a = 0$, $\bar{T}_b = \Delta \bar{T}$ ve moment $\bar{M}_P = -0.0107$. (b): Homojen sıcaklık $\bar{T}_a = \bar{T}_b$, $\Delta \bar{T} = 0$ ve moment $\bar{M}_H = 0.0107$. (c): Negatif sıcaklık $\bar{T}_b = 0$, $\bar{T}_a = \Delta \bar{T}$ ve moment $\bar{M}_N = 0.01065$.

Figure 2. Stress and radial displacement at different temperatures according to the exponential parameter $m = 1.20$ (a): Positive temperature $\bar{T}_a = 0$, $\bar{T}_b = \Delta \bar{T}$ and couples $\bar{M}_P = -0.0107$. (b): Homogeneous temperature $\bar{T}_a = \bar{T}_b$, $\Delta \bar{T} = 0$ and couples $\bar{M}_H = 0.0107$. (c): Negative temperature $\bar{T}_b = 0$, $\bar{T}_a = \Delta \bar{T}$ and couples $\bar{M}_N = 0.01065$.

Her farklı sıcaklık durumu incelendiğinde akmanın kirişin iç yüzeyinde meydana geldiği görülmektedir. $m=1.20$ üstel derecelendirme parametresine göre Al'nin dış yüzeydeki hacim oranı %83, Çelik ise %17 değerindedir. Açılal yönde bulunan sabit mesnetlerden dolayı eğilme momenti oluşmakta ve bu değer pozitif sıcaklıkta negatif bir değer $\bar{M}_P = -0.0107$ ve homojen ve negatif sıcaklıklarda ise sırasıyla $\bar{M}_H = 0.0107$ ve $\bar{M}_N = 0.01065$ pozitif değer almaktadır. Kirişteki gerilmeler incelendiğinde Çevresel gerilme pozitif sıcaklıkta pozitif değerden negatif değere doğru değişmekte homojen ve negatif sıcaklıkta ise negatif değerden pozitif değere doğru doğrusal olarak değişmektedir. Radyal gerilme ise problemin başında belirtildiği gibi $\sigma_r(a) = 0$ ve $\sigma_r(b) = 0$ değerlerini göstermektedir. Radyal yer değiştirme problemde belirtilen kirişin orta yüzeyinde eğrilik yarıçapının değişmediği ve $r = r_0 = 1.125, u_{r_0} = 0$ sabit olduğu grafiklerde açık bir şekilde görülmektedir. Radyal yer değiştirmede en büyük değişiklik homojen sıcaklıkta görülmektedir.

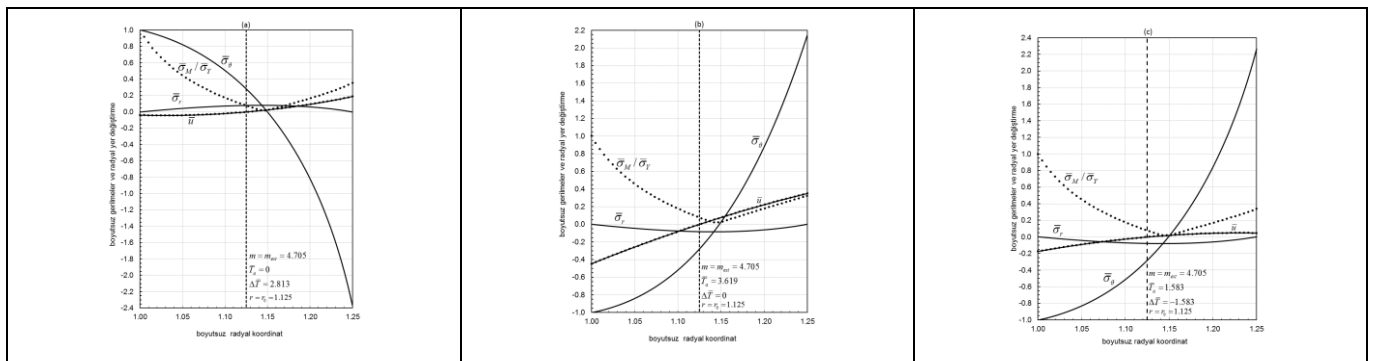
Şekil 3 $m=3.60$ üstel derecelendirme parametresine göre farklı sıcaklıklardaki gerilme ve radyal yer değiştirmeyi göstermektedir. Al'nin kirişin dış yüzeydeki hacim oranı %34, Çelik ise %66 değerindedir. Eğilme momenti ise pozitif sıcaklıkta $\bar{M}_P = -0.0133$ ve homojen ve negatif sıcaklıklarda ise sırasıyla $\bar{M}_H = 0.0136$ ve $\bar{M}_N = 0.0134$ değerdedir. Kirişteki gerilmeler incelendiğinde Çevresel gerilme bir önceki $m=1.20$ değeri için doğrusal olarak değişirken $m=3.60$ değerinde ise parabol bir eğri sergilemektedir. Kirişin dış yüzeyinde hacim olarak çelik oranının artması Çevresel gerilmeyi etkilediği düşünülmektedir ve grafiklerde açık şekilde görülmektedir.

