POLİTEKNİK DERGİSİ

JOURNAL of POLYTECHNIC

ISSN: 1302-0900 (PRINT), ISSN: 2147-9429 (ONLINE)
URL: http://dergipark.org.tr/politeknik

Nötrosofik parametreli esnek kümelerin genelleştirilmesi ve uygulamaları

Generalization of neutrosophic parametrized soft set theory and its applications

Yazar(lar) (Author(s)): *Orhan DALKILIÇ*[1]

ORCID[1]*: 0000-0003-3875-1398*

Bu makaleye şu şekilde atıfta bulunabilirsiniz(To cite to this article): Dalkılıç O., "Nötrosofik parametreli esnek kümelerin genelleştirilmesi ve uygulamaları", ***Politeknik Dergisi***, 25(2): 675-684, (2022).

Erişim linki (To link to this article): http://dergipark.org.tr/politeknik/archive

DOI: 10.2339/politeknik.783237

Nötrosofik Parametreli Esnek Kümelerin Genelleştirilmesi ve Uygulamaları

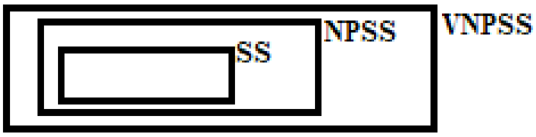
Generalization of Neutrosophic Parametrized Soft Set Theory and Its Applications

Önemli noktalar (Highlights)

- *Nötrosofik parametreli esnek küme (NPSS)'lerin belirsizlik problemlerini çözmedeki yetersizlikleri / The inadequacies of NPSSs in solving uncertainty problems*
- *Belirsizliğin en doğru şekilde ifade edilmesi ve ideale yakın çözümlerin elde edilebilmesi için sanal nötrosofik parametreli esnek küme (VNPSS)'lerin önerilmesi / Recommending VNPSSs in order to express uncertainty in the most accurate way and to obtain solutions that are close to ideal*
- *NPSS ve VNPSS arasındaki farkı daha iyi bir şekilde ifade edebilmek için bir karar verme algoritmasının sunulması / Presentinng a decision making algorithm to better express the difference between the NPSS and VNPSS*

Grafik Özet (Graphical Abstract)

Bu çalışma bilim ve mühendislik alanlarında karşılaşılabilen belirsizlik problemlerinin uygulama alanını genişletebilmek için iki önemli teori olan nötrosofi ve esnek küme (SS)'lere odaklanarak NPSS genelleştirmiştir ve VNPSS tanımlanmıştır. / This study generalized NPSS and defined VNPSS by focusing on two important theories, neutrosophy and SSs, in order to expand the application area of uncertainty problems encountered in science and engineering fields.



Şekil. Kümeler arasındaki ilişkiler **/Figure.** Relations between sets

Amaç (Aim)

Bilim ve mühendislik alanlarında karşılaşılabilen belirsizlik problemlerinin uygulama alanını genişletebilmek / To expand the application area of uncertainty problems encountered in science and engineering fields

Tasarım ve Yöntem (Design & Methodology)

Bir uygulama ile, kümeler arasındaki fark ifade edilir ve en ideal sonuçları elde etmek için VNPSS'lerin kullanılması gerektiği tespit edilmiştir. / With an application, the difference between the sets is expressed and it was identified that VNPSSs should be used to obtain the most ideal results.

Özgünlük (Originality)

Bu çalışma sayesinde NPSS'lerin birçok yetersizliği aşılmıştır. / Thanks to this study, many deficiencies of NPSSs have been overcome.

Bulgular (Findings)

Önerilen VNPSS'lerin birçok belirsizlik probleminin çözümünde fayda sağlayabileceği açıktır. / It is clear that the proposed VNPSSs can be helpful in solving many uncertainty problems.

Sonuç (Conclusion)

Bu çalışmada belirsizlik problemlerini ideale en yakın şekilde çözmek amaçlanmış ve önerilen küme teorisinin başarılı bir şekilde uygulanabileceği belirlenmiştir. / In this study, it was aimed to solve uncertainty problems in the most ideal way and it was determined that the proposed set theory can be applied successfully.

Etik Standartların Beyanı (*Declaration of Ethical Standards*)

Bu makalenin yazar(lar)ı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler. / The author(s) of this article declare that the materials and methods used in this study do not require ethical committee permission and/or legal-special permission.

Nötrosofik Parametreli Esnek Kümelerin Genelleştirilmesi ve Uygulamaları

Araştırma Makalesi / Research Article

Orhan DALKILIÇ*

Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Mersin Üniversitesi, Türkiye

(Geliş/Received : 20.08.2020 ; Kabul/Accepted : 15.01.2021 ; Erken Görünüm/Early View : 20.01.2021)

ÖZ

Bu çalışma özellikle bilim ve mühendislik alanlarında karşılaşılabilen belirsizlik problemlerinin uygulama alanını genişletebilmek için iki önemli teori olan nötrosofi ve esnek kümelere odaklanmaktadır. Bunun için sanal nötrosofik parametreli esnek küme teorisi tanımlanarak önemli bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra, belirsizliğin ideal çözüme yaklaştırılmasında sanal nötrosofik parametreli esnek küme teorisinin nötrosofik parametreli esnek küme teorisinden daha başarılı olduğu bir algoritma yardımıyla gösterilerek benzeri problemlerin çözümü için sanal nötrosofik parametreli esnek kümelerin kullanılması önerilmiştir. Ayrıca çalışmadaki özel parametre kümeleri, belirsizlik problemlerinin çözümünde daha fazla alternatif çözüm yolunu mevcut kılmaktadır. Bu sayede birçok çözüm yolundan ideale en yakın olanı seçmeyi kolaylaştırmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Nötrosofik parametreli esnek küme, sanal nötrosofik parametreli esnek küme, karar verme.

Generalization of Neutrosophic Parametrized Soft Set Theory and Its Applications

ABSTRACT

This study focuses on two important theories, neutrosophy and soft sets, in order to expand the application area of uncertainty problems that can be encountered especially in the fields of science and engineering. For this purpose, the virtual neutrosophic parametrized soft set theory are defined and some important properties of the theory are given. Then, it is proposed to use virtual neutrosophic parametrized soft sets to solve similar problems by using an algorithm to show that virtual neutrosophic parametrized soft set theory is more successful than neutrosophic parametrized soft set theory in approximation of uncertainty to the ideal solution. In addition, in this study, specific parameter sets make more alternative solutions available for solving uncertainty problems. This makes it easier to choose the most ideal solution from many solutions.

Keywords: Neutrosophic parametrized soft set, virtual neutrosophic parametrized soft set, decision making.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Günümüze yaklaştıkça özellikle insan faktörünün daha çok hissedildiği mühendislik, eğitim, sağlık gibi sosyal alanlarda karşılaşılan belirsizlik problemlerinin en doğru şekilde nasıl ifade edilebileceği ve bu problemlerin ideale en yakın bir şekilde nasıl çözülebileceği üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların başlangıcı sayılabilecek olan fuzzy küme (FS) teorisi 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya konulmuştur [1]. Zadeh ile başlayan bu süreç ilerleyen yıllarda daha da geliştirilerek yeni tip küme modelleri önerilmeye başlanmıştır. Bunlardan bir tanesi 1982 yılında Pawlak tarafından önerilen kaba küme teorisidir [2]. Ancak her iki küme teorisinin de belirsizlik problemlerine uygulanması zor bir süreçti. Bu zorluğun bir parametreleme aracının eksikliğinden kaynaklandığını düşünen Molodtsov 1999 yılında esnek küme teorisini literatüre kazandırmıştır [4]. Molodtsov'un literatüre kazandırdığı bu küme modeli belirsizlikle başa çıkmak için yeterince güçlüdür. Bu yüzden birçok araştırmacının ilgisini çekmeyi başarmasıyla bu küme teorisinin ilginç sonuçları bulanık esnek küme (FSS) [3], bulanık parametreli esnek küme (FPSS) [5], sanal bulanık parametreli esnek küme (VFPSS) [6], nötrosofik parametreli esnek küme (NPSS) [8], bulanık parametreli bulanık esnek küme (FPFSS) [9] gibi küme tiplerinin modellenmesine katkıda bulunmuş ve bu sayede belirsizliğin ideale en yakın sonuçlarına ulaşmamız konusunda bize yardımcı olmuştur. Ancak, önerilen küme teorilerinin hibrit modellemeleri belirsizliğin ifade edilmesinde daha başarılı sonuçlar verdiği için, günümüzde araştırmacılar özellikle hibrit modeller üzerinde çalışıyorlar [20-21]. Açıktır ki; mevcut küme teorilerini kullanarak, hibrit kümelerin oluşturulması belirsizlik problemlerinde elde edilen başarılı sonuçları belirli bir düzeye sınırlayabilir. Bu durumda belirsizliği en iyi şekilde ifade edebilmek için daha güçlü bir teoriye ihtiyaç vardı. Sorunların üstesinden gelmek için Smarandache, "tarafsızlıkların kaynağı, doğası ve kapsamı ile farklı düşünce spektrumları ile etkileşimleri" ile ilgilenen nötrosofi olarak adlandırılan güçlü bir matematiksel model ortaya koymuştur [12]. Nötrosofi fikrinin, belirli bir doğruluk derecesiyle birlikte, her kavramın bir dereceye kadar yanlışlık ve belirsizlik içerdiğini belirten temel bir kavramı vardır [12]. Bu doğrultuda geliştirilen nötrosofik

**Sorumlu Yazar (Corresponding Author)*
e-posta : orhandlk952495@hotmail.com

küme (NS) [7]; FS [1], aralık-değerli bulanık küme (IVFS) [13-15], sezgisel bulanık küme (IFS) [16-17], aralık değerli sezgisel bulanık küme (IVSFS) [18] gibi küme modellemelerinden daha iyi bir şekilde belirsizlik durumlarını ifade eder. Bir başka değişle NS mevcut fikirleri genelleştirir.Tüm bu avantajlar, NS'lerin felsefi bir bakış açısına sahip olmasındandır. Ancak bu bakış açısı özellikle bilim ve mühendislik alanlarındaki uygulamalar için bir dezavantajdır. Bu dezavantajın üstesinden gelmek için Wang vd. [19] tek değerli nötrofik küme (SVNS) teorisini önerdi. Günümüzde NS ve SS teorilerinin birleştirilerek sunulması ile belirsizlik problemlerinin çözümüne yönelik faklı algoritmaların gelişimine olanak sağlanmış oldu. Bunun bir örneği nötrosofik parametreli esnek kümeler (NPSS) dir [8]. Bu kümeler FPSS'lerin ve sezgisel bulanık parametreli esnek küme (IFPSS) [11]'lerin bir genellemesi olduğundan karar verme sürecini ifade etmede oldukça başarılı olduğunu söyleyebiliriz. Son zamanlarda belirsizliği ifade etmek için kullanılan bu küme modellerinin özellikle son yıllarda birçok araştırmacı tarafından daha çok tercih edilebilir olduğu gözlemlenmektedir [22-27].