Şekil 4 $m=m_{ext}=4.705$ üstel derecelendirme parametresine göre farklı sıcaklıklardaki gerilme ve radyal yer değiştirmeyi göstermektedir. Al'nin kirişin dış yüzeydeki hacim oranı %0, Çelik ise %100 değerindedir. Eğilme moment pozitif sıcaklıkta $\bar{M}_P = -0.0154$ ve homojen ve negatif sıcaklıklarda ise sırasıyla $\bar{M}_H = 0.0155$ ve $\bar{M}_N = 0.0154$ değerdedir. Kirişin dış yüzeyi tamamen çelik malzemeden oluşmaktadır. Açılal doğrultudaki gerilme değişimi net bir şekilde görülmektedir.



Şekil 3. $m=3.60$ üstel kuvvet parametresine göre farklı sıcaklıklardaki gerilme ve radyal yer değiştirme (a): Pozitif sıcaklık $\bar{T}_a = 0, \bar{T}_b = \Delta\bar{T}$ ve moment $\bar{M}_P = -0.0133$ (b): Homojen sıcaklık $\bar{T}_a = \bar{T}_b, \Delta\bar{T} = 0$ ve moment $\bar{M}_H = 0.0136$ (c): Negatif sıcaklık $\bar{T}_b = 0, \bar{T}_a = \Delta\bar{T}$ ve moment $\bar{M}_N = 0.0134$.

Figure 3. Stress and radial displacement at different temperatures according to the exponential parameter $m = 3.60$ (a): Positive temperature $\bar{T}_a = 0, \bar{T}_b = \Delta\bar{T}$ and couples $\bar{M}_P = -0.0133$. (b): Homogeneous temperature $\bar{T}_a = \bar{T}_b, \Delta\bar{T} = 0$ and couples $\bar{M}_H = 0.0136$. (c): Negative temperature $\bar{T}_b = 0, \bar{T}_a = \Delta\bar{T}$ and couples $\bar{M}_N = 0.0134$.



Şekil 4. $m=m_{ext}=4.705$ üstel kuvvet parametresine göre farklı sıcaklıklardaki gerilme ve radyal yer değiştirme. (a): Pozitif sıcaklık $\bar{T}_a = 0, \bar{T}_b = \Delta\bar{T}$ ve moment $\bar{M}_P = -0.0154$ (b): Homojen sıcaklık $\bar{T}_a = \bar{T}_b, \Delta\bar{T} = 0$ ve moment $\bar{M}_H = 0.0155$ (c): Negatif sıcaklık $\bar{T}_b = 0, \bar{T}_a = \Delta\bar{T}$ ve moment $\bar{M}_N = 0.0154$

Figure 4. Stress and radial displacement at different temperatures according to the exponential parameter $m = m_{ext}=4.705$ (a): Positive temperature $\bar{T}_a = 0, \bar{T}_b = \Delta\bar{T}$ and couples $\bar{M}_P = -0.0154$. (b): Homogeneous temperature $\bar{T}_a = \bar{T}_b, \Delta\bar{T} = 0$ and couples $\bar{M}_H = 0.0155$. (c): Negative temperature $\bar{T}_b = 0, \bar{T}_a = \Delta\bar{T}$ and couples $\bar{M}_N = 0.0154$.