Bu çalışmanın temel amacı NPSS modelinin genelleştirilerek sanal nötrosofik parametreli esnek küme (VNPSS ya da VNP-esnek küme) teorisinin literatüre kazandırılmasıdır. VNP-esnek küme teorisinin NPSS teorisinden en önemli farkı alt ve üst sanal parametre kümelerinin eklenerek karar vericinin daha esnek bir şekilde nötrosofik değerleri ifade edebilmesi sağlanmıştır. Bu sayede belirsizlik ortamlarında karşılaşılabilen karar evrme problemlerinin ideale en yakın şekilde ifade edilebilmesi ve bu sayede elde edilen sonuçların karar vericiden daha bağımsız bir şekilde ifade edilebilmesi sağlanmıştır. Bu çok önemli bir avantaj sağlamkatadır, çünkü karar vericinin ifade edeceği nötrosofik değerlerin hatalı olma ihtimalini minimalize etmemizi kolaylaştırmaktadır. Kısacası önerdiğimiz küme teorisinin literatüre katkısı aşağıdaki gibidir:

- İfade edilen nötrosofik değerin karar vericiye odaklanılması ciddi bir problemdir. Çünkü bu değerler $[0,1]$ aralığında olduğundan karar vericinin bu aralıkta bir değeri doğru bir şekilde belirleyebilmesi zor bir iştir. Bu nedenle önerdiğimiz matematiksel yaklaşımda ifade edilen alt ve üst yaklaşımların kullanılması sayesinde bu problemin önemli ölçüde minimalize edilebilmesi sağlanmıştır.
- Birden fazla alt ve birden fazla üst sanal yaklaşım yerine ortalama olarak düşünülebilecek bir alt ve bir üst sanal yaklaşımın daha faydalı olabileceği düşünülmüştür. Ayrıca böyle bir durum karar vericiden daha fazla değer alınması gerektiği anlamına gelir ki, bu istemediğimiz bir beklentidir.
- Bu küme teorisinin en önemli katkılarından biri de, karar vericinin ifade ettiği değerlerin belirsizlik ortamındaki karar verme sürecine katkısını minimalize etmesidir. Yani karar verici kaynaklı hataları bu matematiksel yaklaşım sayesinde indirgemiş oluyoruz.

Çalışma geri kalanı şu şekilde yapılandırılmıştır. Bölüm 2'de çalışmanın daha iyi anlaşılması için yararlanılan SS, NS ve NPSS modellemeleri için gerekli hatırlatmalar yapılmıştır. Bölüm 3'te VNPSS teorisi tanımlanmıştır ve bazı küme işlemleri ve özellikleri verilmiştir. Bölüm 4'te ise bir VNPSS toplama operatörü tanımlayarak VNPSS için bir karar verme algoritması verilmiştir ve bir belirsizlik problemi üzerinden elde edilen sonuçlar NPSS ve VNPSS için detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Bölüm 5 çalışmanın sonuç kısmını oluşturmuştur.

Bu çalışma boyunca U bir başlangıç evreni ve P, U evrenine göre olası tüm parametrelerin kümesi olarak ifade edilecektir. Genellikle parametreler; çeşitli karakteristikler ya da U evrenindeki nesnelerin özellikleridir.

2. MATERYAL VE METOD (MATERIAL and METHOD)

Bu bölümde bir belirsizlik problemini en doğru şekilde ifade edebilmek ve bu sayede en ideale yakın sonucun elde edilebilmesi için önerilen bazı küme teorileri üzerine hatırlatmalar yapılmıştır. Daha detaylı bir şekilde bilgi edinmek için [4], [7-8] çalışmaları incelenebilir.

İlk olarak Molodtsov tarafından önerilen SS teorisi aşağıdaki şekilde verilmiştir,

Tanım 2.1: 2^U, U'nun kuvvet kümesini göstersin ve A, P'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $F: A \to 2^U$ bir dönüşüm olmak üzere $G = (F, A)$ ikilisine U üzerinde bir SS denir (Molodtsov, 1999).

Şimdi, günlük hayatımızda karşılaşabileceğimiz tüm belirsizlik sorunlarını eksiksiz ve doğru bir şekilde ifade edebilmek için önerilen NS teorisini hatırlayalım. NS, doğası gereği hem belirsiz hem de tutarsız olan gerçek hayat bilgisini yönetmek için gereklidir. Bu nedenle, araştırmacılar NS'yi önermektedir.

NS'ler değerlerini standart olmayan birim aralığı $]0^-, 1^+[$'dan almaktadır. Standart olmayan sonlu sayılar $0^- = 0 - \delta$ ve $1^+ = 1 + \delta$ dır ve burada "1" ve "0" standart kısım, δ ise standart olmayan kısımdır. Şimdi NS'lerin tanımını hatırlayalım,

Tanım 2.2: U boştan farklı bir küme olsun. U üzerinde bir X NS'si

$$X = \{\langle u, \mu_X(u), \vartheta_X(u), \omega_X(u) \rangle, u \in U\} \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada her $u \in U$ için $0^- \leq \mu_X(u) + \vartheta_X(u) + \omega_X(u) \leq 3^+$ şartını sağlayan $\mu_X: U \to]0^-, 1^+[$, $\vartheta_X U \to]0^-, 1^+[$ ve $\omega_X U \to]0^-, 1^+[$ fonksiyonlarına sırasıyla üye olma, belirsizlik ve üye olmama derecelerini ifade eden fonksiyonlar denir (Smarandache, 2005).

Felsefi bakış açısından bir NS değerlerini $]0^-, 1^+[$'nın standart veya standart olmayan alt kümelerinden alır. Ancak daha çok bilimsel ve mühendislik alanlarında karşılaştığımız gerçek hayattaki uygulamalarda, NS'yi standart veya standart dışı $]0^-, 1^+[$ alt kümesinden gelen değerlerle kullanmak zordur. Bu nedenle, bu çalışma boyunca değerlerini [0,1]'in alt kümesinden alan NS'yi dikkate alacağız.

Şimdi NS'lerin bazı basit küme işlemlerini hatırlayalım (Smarandache, 2005),

$X = \{\langle u, \mu_X(u), \vartheta_X(u), \omega_X(u)\rangle, u \in U\}$ ve $Y = \{\langle u, \mu_Y(u), \vartheta_Y(u), \omega_Y(u)\rangle, u \in U\}$ iki NS olsun. O halde, her $u \in U$ için,

i. $X \subseteq Y$ ancak ve ancak $\mu_X(u) \le \mu_Y(u)$, $\vartheta_X(u) \ge \vartheta_Y(u)$, $\omega_X(u) \ge \omega_Y(u)$.

ii. $X = Y$ ancak ve ancak $\mu_X(u) = \mu_Y(u)$, $\vartheta_X(u) = \vartheta_Y(u)$, $\omega_X(u) = \omega_Y(u)$.

iii. X'in tümleyeni $X^c = \{\langle u, \omega_X(u), 1 - \vartheta_X(u), \mu_X(u)\rangle, u \in U\}$.

iv. $X \cap Y = \left\{ \begin{matrix} min\{\mu_X(u), \mu_Y(u)\}, \\ \langle u, max\{\vartheta_X(u), \vartheta_Y(u)\}, \rangle, u \in U \\ max\{\omega_X(u), \omega_Y(u)\} \end{matrix} \right\}.$

v. $X \cup Y = \left\{ \begin{matrix} max\{\mu_X(u), \mu_Y(u)\}, \\ \langle u, min\{\vartheta_X(u), \vartheta_Y(u)\}, \rangle, u \in U \\ min\{\omega_X(u), \omega_Y(u)\} \end{matrix} \right\}.$

Tanım 2.3: M, P parametre kümesi üzerinde bir NS olsun. U üzerinde bir Υ_M NPSS'si

$$\Upsilon_M = \{(\langle p, \mu_M(p), \vartheta_M(p), \omega_M(p)\rangle, f_M(p)) : p \in P\} \quad (2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu_M: P \to [0,1]$, $\vartheta_M P \to [0,1]$, ve $\omega_M P \to [0,1]$, sırasıyla Υ_M NPSS'nin üye olma, belirsizlik ve üye olmama derecelerini gösteren fonksiyonlarıdır. Ayrıca $f_M: P \to 2^U$ fonksiyonu yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır ve $\mu_M(p) = 0$, $\vartheta_M(p) = 1$, $\omega_M(p) = 1$ ise $f_M(p) = \emptyset$ dir (Broumi vd, 2014).

Çalışma boyunca, U üzerinde tanımlanabilecek tüm NPSS'lerin kümesi $NPSS(U)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.1: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel küme, $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ parametrelerin kümesi ve $M = \{\langle p_1, 0.3, 0.45, 0.2\rangle, \langle p_2, 0.55, 0.6, 0.3\rangle, \langle p_3, 0.4, 0.5, 0.1\rangle\}$, P üzerinde bir NS olsun. Bu durumda, yazılabilecek bir NPSS aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$\Upsilon_M = \left\{ \begin{matrix} (\langle p_1, 0.3, 0.45, 0.2\rangle, \{u_1, u_4, u_5\}), \\ (\langle p_2, 0.55, 0.6, 0.3\rangle, \{u_3, u_4\}), \\ (\langle p_3, 0.4, 0.5, 0.1\rangle, \{u_2, u_3, u_4\}) \end{matrix} \right\}$$

3. SANAL NEUTROSOPHIC PARAMETRELİ ESNEK KÜMELER (VIRTUAL NEUTROSOPHIC PARAMETRIZED ESNEK SETS)

Bu bölümde, NPSS'lerden daha genel olan VNPSS'ler tanımlanmıştır. Yeni tanımlanan küme teorisi için alt küme, birleşim, kesişim, tümleyen gibi işlemler ve bazı özellikler verilerek örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca bu küme teorisi için dikkat edilmesi gereken bazı noktalar vurgulanmıştır.

Tanım 3.1: M, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ üzerinde bir NS olsun. Bu durumda $1 \le i \le n$ değeri için her $0 \le \underline{\alpha_i} \le \mu_M(p_i)$, $0 \le \underline{\beta_i} \le 1 - \vartheta_M(p_i)$, $0 \le \underline{\gamma_i} \le 1 - \omega_M(p_i)$ değerlerine karşılık gelerek yazılabilecek parametre kümesine, bir alt sanal parametre kümesi denir ve

$$\underline{P} = \left\{\underline{p_1^{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}}, \underline{p_2^{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}}, \ldots, \underline{p_n^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_n}}\right\} \quad (3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\underline{p_i^{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i}}$ parametresi şu anlama gelmektedir: "p_i parametresinin α_i, β_i, γ_i sayılarınca OLUMSUZ YÖNDE GELİŞİM PARAMETRESİ". Ayrıca; $\underline{M}$'i, $\underline{P}$ üzerinde bir NS olarak alalım. Dikkat etmek gerekir ki, $\underline{f_M}: \underline{P} \to 2^U$ alt yaklaşım fonksiyonu için $\underline{f_M}\left(\underline{p_i^{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i}}\right)$ ifadesi, evren kümede karşılık gelebilecek nesnelerin kümesini değiştirebilir. Ayrıca $1 \le i \le n$ değeri için her $0 \le \overline{\alpha_i} \le 1 - \mu_M(p_i)$, $0 \le \overline{\beta_i} \le \vartheta_M(p_i)$, $0 \le \overline{\gamma_i} \le \omega_M(p_i)$ değerine karşılık gelerek yazılabilecek parametre kümesine bir üst sanal parametre kümesi denir ve

$$\overline{P} = \left\{\overline{p_1^{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}}, \overline{p_2^{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}}, \ldots, \overline{p_n^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_n}}\right\} \quad (4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\overline{p_i^{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i}}$ parametresi şu anlama gelmektedir: "p_i parametresinin α_i, β_i, γ_i sayılarınca OLUMLU YÖNDE GELİŞİM PARAMETRESİ". Ayrıca; $\overline{M}$'i, $\overline{E}$ üzerinde bir NS olarak alalım. Dikkat etmek gerekir ki, $\overline{f_M}: \overline{P} \to 2^U$ üst yaklaşım fonksiyonu için $\overline{f_M}\left(\overline{p_i^{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i}}\right)$ ifadesi, evren kümede karşılık gelebilecek nesnelerin kümesini değiştirebilir.

$$\underline{\varphi_M} = \left\{\left(\langle \underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}, \mu_M(p) - \underline{\alpha}, \vartheta_M(p) + \underline{\beta}, \omega_M(p) + \underline{\gamma}\rangle, \underline{f_M}\left(\underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right)\right) : p \in P, \underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}} \in \underline{P}, \underline{f_M}\left(\underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right) \in 2^U\right\} \quad (5)$$

$$\varphi_M = \{(\langle p, \mu_M(p), \vartheta_M(p), \omega_M(p)\rangle, f_M(p)) : p \in P, f_M(p) \in 2^U, \mu_M(p), \vartheta_M(p), \omega_M(p) \in [0,1]\} \quad (6)$$

$$\overline{\varphi_M} = \left\{\left(\langle \overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}, \mu_M(p) + \overline{\alpha}, \vartheta_M(p) - \overline{\beta}, \omega_M(p) - \overline{\gamma}\rangle, \overline{f_M}\left(\overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right)\right) : p \in P, \overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}} \in \overline{P}, \overline{f_M}\left(\overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right) \in 2^U\right\} \quad (7)$$

$$\psi_M = \underline{\varphi_M} \cup \varphi_M \cup \overline{\varphi_M} \quad (8)$$

Tanım 3.2: M, P üzerinde bir NS olsun. U evrensel kümesi üzerindeki bir ψ_M sanal neutrosophic parametreli esnek küme (VNPSS) şeklinde ifade edilir. Burada $\underline{f_M}: \underline{P} \to 2^U$, $f_M: P \to 2^U$, $\overline{f_M}: \overline{P} \to 2^U$ fonksiyonlarına sırasıyla alt yaklaşım fonksiyonu, yaklaşım fonksiyonu, üst yaklaşım fonksiyonu denir. $\mu_M, \vartheta_M, \omega_M: P \to [0,1]$, fonksiyonları ise sırasıyla VNPSS'sinin üye olma, belirsizlik ve üye olmama fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada $\mu_M(p) = 0$, $\vartheta_M(p) = 1$, $\omega_M(p) = 1$ ise $f_M(p) = \emptyset$ dir. Benzer şekilde $\mu_M(p) - \underline{\alpha} = 0$, $\vartheta_M(p) + \underline{\beta} = 1$, $\omega_M(p) + \underline{\gamma} = 1$ ise $\underline{f_M}\left(\underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right) = \emptyset$ ve $\mu_M(p) + \overline{\alpha} = 0$, $\vartheta_M(p) - \overline{\beta} = 1$, $\omega_M(p) - \overline{\gamma} = 1$ ise $\overline{f_M}\left(\overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right) = \emptyset$ dir.

Ayrıca ifade edilen $\underline{\varphi_M}$, φ_M ve $\overline{\varphi_M}$ bir NPSS olduğuna dikkat edilmelidir. Buradan ψ_M VNPSS'sinin NPSS'den daha genel bir matematiksel model olduğu açıktır.

Dahası, $\psi_M\, VNPSS$'sinin kısa gösterimi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$\psi_M = \left\{ \begin{matrix} \left(\langle \underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}, \mu_M(p) - \underline{\alpha}, \vartheta_M(p) + \underline{\beta}, \omega_M(p) + \underline{\gamma} \rangle, \underline{f_M}\left(\underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right)\right) \cup \\ \left(\langle p, \mu_M(p), \vartheta_M(p), \omega_M(p) \rangle, f_M(p)\right) \cup \\ \left(\langle \overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}, \mu_M(p) + \overline{\alpha}, \vartheta_M(p) - \overline{\beta}, \omega_M(p) - \overline{\gamma} \rangle, \overline{f_M}\left(\overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right)\right) \end{matrix} : \begin{matrix} \underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}} \in \underline{P} \\ p \in P \\ \overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}} \in \overline{P} \end{matrix} \right\}$$

Çalışma boyunca, U üzerinde tanımlanabilecek tüm VNPSS'lerin kümesi $VNPSS(U)$ ile gösterilecektir.

Uyarı 3.1: Tanım 3.2'den de anlaşılacağı üzere her NPSS için çok sayıda VNPSS'nin varlığından bahsedilebilir. Ancak bir VNPSS'de yazılabilecek olan her parametre kümesi için bir tane NPSS tanımlanır.

Özellik 3.1: $\psi_M \in VNPSS(U)$ olsun. Her $\underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}} \in \underline{P}, p \in P, \overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}} \in \overline{P}$ ve her belirlenen $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ ve $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ değerleri için $s\left(\overline{f_M}\left(\overline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right)\right) \le s(f_M(p)) \le s\left(\underline{f_M}\left(\underline{p^{\alpha,\beta,\gamma}}\right)\right)$ kapsaması doğrudur.

İspat. $\mu_M, \vartheta_M, \omega_M: P \to [0,1]$, fonksiyonları sırasıyla bir parametrenin üyeliğini, belirsizliğini, üye olmama derecesini bize bildiriyordu. Eğer bir parametrenin üyelik derecesini azaltırsak (bununla birlikte belirsizlik ve üye olmama derecesini arttırırsak ya da sabit bırakırsak) yaklaşım fonksiyonu vasıtasıyla U evreninde bu parametreye karşılık gelebilecek nesne sayısında artış meydana geleceği ya da en kötü ihtimalle bu sayının değişmiyeceği Tanım 3.1 ve Tanım 3.2'den açıktır. Benzer şekilde bir parametrenin üyelik derecesini arttırmamız (bununla birlikte belirsizlik ve üye olmama derecesini azaltmamız ya da sabit bırakmamız) bu parametreye karşılık gelebilecek nesne sayısında azalma meydana geleceği ya da en kötü ihtimalle bu sayı değişmeyecektir.