3 Sonuçlar

Bu çalışmada, radyal doğrultuda farklı sıcaklıklar (pozitif, negatif ve homojen) altında alüminyum/çelik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin (FDM) üretilmiş eğri eksenli kirişteki elastik davranışı, gerilmeleri ve radyal yer değiştirme için bir analitik çözümü elde edilmiştir. Özellikle üstel kanun derecelenmesindeki değişimin etkisi, karışım kanunu, eğri eksenli kirişin bütün termoelastik özellikleri (Poisson oranı hariç) radyal koordinat özellikleri hesaba alınarak detaylı bir çalışma yapılmıştır. Kiriş farklı m değerlerine karşılık olarak farklı sıcaklıklarda akma meydana gelmiştir. Her farklı m değerinin sıcaklık değişimini etkilediği görülmektedir. FDM eğri eksenli kirişte akma sınırı von Mises akma kriterine göre incelenmiştir. Buna ek olarak; üstel derecelendirme parametresi, sıcaklık ve moment etkileri ve kirişin iç yüzeyinin alüminyum olması akmanın iç yüzeyde başladığını göstermektedir.

4 Conclusions

In this study, an analytical solution was obtained for the elastic behavior, stresses and radial displacement of the curved axis beam made of aluminum/steel functional graded material (FGM) under different temperatures (positive, negative and homogeneous) in the radial direction. Especially, a detailed study has been carried out taking into account the effect of the change in the exponential parameter, the rule of mixture, the radial coordinate properties of the curved beam (except the Poisson's ratio). The beam occurred yield at different temperatures in response to different m exponential parameter values. It has been observed that each different m value effects the temperature change. The yield limit in FGM curved beam was examined according to von Mises yield criteria. In addition; exponential parameter, temperature and couples effects and the inner surface of the beam are aluminum shows that the yield starts on the inner surface.

5 Kaynaklar

[1] Koizumi M. "FGM Activities in Japan". *Composite. Part. B Engineering*, 28(1-2), 1-4, 1997.
[2] Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. 1st Ed. New York, USA, Kluwer Akademik Publishers, 1999
[3] Naebe M, Shirvanimoghaddam K. "Functionally graded materials: A review of fabrication and properties". *Applied Materials Today*, 5, 223-245 2016.
[4] Nemat-Alla MM, Ata MH, Bayoumi MR, Khair-Eldeen W. "Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of aluminum/steel functionally graded material". *Materials Science Applications*, 2(12), 1708-1718, 2011.
[5] Birman V, Byrd LW. "Modeling and analysis of functionally graded materials and structures". *Applied Mechanics Reviewers*, 60(5), 195-216, 2007.
[6] Sobczak JJ, Drenchev L. "Metallic functionally graded materials: a specific class of advanced composites". *Journal of Material Science Technology*, 29(4), 297-316, 2013.