Uyarı 3.2: Bir VFP-esnek kümede seçilen $\underline{\alpha^1}$, $\underline{\beta^1}$, $\underline{\gamma^1}$ ve $\underline{\alpha^2}$, $\underline{\beta^2}$, $\underline{\gamma^2}$ değerleri için $\underline{\alpha^1} \le \underline{\alpha^2}$, $\underline{\beta^1} \ge \underline{\beta^2}$, $\underline{\gamma^1} \ge \underline{\gamma^2}$ eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda $\mu_M(p) - \underline{\alpha_2} \le \mu_M(p) - \underline{\alpha_1}$, $\vartheta_M(p) + \underline{\beta^1} \le \vartheta_M(p) + \underline{\beta^2}$, $\omega_M(p) + \underline{\gamma^1} \le \omega_M(p) + \underline{\gamma^2}$ olacağından Özellik 3.1'den $s\left(\underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha^1,\beta^1,\gamma^1}}\right)\right) \subseteq s\left(\underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha^2,\beta^2,\gamma^2}}\right)\right)$ kapsaması gerçeklenir. Benzer şekilde seçilen $\overline{\alpha^1}, \overline{\beta^1}, \overline{\gamma^1}$ ve $\overline{\alpha^2}, \overline{\beta^2}, \overline{\gamma^2}$ değerleri için $\overline{\alpha^1} \le \overline{\alpha^2}$, $\overline{\beta^1} \ge \overline{\beta^2}$, $\overline{\gamma^1} \ge \overline{\gamma^2}$ eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda $\mu_M(p) + \overline{\alpha^1} \le \mu_M(p) + \overline{\alpha^2}$, $\vartheta_M(p) - \overline{\beta^1} \le \vartheta_M(p) - \overline{\beta^2}$, $\omega_M(p) - \overline{\gamma^1} \le \omega_M(p) - \overline{\gamma^2}$ olacağından Özellik 3.1'den $s\left(\underline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha^2,\beta^2,\gamma^2}}\right)\right) \le s\left(\underline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha^1,\beta^1,\gamma^1}}\right)\right)$ kapsaması gerçeklenir.

Örnek 3.1: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ evrensel küme, $P = \{p_1, p_2\}$ parametrelerin kümesi ve $M = \{\langle p_1, 0.25, 0.5, 0.3\rangle, \langle p_2, 0.55, 0.3, 0.2\rangle\}$, P üzerinde bir NS olsun. O halde sanal parametrelerimiz $\underline{P} = \left\{\underline{p_1^{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}}, \underline{p_2^{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}}\right\}$, $\overline{P} = \left\{\overline{p_1^{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}}, \overline{p_2^{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}}\right\}$ şeklindedir. Eğer

$$\underline{M} = \left\{ \begin{matrix} \langle \underline{p_1^{0.1,0.15,0.2}}, 0.15, 0.65, 0.5 \rangle, \\ \langle \underline{p_2^{0.3,0.2,0.4}}, 0.25, 0.5, 0.6 \rangle \end{matrix} \right\}$$

$$\overline{M} = \left\{ \begin{matrix} \langle \overline{p_1^{0.5,0.2,0.1}}, 0.75, 0.3, 0.2 \rangle, \\ \langle \overline{p_2^{0.25,0.05,0.1}}, 0.8, 0.25, 0.1 \rangle \end{matrix} \right\}$$

sırasıyla $\underline{P}$, $\overline{P}$ üzerinde bir NS ve yaklaşım fonksiyonları da

$$\underline{f_M}\left(\underline{p_1^{0.1,0.15,0.2}}\right) = \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_7, u_8\},$$
$$\underline{f_M}\left(\underline{p_2^{0.3,0.2,0.4}}\right) = \{u_2, u_3, u_5, u_6, u_7\},$$
$$f_M(p_1) = \{u_1, u_4, u_5, u_8\},$$
$$f_M(p_2) = \{u_2, u_3, u_6, u_7\},$$
$$\overline{f_M}\left(\overline{p_1^{0.5,0.2,0.1}}\right) = \{u_4, u_5, u_8\},$$
$$\overline{f_M}\left(\overline{p_2^{0.25,0.05,0.1}}\right) = \{u_2, u_3, u_7\}$$

şeklinde verilir ise ψ_M VNPSS'si aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$\psi_M=\left\{\begin{array}{c}\left(\langle p_1^{\underline{0.1,0.15,0.2}},0.15,0.65,0.5\rangle,\{u_1,u_2,u_4,u_5,u_7,u_8\}\right),\left(\langle p_2^{\underline{0.3,0.2,0.4}},0.25,0.5,0.6\rangle,\{u_2,u_3,u_5,u_6,u_7\}\right),\\ (\langle p_1,0.25,0.5,0.3\rangle,\{u_1,u_4,u_5,u_8\}),(\langle p_2,0.55,0.3,0.2\rangle,\{u_2,u_3,u_6,u_7\}),\\ \left(\langle p_1^{\overline{0.5,0.2,0.1}},0.75,0.3,0.2\rangle,\{u_4,u_5,u_8\}\right),\left(\langle p_2^{\overline{0.25,0.05,0.1}},0.8,0.25,0.1\rangle,\{u_2,u_3,u_7\}\right)\end{array}\right\}$$

Burada dikkat edilecek olursa örneğin, p_2 parametresi için $\underline{\alpha_2},\underline{\beta_2},\underline{\gamma_2}$ değerleri $0\le\underline{\alpha_2}=0.3\le 0.55$, $0\le\underline{\beta_2}=0.2\le 1-0.3$, $0\le\underline{\gamma_2}=0.4\le 1-0.2$ aralıklarında ve $\overline{\alpha_2}$, $\overline{\beta_2}$, $\overline{\gamma_2}$ değerleri $0\le\overline{\alpha_2}=0.25\le 1-0.55$, $0\le\overline{\beta_2},=0.05\le 0.3$, $0\le\overline{\gamma_2}=0.1\le 0.2$ aralıklarında seçilmiştir. Ayrıca ψ_M VNPSS'sinin kapsadığı üç tane NPSS aşağıdaki şekildedir,

$$\underline{\varphi_M}=\left\{\left(\langle p_1^{\underline{0.1,0.15,0.2}},0.15,0.65,0.5\rangle,\{u_1,u_2,u_4,u_5,u_7,u_8\}\right),\left(\langle p_2^{\underline{0.3,0.2,0.4}},0.25,0.5,0.6\rangle,\{u_2,u_3,u_5,u_6,u_7\}\right)\right\},$$
$$\varphi_M=\{(\langle p_1,0.25,0.5,0.3\rangle,\{u_1,u_4,u_5,u_8\}),(\langle p_2,0.55,0.3,0.2\rangle,\{u_2,u_3,u_6,u_7\})\},$$
$$\overline{\varphi_M}=\left\{\left(\langle p_1^{\overline{0.5,0.2,0.1}},0.75,0.3,0.2\rangle,\{u_4,u_5,u_8\}\right),\left(\langle p_2^{\overline{0.25,0.05,0.1}},0.8,0.25,0.1\rangle,\{u_2,u_3,u_7\}\right)\right\}$$

Tanım 3.3: $\psi_M\in VNPSS(U)$ olsun.

i. Her $p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\underline{P}$, $p\in P$, $p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\overline{P}$ için $\underline{f_M}(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}})=f_M(p)=\overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)=\emptyset$, $\mu_M(p)=0$, $\overline{\alpha}=\underline{\alpha}=\overline{\beta}=\underline{\beta}=\overline{\gamma}=\underline{\gamma}=0$, $\vartheta_M(p)=\omega_M(p)=1$ ise ψ_M, M-boş VNPSS olarak adlandırılır ve $\psi_{\emptyset_M}$ ile gösterilir. Eğer $M=\emptyset$ ise ψ_M, boş VNPSS olarak adlandırılır ve $\psi_\emptyset$ ile gösterilir.

ii. Her $p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\underline{P}$, $p\in P$, $p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\overline{P}$ için $\underline{f_M}(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}})=f_M(p)=\overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)=U$, $\mu_M(p)=1$, $\overline{\alpha}=\underline{\alpha}=\overline{\beta}=\underline{\beta}=\overline{\gamma}=\underline{\gamma}=0$, $\vartheta_M(p)=\omega_M(p)=0$ ise ψ_M, M-evrensel VNPSS olarak adlandırılır ve $\psi_{\widetilde{M}}$ ile gösterilir. Eğer $M=P$ ise ψ_M, evrensel VNPSS olarak adlandırılır ve $\psi_{\tilde{P}}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4: $\psi_M,\psi_N\in VNPSS(U)$ olsun. O halde,

i) Her $p\in P, p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\underline{P}$ için $\mu_M(p)-\underline{\alpha^M}\le\mu_N(p)-\underline{\alpha^N}$, $\vartheta_M(p)+\underline{\beta^M}\ge\vartheta_N(p)+\underline{\beta^N}$, $\omega_M(p)+\underline{\gamma^M}\ge\omega_N(p)+\underline{\gamma^N}$ ve $\underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha^M,\beta^M,\gamma^M}}\right)\subseteq\underline{f_N}\left(p^{\underline{\alpha^N,\beta^N,\gamma^N}}\right)$,

ii) Her $p\in P$ için $\mu_M(p)\le\mu_N(p)$, $\vartheta_M(p)\ge\vartheta_N(p)$, $\omega_M(p)\ge\omega_N(p)$ ve $f_M(p)\subseteq f_N(p)$,

iii) Her $p\in P, p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\overline{P}$ için $\mu_M(p)+\underline{\alpha^M}\le\mu_N(p)+\underline{\alpha^N}$, $\vartheta_M(p)-\underline{\beta^M}\ge\vartheta_N(p)-\underline{\beta^N}$, $\omega_M(p)-\underline{\gamma^M}\ge\omega_N(p)-\underline{\gamma^N}$ ve $\overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha^M,\beta^M,\gamma^M}}\right)\subseteq\overline{f_N}\left(p^{\overline{\alpha^N,\beta^N,\gamma^N}}\right)$

şartlarının sağlanması durumunda ψ_M, ψ_N'nin VNP-esnek alt kümesidir ve $\psi_M\,\widehat{\subseteq}\,\psi_N$ ile gösterilir. Ayrıca her $p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\underline{P}$, $p\in P$, $p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\overline{P}$ için $\psi_M\,\widehat{\subseteq}\,\psi_N$ ve $\psi_N\,\widehat{\subseteq}\,\psi_M$ gerçekleniyorsa $\psi_M=\psi_N$ dir.

Örnek 3.2: $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}$ evrensel küme, $P=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ parametrelerin kümesi ve $M=\{\langle p_1,0.46,0.34,0.25\rangle,\langle p_3,0.65,0.42,0.5\rangle\}$, $N=\{\langle p_1,0.55,0.3,0.2\rangle,\langle p_3,0.7,0.4,0.35\rangle\}$ P üzerinde iki NS olsun. Bu durumda

$$\underline{M}=\left\{\begin{array}{c}\langle p_1^{\underline{0.16,0.06,0.1}},0.3,0.4,0.35\rangle,\\ \langle p_3^{\underline{0.15,0.13,0.15}},0.5,0.55,0.65\rangle\end{array}\right\},$$
$$\overline{M}=\left\{\begin{array}{c}\langle p_1^{\overline{0.14,0.04,0.1}},0.6,0.3,0.15\rangle,\\ \langle p_3^{\overline{0.1,0.22,0.2}},0.75,0.2,0.3\rangle\end{array}\right\}$$

$\underline{P}$ üzerinde ve

$$\underline{N}=\left\{\begin{array}{c}\langle p_1^{\underline{0.15,0.05,0.1}},0.4,0.35,0.3\rangle,\\ \langle p_3^{\underline{0.1,0.1,0.15}},0.6,0.5,0.5\rangle\end{array}\right\},$$
$$\overline{N}=\left\{\begin{array}{c}\langle p_1^{\overline{0.15,0.05,0.1}},0.7,0.25,0.1\rangle,\\ \langle p_3^{\overline{0.16,0.25,0.1}},0.86,0.15,0.25\rangle\end{array}\right\}$$

$\overline{P}$ üzerinde iki NS olmak üzere

$$\psi_M=\left\{\begin{array}{c}\left(\langle p_1^{\underline{0.16,0.06,0.1}},0.3,0.4,0.35\rangle,\{u_2,u_3,u_4,u_6,u_7\}\right),\left(\langle p_3^{\underline{0.15,0.13,0.15}},0.5,0.55,0.65\rangle,\{u_1,u_2,u_3,u_5,u_7\}\right),\\ (\langle p_1,0.46,0.34,0.25\rangle,\{u_2,u_3,u_6,u_7\}),(\langle p_3,0.65,0.42,0.5\rangle,\{u_1,u_3,u_5,u_7\}),\\ \left(\langle p_1^{\overline{0.14,0.04,0.1}},0.6,0.3,0.15\rangle,\{u_3,u_6,u_7\}\right),\left(\langle p_3^{\overline{0.1,0.22,0.2}},0.75,0.2,0.3\rangle,\{u_1,u_5,u_7\}\right)\end{array}\right\}$$

$$\psi_N=\left\{\begin{array}{c}\left(\langle p_1^{\underline{0.15,0.05,0.1}},0.4,0.35,0.3\rangle,\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_6,u_7\}\right),\left(\langle p_3^{\underline{0.1,0.1,0.15}},0.6,0.5,0.5\rangle,\{u_1,u_2,u_3,u_5,u_7\}\right),\\ (\langle p_1,0.55,0.3,0.2\rangle,\{u_2,u_3,u_4,u_6,u_7\}),(\langle p_3,0.7,0.4,0.35\rangle,\{u_1,u_2,u_3,u_5,u_7\}),\\ \left(\langle p_1^{\overline{0.15,0.05,0.1}},0.7,0.25,0.1\rangle,\{u_3,u_4,u_6,u_7\}\right),\left(\langle p_3^{\overline{0.16,0.25,0.1}},0.86,0.15,0.25\rangle,\{u_1,u_3,u_5,u_7\}\right)\end{array}\right\}$$

şeklinde ifade edilen ψ_M ve ψ_N VNPSS'leri için $\psi_M\,\widehat{\subseteq}\,\psi_N$ kapsaması gerçeklenir.

Özellik 3.2: $\psi_M,\psi_L,\psi_N\in VNPSS(U)$ olsun. O halde,

i. $\psi_\emptyset\,\widehat{\subseteq}\,\psi_M\,\widehat{\subseteq}\,\psi_M\,\widehat{\subseteq}\,\psi_{\tilde{P}}$.

ii. $\psi_M\,\widehat{\subseteq}\,\psi_L$ and $\psi_L\,\widehat{\subseteq}\,\psi_M\Leftrightarrow\psi_M=\psi_M$.

iii. $\psi_M \widehat{\sqsubseteq} \psi_L$ and $\psi_L \widehat{\sqsubseteq} \psi_N \Rightarrow \psi_M \widehat{\sqsubseteq} \psi_N$.

İspat. Tanım 3.4 ve Tanım 3.5'ten açıktır.

Tanım 3.5: $\psi_M \in VNPSS(U)$ olsun. ψ_M VNPSS'sinin tümleyeni ψ_M^c ile gösterilen VNPSS'si olup aşağıdaki şekilde tanımlanır,

Tanım 3.7: $\psi_M, \psi_N \in VNPSS(U)$ olsun. O halde ψ_M, ψ_N VNPSS'lerinin kesişimi

i) $p \in P$, $p^{\underline{\alpha^{M\cap N},\beta^{M\cap N},\gamma^{M\cap N}}} \in \underline{P}$ için $\mu_{M\cap N}(p) - \underline{\alpha^{M\cap N}} = min\{\mu_M(p) - \underline{\alpha^M}, \mu_N(p) - \underline{\alpha^N}\}$, $\vartheta_{M\cap N}(p) + \underline{\beta^{M\cap N}} =$

$$\psi_M^c = \left\{\begin{matrix} \left(\langle p^{\underline{\gamma,\beta,\alpha}}, \omega_M(p) + \underline{\gamma}, 1 - \left(\vartheta_M(p) + \underline{\beta}\right), \mu_M(p) - \underline{\alpha}\rangle, \underline{f_{M^c}}\left(p^{\underline{\gamma,\beta,\alpha}}\right)\right) \cup \\ \left(\langle p, \omega_M(p), 1 - \vartheta_M(p), \mu_M(p)\rangle, f_{M^c}(p)\right) \cup \\ \left(\langle p^{\overline{\gamma,\beta,\alpha}}, \omega_M(p) - \overline{\gamma}, 1 - \left(\vartheta_M(p) - \overline{\beta}\right), \mu_M(p) + \overline{\alpha}\rangle, \overline{f_{M^c}}\left(p^{\overline{\gamma,\beta,\alpha}}\right)\right) \end{matrix} : \begin{matrix} p^{\underline{\gamma,\beta,\alpha}} \in \underline{P} \\ p \in P \\ p^{\overline{\gamma,\beta,\alpha}} \in \overline{P} \end{matrix}\right\}$$

Burada $\underline{f_{M^c}}\left(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\right) = U \setminus \underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)$, $f_{M^c}(p) = U \setminus f_M(p)$ ve $\overline{f_{M^c}}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right) = U \setminus \overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)$ dir.

Örnek 3.3: Örnek 3.1'de verilen ψ_M VNPSS'sinin tümleyeni,

$max\left\{\vartheta_M(p) + \underline{\beta^M}, \vartheta_N(p) + \underline{\beta^N}\right\}$, $\omega_{M\cap N}(p) + \underline{\gamma^{M\cap N}} = max\left\{\omega_M(p) + \underline{\gamma^M}, \omega_N(p) + \underline{\gamma^N}\right\}$ ve $\underline{f_{M\cap N}}\left(p^{\underline{\alpha^{M\cap N},\beta^{M\cap N},\gamma^{M\cap N}}}\right) = \underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha^M,\beta^M,\gamma^M}}\right) \cap \underline{f_N}\left(p^{\underline{\alpha^N,\beta^N,\gamma^N}}\right)$ fonksiyonları,

$$\psi_M^c = \left\{\begin{matrix} \left(\langle p_1^{\underline{0.2,0.15,0.1}}, 0.5,0.35,0.15\rangle, \{u_3, u_6\}\right), \left(\langle p_2^{\underline{0.4,0.2,0.3}}, 0.6,0.5,0.25\rangle, \{u_1, u_4, u_8\}\right), \\ \left(\langle p_1, 0.3,0.5,0.25\rangle, \{u_3, u_6, u_7\}\right), \left(\langle p_2, 0.2,0.7,0.55\rangle, \{u_1, u_4, u_5, u_8\}\right), \\ \left(\langle p_1^{\overline{0.1,0.2,0.5}}, 0.2,0.7,0.75\rangle, \{u_1, u_2, u_3, u_6, u_7\}\right), \left(\langle p_2^{\overline{0.1,0.05,0.25}}, 0.1,0.75,0.8\rangle, \{u_1, u_4, u_5, u_6, u_7\}\right) \end{matrix}\right\}$$

Özellik 3.3: $\psi_M, \psi_L, \psi_N \in VNPSS(U)$ olsun. O halde,

i. $\psi_{\emptyset}^c = \psi_{\tilde{P}}$.

ii. $\psi_{\tilde{P}}^c = \psi_{\emptyset}$.

iii. $(\psi_M^c)^c = \psi_M$.

İspat. Açıktır.