[7] Kılıç M, Kırık İ, Kurt B, Orhan N. "Ön ısıtma sıcaklığının Ni3Al/NiAl/NiTi bileşiklerinden oluşan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin yapısına etkisinin incelenmesi". *Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 21(8), 358-364, 2015.
[8] Noda N. "Thermal stresses in functionally graded materials". *Journal of Thermal Stresses*, 22(4-5), 477-512, 1999.
[9] Zimmerman RW, Lutz MP. "Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder". *Journal of Thermal Stresses*, 22(2), 177-188, 1999.
[10] Shao ZS. "Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length". *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, 82(3), 155-163, 2005.
[11] Awaji H, Sivakumar R. "Temperature and stress distributions in a hollow cylinder of functionally graded material: the case of temperature-independent material properties". *Journal of American Ceramic Society*, 84(5), 1059-1065, 2001.
[12] Evci C, Gülgeç M. "Functionally graded hollow cylinder under pressure and thermal loading: Effect of material parameters on stress and temperature distributions". *International Journal of Engineering Science*, 123, 92-108, 2018.
[13] Arslan E, Mack W. "Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub". *Composite Structure*, 121, 217-224, 2015.
[14] Peng XL, Li XF. "Thermal stress in rotating functionally graded hollow circular disks". *Composite Structure*. 92(8), 1896-1904, 2010.
[15] Tutuncu N, Ozturk M. "Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels". *Composites Part B: Engineering*, 32(8), 683-686, 2001.
[16] Jabbari M, Sohrabpour S, Eslami MR. "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads". *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 79(7), 493-497, 2002.
[17] Horgan CO, Chan AM. "The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials". *Journal of Elasticity*, 55(1), 43-59, 1999.
[18] Akgöz B, Civalek Ö. "Effects of thermal and shear deformation on vibration response of functionally graded thick composite microbeams". *Composites Part B: Engineering*, 129, 77-87, 2017.
[19] Akbaş ŞD. "Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir kirişin statik ve titreşim davranışlarının incelenmesi". *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 20(1), 69-82, 2018.
[20] Turan M, Kahya V. "Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim analizi". *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 119-130, 2018.
[21] Evran, S. "Investigation of effects of layer positions on mechanical buckling behavior of axially layered functionally graded beams". *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 25(1), 20-26, 2019.
[22] Avcar M. "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams". *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603-615, 2019.

- [23] Avcar M, Mohammed, WKM. "Winkler zemin ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin girişin frekans parametrelerine etkilerinin incelenmesi". *Journal of Engineering Sciences*, 5(3), 573-580, 2017.
- [24] Timoshenko SP, Goodier JN. *Theory of Elasticity*, 3rd Ed. New York, USA, McGraw-Hill, 1970.
- [25] Bruno AB. "Thermal stress in curved beams". *Journal of the Aerospace Sciences*, 25(10), 627-630, 1958.
- [26] Shaffer BW, House RN. "Displacements in a wide curved bar subjected to pure elastic-plastic bending". *Journal of Applied Mechanics Transactions*, ASME, 24, 447-452, 1957.
- [27] Shaffer BW, House RN. *The Elastic-Plastic Stress Distribution Within a Wide Curved Bar Subjected to Pure Bending*. New York, USA, Univ Bronx School of Engineering and Science, 1954.
- [28] Arslan E, Mack W, Gamer U. "Elastic limits of a radially heated thick-walled cylindrically curved panel". *Forschung im Ingenieurwesen*, 77(1-2), 13-23, 2013.
- [29] Arslan E, Mack W. "Elastic-plastic states of a radially heated thick-walled cylindrically curved panel". *Forschung im Ingenieurwesen*, 78(1-2), 1-11, 2014.
- [30] Dryden J. "Bending of inhomogeneous curved bars". *International Journal of Solids and Structure*, 44(11-12), 4158-4166, 2007.
- [31] Mohammadi M, Dryden JR. "Thermal stress in a functionally graded curved bar". Proceedings of the 18th IASTED International Conference: modelling and simulation, Montreal, QC, Canada, 30 May-1 June 2007.
- [32] Mohammadi M, Dryden JR. "Thermal stress in a nonhomogeneous curved beam". *Journal of Thermal Stresses*, 31(7), 587-598, 2008.
- [33] Arslan E, Sülü İY. "Yielding of two-layer curved bars under pure bending". *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 94(9), 713-720, 2014.
- [34] Eraslan AN, Akis T. "On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems". *Acta Mechanica*, 181(1-2), 43-63, 2006.
- [35] Eraslan AN, Arslan E. "A concise analytical treatment of elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam". *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*, 88(8), 600-616, 2008.