Tanım 3.6: $\psi_M, \psi_N \in VNPSS(U)$ olsun. O halde ψ_M, ψ_N VNPSS'lerinin birleşimi

i) $p \in P$, $p^{\underline{\alpha^{M\cup N},\beta^{M\cup N},\gamma^{M\cup N}}} \in \underline{P}$ için $\mu_{M\cup N}(p) - \underline{\alpha^{M\cup N}} = max\{\mu_M(p) - \underline{\alpha^M}, \mu_N(p) - \underline{\alpha^N}\}$, $\vartheta_{M\cup N}(p) + \underline{\beta^{M\cup N}} = min\left\{\vartheta_M(p) + \underline{\beta^M}, \vartheta_N(p) + \underline{\beta^N}\right\}$, $\omega_{M\cup N}(p) + \underline{\gamma^{M\cup N}} = min\left\{\omega_M(p) + \underline{\gamma^M}, \omega_N(p) + \underline{\gamma^N}\right\}$ ve $\underline{f_{M\cup N}}\left(p^{\underline{\alpha^{M\cup N},\beta^{M\cup N},\gamma^{M\cup N}}}\right) = \underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha^M,\beta^M,\gamma^M}}\right) \cup \underline{f_N}\left(p^{\underline{\alpha^N,\beta^N,\gamma^N}}\right)$ fonksiyonları,

ii) $p \in P$ için $\mu_{M\cup N}(p) = max\{\mu_M(p), \mu_N(p)\}$, $\vartheta_{M\cup N}(p) = min\{\vartheta_M(p), \vartheta_N(p)\}$, $\omega_{M\cup N}(p) = min\{\omega_M(p), \omega_N(p)\}$ ve $f_{M\cup N}(p) = f_M(p) \cup f_N(p)$ fonksiyonları,

iii) $p \in P$, $p^{\overline{\alpha^{M\cup N},\beta^{M\cup N},\gamma^{M\cup N}}} \in \overline{P}$ için $\mu_{M\cup N}(p) + \overline{\alpha^{M\cup N}} = max\left\{\mu_M(p) + \overline{\alpha^M}, \mu_N(p) + \overline{\alpha^N}\right\}$, $\vartheta_{M\cup N}(p) - \overline{\beta^{M\cup N}} = min\left\{\vartheta_M(p) - \overline{\beta^M}, \vartheta_N(p) - \overline{\beta^N}\right\}$, $\omega_{M\cup N}(p) - \overline{\gamma^{M\cup N}} = min\left\{\omega_M(p) - \overline{\gamma^M}, \omega_N(p) - \overline{\gamma^N}\right\}$ ve $\overline{f_{M\cup N}}\left(p^{\overline{\alpha^{M\cup N},\beta^{M\cup N},\gamma^{M\cup N}}}\right) = \overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha^M,\beta^M,\gamma^M}}\right) \cup \overline{f_N}\left(p^{\overline{\alpha^N,\beta^N,\gamma^N}}\right)$ fonksiyonları,

yardımıyla elde edilir ve $\psi_M \widehat{\sqcup} \psi_N$ şeklinde gösterilir.

ii) $p \in P$ için $\mu_{M\cap N}(p) = min\{\mu_M(p), \mu_N(p)\}$, $\vartheta_{M\cap N}(p) = max\{\vartheta_M(p), \vartheta_N(p)\}$, $\omega_{M\cap N}(p) = max\{\omega_M(p), \omega_N(p)\}$ ve $f_{M\cap N}(p) = f_M(p) \cap f_N(p)$ fonksiyonları,

iii) $p \in P$, $p^{\overline{\alpha^{M\cap N},\beta^{M\cap N},\gamma^{M\cap N}}} \in \overline{P}$ için $\mu_{M\cap N}(p) + \overline{\alpha^{M\cap N}} = max\left\{\mu_M(p) + \overline{\alpha^M}, \mu_N(p) + \overline{\alpha^N}\right\}$, $\vartheta_{M\cap N}(p) - \overline{\beta^{M\cap N}} = min\left\{\vartheta_M(p) - \overline{\beta^M}, \vartheta_N(p) - \overline{\beta^N}\right\}$, $\omega_{M\cap N}(p) - \overline{\gamma^{M\cap N}} = min\left\{\omega_M(p) - \overline{\gamma^M}, \omega_N(p) - \overline{\gamma^N}\right\}$ ve $\overline{f_{M\cap N}}\left(p^{\overline{\alpha^{M\cap N},\beta^{M\cap N},\gamma^{M\cap N}}}\right) = \overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha^M,\beta^M,\gamma^M}}\right) \cap \overline{f_N}\left(p^{\overline{\alpha^N,\beta^N,\gamma^N}}\right)$ fonksiyonları,

yardımıyla elde edilir ve $\psi_M \widehat{\sqcap} \psi_N$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.4: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ evrensel küme, $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ parametrelerin kümesi ve $M = \{\langle p_1, 0.32,0.44,0.26\rangle, \langle p_3, 0.55,0.4,0.6\rangle\}$, $N = \{\langle p_3, 0.65,0.25,0.46\rangle, \langle p_4, 0.75,0.32,0.2\rangle\}$ P üzerinde iki NS olsun. Bu durumda

$$\underline{M} = \left\{\begin{matrix} \langle p_1^{\underline{0.12,0.11,0.09}}, 0.2,0.55,0.35\rangle, \\ \langle p_3^{\underline{0.25,0.16,0.15}}, 0.3,0.56,0.75\rangle \end{matrix}\right\},$$

$$\overline{M} = \left\{\begin{matrix} \langle p_1^{\overline{0.48,0.14,0.06}}, 0.8,0.3,0.2\rangle, \\ \langle p_3^{\overline{0.15,0.15,0.2}}, 0.7,0.25,0.4\rangle \end{matrix}\right\}$$

$\underline{P}$ üzerinde ve

$$\underline{N} = \left\{\begin{matrix} \langle p_3^{\underline{0.2,0.15,0.1}}, 0.45,0.4,0.56\rangle, \\ \langle p_4^{\underline{0.35,0.23,0.25}}, 0.4,0.55,0.45\rangle \end{matrix}\right\},$$

$$\overline{N} = \left\{ \begin{matrix} \langle p_3^{\overline{0.15,0.12,0.05}}, 0.9,0.2,0.15 \rangle, \\ \langle p_4^{\overline{0.1,0.17,0.1}}, 0.85,0.15,0.1 \rangle \end{matrix} \right\}$$

$\overline{P}$ üzerinde iki NS olmak üzere

$$\psi_M = \left\{ \begin{matrix} \left(\langle p_1^{\underline{0.12,0.11,0.09}}, 0.2,0.55,0.35 \rangle, \{u_1, u_3, u_5, u_8, u_9\} \right), \left(\langle p_3^{\underline{0.25,0.16,0.15}}, 0.3,0.56,0.75 \rangle, \{u_2, u_4, u_6, u_7, u_9\} \right), \\ (\langle p_1, 0.32,0.44,0.26 \rangle, \{u_1, u_5, u_8, u_9\}), (\langle p_3, 0.55,0.4,0.6 \rangle, \{u_2, u_4, u_7, u_9\}), \\ \left(\langle p_1^{\overline{0.48,0.14,0.06}}, 0.8,0.3,0.2 \rangle, \{u_1, u_5, u_8\} \right), \left(\langle p_3^{\overline{0.15,0.15,0.2}}, 0.7,0.25,0.4 \rangle, \{u_4, u_7, u_9\} \right) \end{matrix} \right\}$$

$$\psi_N = \left\{ \begin{matrix} \left(\langle p_3^{\underline{0.2,0.15,0.1}}, 0.45,0.4,0.56 \rangle, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_7, u_8\} \right), \left(\langle p_4^{\underline{0.35,0.23,0.25}}, 0.4,0.55,0.45 \rangle, \{u_1, u_4, u_5, u_6, u_9\} \right), \\ (\langle p_3, 0.65,0.25,0.46 \rangle, \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_8\}), (\langle p_4, 0.75,0.32,0.2 \rangle, \{u_1, u_5, u_6, u_9\}), \\ \left(\langle p_3^{\overline{0.15,0.12,0.05}}, 0.9,0.2,0.15 \rangle, \{u_1, u_3, u_4, u_7\} \right), \left(\langle p_4^{\overline{0.1,0.17,0.1}}, 0.85,0.15,0.1 \rangle, \{u_5, u_6, u_9\} \right) \end{matrix} \right\}$$

şeklinde ifade edilen ψ_M ve ψ_N VNPSS'leri için $\psi_M \hat{\sqcap} \psi_N$ ve $\psi_M \hat{\sqcup} \psi_N$ aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\psi_M \hat{\sqcap} \psi_N = \left\{ \begin{matrix} \left(\langle p_3^{\underline{0.25,0.16,0.15}}, 0.3,0.56,0.75 \rangle, \{u_2, u_4, u_7\} \right) \\ (\langle p_3, 0.55,0.4,0.6 \rangle, \{u_4, u_7\}) \\ \left(\langle p_3^{\overline{0.15,0.15,0.2}}, 0.7,0.25,0.4 \rangle, \{u_4, u_7\} \right) \end{matrix} \right\}$$

$$\psi_M \hat{\sqcup} \psi_N = \left\{ \begin{matrix} \left(\langle p_1^{\underline{0.12,0.11,0.09}}, 0.2,0.55,0.35 \rangle, \{u_1, u_3, u_5, u_8, u_9\} \right), \\ \left(\langle p_3^{\underline{0.2,0.15,0.1}}, 0.45,0.4,0.56 \rangle, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9\} \right), \\ \left(\langle p_4^{\underline{0.35,0.23,0.25}}, 0.4,0.55,0.45 \rangle, \{u_1, u_4, u_5, u_6, u_9\} \right), \\ (\langle p_1, 0.32,0.44,0.26 \rangle, \{u_1, u_5, u_8, u_9\}), \\ (\langle p_3, 0.65,0.25,0.46 \rangle, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_7, u_8, u_9\}), \\ (\langle p_4, 0.75,0.32,0.2 \rangle, \{u_1, u_5, u_6, u_9\}), \\ \left(\langle p_1^{\overline{0.48,0.14,0.06}}, 0.8,0.3,0.2 \rangle, \{u_1, u_5, u_8\} \right), \\ \left(\langle p_3^{\overline{0.25,0.05,0.31}}, 0.9,0.2,0.15 \rangle, \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_9\} \right), \\ \left(\langle p_4^{\overline{0.1,0.17,0.1}}, 0.85,0.15,0.1 \rangle, \{u_5, u_6, u_9\} \right) \end{matrix} \right\}$$

Özellik 3.4: $\psi_M, \psi_L, \psi_N \in VNPSS(U)$ olsun. O halde, $\star, * \in \{\hat{\sqcap}, \hat{\sqcup}\}$ için

i. $\psi_M \hat{\sqcap} \psi_{\tilde{P}} = \psi_M$ ve $\psi_M \hat{\sqcup} \psi_{\tilde{P}} = \psi_{\tilde{P}}$.

ii. $\psi_M \hat{\sqcap} \psi_\emptyset = \psi_\emptyset$ ve $\psi_M \hat{\sqcup} \psi_\emptyset = \psi_M$.

iii. $\psi_M \star \psi_M = \psi_M$.

iv. $\psi_M \star \psi_L = \psi_L \star \psi_M$

v. $(\psi_M \star \psi_L) \star \psi_N = \psi_M \star (\psi_L \star \psi_N)$.

vi. $\psi_M * (\psi_L \star \psi_N) = (\psi_M * \psi_L) \star (\psi_M * \psi_N)$.

İspat. Açıktır.

Özellik 3.5: $\psi_M, \psi_L \in VNPSS(U)$ olsun. O halde,

i. $(\psi_M \hat{\sqcup} \psi_L)^c = \psi_M^c \hat{\sqcap} \psi_N^c$.

ii. $(\psi_M \hat{\sqcap} \psi_L)^c = \psi_M^c \hat{\sqcup} \psi_N^c$.

İspat. Açıktır.

4. KARAR VERME (DECISION MAKING)

Bu bölümde, bir belirsizlik probleminin çözümünde VNPSS'lerden nasıl yararlanılabileceği üzerine bir algoritma (Bu algortimanın tasarımında [9-11] çalışmalarından esinlenilmiştir.) önerilmiştir ve bir uygulama üzerinden elde edilen sonuçlar irdelenmiştir. Bunun yanı sıra VNPSS'lerin belirsizlik problemlerinin ifade edilmesine yönelik üç farklı yaklaşımı sayesinde alternatif çözümler üretebilmesi, karar verici grubun işini kolaylaştırdığı üzerinde durulmuştur. Ayrıca belirsizlik problemleri için karar verme sürecinde VNPSS'lerin NPSS'lerden daha avantajlı olduğu ifade edilmiştir.

Tanım 4.1: $\psi_M \in VNPSS(U)$ olsun. O halde ψ_M VNPSS'sinin toplanma operatörü ψ_M^T şeklinde gösterilen bir NS olup $\mu_M^T, \vartheta_M^T, \omega_M^T : U \to [0,1]$ fonksiyonları için aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$\psi_M^T = \{\langle u, \mu_M^T(u), \vartheta_M^T(u), \omega_M^T(u) \rangle : u \in U\} \quad (4.1)$$

Burada $s(P)$, P'nun eleman sayısını göstermek üzere belirtilen fonksiyonlar,

$$\Xi_{\underline{f_M}(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}})}(u) = \begin{cases} 1, & u \in \underline{f_M}(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}) \\ 0, & u \notin \underline{f_M}(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}) \end{cases},$$

$$\Xi_{f_M(p)}(u) = \begin{cases} 1, & u \in f_M(p) \\ 0, & u \notin f_M(p) \end{cases},$$

$$\Xi_{\overline{f_M}(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}})}(u) = \begin{cases} 1, & u \in \overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right) \\ 0, & u \notin \overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right) \end{cases}$$

olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanırlar,

$$\mu_M^T(u)=\frac{3^{-1}}{s(P)}\left[\sum_{\substack{p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\underline{P}\\ u\in U}}(\mu_M(p)-\underline{\alpha})\Xi_{\underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)}(u)+\sum_{\substack{p\in P\\ u\in U}}\mu_M(p)\Xi_{f_M(p)}(u)+\sum_{\substack{p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\overline{P}\\ u\in U}}(\mu_M(p)+\overline{\alpha})\Xi_{\overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)}(u)\right]$$

$$\vartheta_M^T(u)=\frac{3^{-1}}{s(P)}\left[\sum_{\substack{p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\underline{P}\\ u\in U}}\left(\vartheta_M(p)+\underline{\beta}\right)\Xi_{\underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)}(u)+\sum_{\substack{p\in P\\ u\in U}}\vartheta_M(p)\Xi_{f_M(p)}(u)+\sum_{\substack{p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\overline{P}\\ u\in U}}(\vartheta_M(p)-\overline{\beta})\Xi_{\overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)}(u)\right]$$

$$\omega_M^T(u)=\frac{3^{-1}}{s(P)}\left[\sum_{\substack{p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\underline{P}\\ u\in U}}\left(\omega_M(p)+\underline{\gamma}\right)\Xi_{\underline{f_M}\left(p^{\underline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)}(u)+\sum_{\substack{p\in P\\ u\in U}}\omega_M(p)\Xi_{f_M(p)}(u)+\sum_{\substack{p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\in\overline{P}\\ u\in U}}(\omega_M(p)-\overline{\gamma})\Xi_{\overline{f_M}\left(p^{\overline{\alpha,\beta,\gamma}}\right)}(u)\right]$$

Tanım 4.2: $\psi_M\in VNPSS(U)$ ve ψ_M^T bir VNPSS toplanma operatörü olsun. ψ_M^T'nın bir indirgenmiş fuzzy kümesi U üzerinde bir fuzzy küme olup

$$\psi_M^T=\left\{\langle u,\mu_{\psi_M^T}(u)\rangle : u\in U\right\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\mu_{\psi_M^T}:U\to[0,1]$ ve her $u\in U$ için $\mu_{\psi_M^T}(u)=\mu_M^T(u)+\vartheta_M^T(u)-\omega_M^T(u)$ dir.

Şimdi, Tanım 4.1 ve 4.2'ye dayanarak VNPSS için bir karar verme algoritması sayesinde alternatifler arasındaki en iyi nesnenin seçilmesi hedeflenmiştir.

Algoritma:

Adım 1. P istenilen parametre kümesi, U evren kümesi ve M, P üzerinde uygun bir NS olacak şekilde temel kümeleri inşa edin.

Adım 2. U üzerinde bir ψ_M VNPSS'si oluşturun.

Adım 3. ψ_M VNPSS'sinin toplanma operatörü olan ψ_M^T'yi hesaplayın.

Adım 4. ψ_M^T'nin indirgenmiş fuzzy kümesini hesaplayın.

Adım 5. $\mu_{\psi_M^T}(u_k)=max\left\{\mu_{\psi_M^T}(u_l): u_l\in U\right\}$ değerini bulun.

Şimdi, önerilen algoritmanın bir belirsizlik problemi üzerinde nasıl uygulanabileceği ve elde edilen sonuçların ideal çözüme ne kadar yakın olabileceği NPSS ve VNPSS için aşağıdaki problem aracılığıyla analiz edilmiştir,

Problem: Bir şirket, başvuran adaylar arasından en iyi mühendisi işe almak istiyor. Başvuran adaylar 10 kişi olup bu adayların kümesi $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10}\}$ olsun. Şirket yönetimi adayların $P=\{p_1=yetenek,\ p_2=başarı\}$ parametre kümesindeki niteliklere ne kadar uygun olup olmadığını belirlemek için 3 aşamalı bir test yapıyor. İlk test diğer iki teste göre daha kolay olup bu testi geçenler ikinci teste katılabiliyorlar. İkinci testte son yapılacak olan testten daha kolay olup ikinci testten başarılı olanlar üçüncü teste katılabiliyorlar. Sonuçta şirket hedefinin, başvuran mühendisler arasından en iyisini seçmek olduğu varsayılsın.

Adım 1. Problemde ifade edilen şirketin istediği parametreleri ifade eden P parametresi üzerindeki NS ve buna bağlı olarak $\underline{P}$ ve $\overline{P}$ parametre kümeleri üzerindeki NS'lerin aşağıdaki gibi ifade edildiğini kabul edelim,

$$\underline{M}=\left\{\begin{array}{c}\langle p_1^{\underline{0.12,0.05,0.05}},0.3,0.45,0.4\rangle,\\ \langle p_2^{\underline{0.23,0.12,0.08}},0.33,0.46,0.52\rangle\end{array}\right\}$$

$$M=\left\{\begin{array}{c}\langle p_1,0.42,0.4,0.35\rangle,\\ \langle p_2,0.56,0.34,0.44\rangle\end{array}\right\}$$

$$\overline{M}=\left\{\begin{array}{c}\langle p_1^{\overline{0.23,0.2,0.1}},0.65,0.2,0.25\rangle,\\ \langle p_2^{\overline{0.19,0.11,0.1}},0.75,0.25,0.34\rangle\end{array}\right\}$$

Adım 2. Şimdi şirketin değerlendirme için adaylara uyguladığı üç testin sonuçlarını ifade eden ψ_M VNPSS'sini ifade edelim,

Görüldüğü üzere testlerin zorluğu arttıkça o testte başarılı olabilen adayların sayısında azalma olmuştur. Bu durum Özellik 3.1'den açıktır.

$$\psi_M=\left\{\begin{array}{c}\left(\langle p_1^{\underline{0.12,0.05,0.05}},0.3,0.45,0.4\rangle,\{u_1,u_2,u_4,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10}\}\right),\\ \left(\langle p_2^{\underline{0.23,0.12,0.08}},0.33,0.46,0.52\rangle,\{u_2,u_3,u_5,u_6,u_8,u_9\}\right),\\ (\langle p_1,0.42,0.4,0.35\rangle,\{u_2,u_4,u_7,u_8,u_9\}),\\ (\langle p_2,0.56,0.34,0.44\rangle,\{u_2,u_5,u_6,u_8,u_9\}),\\ \left(\langle p_1^{\overline{0.23,0.2,0.1}},0.65,0.2,0.25\rangle,\{u_2,u_4,u_7,u_9\}\right),\\ \left(\langle p_2^{\overline{0.19,0.11,0.1}},0.75,0.25,0.34\rangle,\{u_5,u_6,u_8\}\right)\end{array}\right\}$$

Adım 3. İfade edilen ψ_M VNPSS'sinin toplanma operatörü olan ψ_M^T aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\psi_M^T = \left\{ \begin{matrix} \langle u_1, 0.05{,}0.08{,}0.07\rangle, \langle u_2, 0.38{,}0.31{,}0.33\rangle \\ \langle u_3, 0.06{,}0.08{,}0.09\rangle, \langle u_4, 0.23{,}0.18{,}0.17\rangle \\ \langle u_5, 0.27{,}0.18{,}0.22\rangle, \langle u_6, 0.32{,}0.25{,}0.28\rangle \\ \langle u_7, 0.23{,}0.18{,}0.17\rangle, \langle u_8, 0.39{,}0.32{,}0.34\rangle \\ \langle u_9, 0.38{,}0.31{,}0.33\rangle, \langle u_{10}, 0.05{,}0.08{,}0.07\rangle \end{matrix} \right\}$$

Adım 4. ψ_M^T'nin indirgenmiş fuzzy kümesi aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\psi_M^T = \left\{ \begin{matrix} \langle u_1, 0.06\rangle, \langle u_2, 0.36\rangle, \langle u_3, 0.05\rangle, \langle u_4, 0.24\rangle, \\ \langle u_5, 0.23\rangle, \langle u_6, 0.29\rangle, \langle u_7, 0.24\rangle, \\ \langle u_8, 0.37\rangle, \langle u_9, 0.36\rangle, \langle u_{10}, 0.06\rangle \end{matrix} \right\}$$

Adım 5. $\mu_{\psi_M^T}(u_8) = max\left\{\mu_{\psi_M^T}(u_l): u_l \in U\right\} = 0.37$ olduğundan istenen kriterlere en uygun mühendis u_8 dir. Bu durumda şirketin u_8 mühendisini işe alması gerektiği önerilir.

Şimdi aynı algoritmayı sadece P parametresini dikkate alarak NPSS için çözümleyelim ve VNPSS için elde ettiğimiz sonuçlarla karşılaştıralım,

Bu durumda ψ_M^T toplanma operatörü şu şekilde elde edilir,

$$\psi_M^T = \left\{ \begin{matrix} \langle u_1, 0.00{,}0.00{,}0.00\rangle, \langle u_2, 0.49{,}0.37{,}0.40\rangle \\ \langle u_3, 0.00{,}0.00{,}0.00\rangle, \langle u_4, 0.21{,}0.20{,}0.18\rangle \\ \langle u_5, 0.28{,}0.17{,}0.22\rangle, \langle u_6, 0.28{,}0.17{,}0.22\rangle \\ \langle u_7, 0.21{,}0.20{,}0.18\rangle, \langle u_8, 0.49{,}0.37{,}0.40\rangle \\ \langle u_9, 0.49{,}0.37{,}0.40\rangle, \langle u_{10}, 0.00{,}0.00{,}0.00\rangle \end{matrix} \right\}$$

Böylece ψ_M^T'nin indirgenmiş fuzzy kümesi aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\psi_M^T = \left\{ \begin{matrix} \langle u_1, 0.00\rangle, \langle u_2, 0.47\rangle, \langle u_3, 0.00\rangle, \langle u_4, 0.24\rangle, \\ \langle u_5, 0.23\rangle, \langle u_6, 0.23\rangle, \langle u_7, 0.24\rangle, \\ \langle u_8, 0.47\rangle, \langle u_9, 0.47\rangle, \langle u_{10}, 0.00\rangle \end{matrix} \right\}$$

Son olarak $\mu_{\psi_M^T}(u_2) = \mu_{\psi_M^T}(u_8) = \mu_{\psi_M^T}(u_9) = max\left\{\mu_{\psi_M^T}(u_l): u_l \in U\right\} = 0.47$ olarak elde edildiğinden istenilen kriterlere en uygun elemanı seçmemiz olanaksızdır. Bu yüzden belirsizliğe yönelik karar verme süreçlerinde VNPSS'ler NPSS'lerden daha avantajlıdır. Bu durumun temel sebebi açıktır ki; VNPSS'lerinde ele alınan belirsizlik probleminin ifadesi için önerilen üç farklı yaklaşımdır. Bu durumda VNPSS'lerin belirsizliğe yönelik problemler için NPSS'lerden daha başarılı olduğu ifade edilir.

6. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada nötrosofik parametreli esnek küme teorisi genelleştirilerek sanal nötrosofik parametreli esnek küme teorisi literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca bu yeni küme teorisi için alt küme, tümleyen, birleşim, kesişim gibi küme işlemleri tanımlanmış olup bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra belirsizlik problemlerinin çözümüne yönelik bir karar verme algoritması önerilmiştir ve bir problem üzerinden önerilen algoritma uygulanmıştır. Son olarak nötrosofik parametreli esnek kümelerin bazı belirsizlik problemlerinin çözümünde yetersiz kaldığı tespit edilmiş olup sanal nötrosofik parametreli esnek kümelerin bu yetersizliğin üstesinden gelebileceği vurgulanmıştır.

Bir belirsizlik problemini en doğru şekilde ifade edebilmek ve problemin çözümünü ideale en yakın bir şekilde çözebilmek bu alanda çalışan bilim insanlarını daima heyecanlandırmıştır. Bu çalışma da bu heyecanın bir sonucu olan sanal nötrosofik parametreli esnek kümeleri inşa ederek bu alandaki bazı yetersizliklere bir çözüm önerisi sunmaktadır. Bu sebeple tanımlanan küme teorisinin gelecek çalışmalar için ilham verici olabileceğini düşünmekle beraber karar verme aşamasında bu küme teorisinin kullanılması öneriyorum.

ETİK STANDARTLARIN BEYANI (DECLARATION OF ETHICAL STANDARTS)

Bu makalenin yazar(lar)ı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler.

YAZARLARIN KATKILARI (AUTHORS' CONTRIBUTIONS)

Orhan DALKILIÇ: Bu makale hakkındaki tüm işlemler bu yazar tarafından gerçekleştirilmiştir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI (CONFLICT OF INTEREST)

Bu çalışmada herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] Zadeh L.A., "Fuzzy sets", ***Information and Control***, 8: 338-353, (1965).

[2] Pawlak Z., "Rough sets", ***Int J Comput Inf Sci***, 11: 341-356, (1982).

[3] Maji P.K., Roy A.R. and Biswas R., "Fuzzy soft sets", ***Journal of Fuzzy Mathematics***, 9(3):589-602, (2001).

[4] Molodtsov D., "Soft set theory-first results", ***Comput. Math. Appl.***, 37: 19-31, (1999).

[5] Çağman N., Çıtak F. and Enginoğlu S., "FP-soft Set Theory and Its Applications", ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics***, 2: 219-226, (2011).

[6] Dalkılıç O. and Demirtas N., "VFP-Soft Sets and Its Application on Decision Making Problems", ***Journal of Polytechnic***, https://doi.org/10.2339/politeknik.685634, (2020).

[7] Smarandache F., "Neutrosophic set, a generalisation of the intuitionistic fuzzy sets", ***Int. J. Pure Appl. Math.***, 24: 287–297, (2005).

[8] Broumi S., Deli I. and Smarandache F., "Neutrosophic parametrized soft set theory and its decision making", ***International Frontier Science Letters***, 1(1): 1-11, (2014).

[9] Çağman N., Çıtak F. and Enginoğlu S., "Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications", ***Turkish Journal of Fuzzy System***, 1: 21-35, (2010).

[10] Çağman N. and Karataş S., "Intuitionistic fuzzy soft set theory and its decision making", ***Journal of Intelligent and Fuzzy Systems***, 24(4): 829-836, (2013).

[11] Deli I. and Çağman N., "Intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory and its decision making", ***Applied Soft Computing***, 28: 109-113, (2015).

[12] Smarandache F., "A unifying field in logics. Neutrosophy: neutrosophic probability, set and logic", ***American Research Press, Rehoboth***, (1999).

[13] Grattan-Guiness I., "Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities", ***Z Math Logik Grundladen Math***, 22: 149–160, (1975).

[14] Jahn K.U., "Intervall-wertige Mengen", ***Math Nachr***, 68:115–132, (1975).

[15] Zadeh L., "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I", ***Inf Sci***, 8: 199–249, (1975).

[16] Atanassov K., "Intuitionistic fuzzy sets", ***Fuzzy Sets Syst***, 20: 87–96, (1986).

[17] Das S. and Kar D.S., "Group decision making in medical system: an intuitionistic fuzzy soft set approach", ***Appl Soft Comput***, 24: 196–211, (2014).

[18] Atanassov K. and Gargov G., "Interval valued intuitionistic fuzzy sets", ***Fuzzy Set Syst***, 31:343–349, (1989).

[19] Wang H., Smarandache F., Zhang Y.Q. and Sunderraman R., "Single valued neutrosophic sets", ***Multispace Multistruct***, 4: 410–413, (2010).

[20] Demirtaş N., Hussaın S. and Dalkılıç O., "New approaches of inverse soft rough sets and their applications in a decision making problem", ***Journal of applied mathematics and informatics***, 38(3-4): 335-349, (2020).

[21] Demirtaş N. and Dalkılıç O., "An application in the diagnosis of prostate cancer with the help of bipolar soft rough sets", ***on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2019)***, KONYA, 283, (2019).

[22] Abu Qamar M. and Hassan N. "An approach toward a Q-neutrosophic soft set and its application in decision making", ***Symmetry***, 11(2): 139, (2019).

[23] Jana C. and Pal M. "A robust single-valued neutrosophic soft aggregation operators in multi-criteria decision making", ***Symmetry***, 11(1): 110, (2019).

[24] Deli I. "Interval-valued neutrosophic soft sets and its decision making", ***International Journal of Machine Learning and Cybernetics***, 8(2): 665-676, (2017).

[25] Deli I., Eraslan S. and Çağman N. "ivnpiv-Neutrosophic soft sets and their decision making based on similarity measure", ***Neural Computing and applications***, 29(1): 187-203, (2018).

[26] Saha A. and Broumi S. "Parameter Reduction of Neutrosophic Soft Sets and Their Applications", ***Neutrosophic Sets and Systems***, 32(1): 1, (2020).

[27] Khalil A.M., Cao D., Azzam A.A., Smarandache F. and Alharbi W. Combination of the single-valued neutrosophic fuzzy set and the soft set with applications in decision-making", ***Symmetry***, 12(8): 1361, (2020).