POLİTEKNİK DERGİSİ

JOURNAL of POLYTECHNIC

ISSN: 1302-0900 (PRINT), ISSN: 2147-9429 (ONLINE)

URL: http://dergipark.org.tr/politeknik

Karar verme problemlerinde VFPFSS'lerin bir uygulaması

An application of VFPFSS's in decision making problems

***Yazar(lar) (Author(s))**: Orhan DALKILIÇ*

ORCID: 0000-0003-3875-1398

Bu makaleye şu şekilde atıfta bulunabilirsiniz(To cite to this article): Dalkılıç O., "Karar verme problemlerinde VFPFSS'lerin bir uygulaması", ***Politeknik Dergisi***, 25(2): 491-501, (2022).

Erişim linki (To link to this article): http://dergipark.org.tr/politeknik/archive

DOI: 10.2339/politeknik.758474

Karar Verme Problemlerinde VFPFSS'lerin Bir Uygulaması

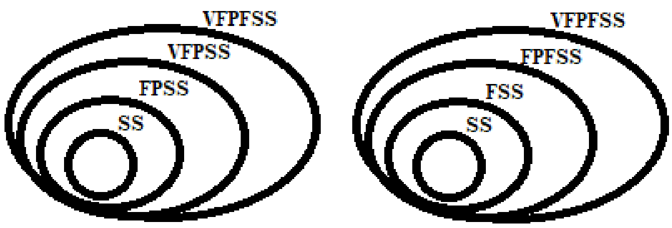
An Application of VFPFSS's in Decision Making Problems

Önemli noktalar (Highlights)

- *FP-bulanık esnek kümelerin ve VFP-esnek kümelerin belirsizlik problemlerini çözmedeki yetersizlikleri / The inadequacies of FP-fuzzy soft sets and VFP-soft sets in solving uncertainty problems*
- *Daha ideale yakın sonuçların eldesi için VFPFSS'lerin önerilmesi / Suggesting VFPFSS's to achieve more ideal results*
- *Kümeler arasındaki farkı daha iyi bir şekilde ifade edebilmek için bir karar verme algoritmasının sunulması / Presentinng a decision making algorithm to better express the difference between the sets.*

Grafik Özet (Graphical Abstract)

Bu çalışmada FP-bulanık esnek kümelerin ve VFP-esnek kümelerin bazı belirsizlik problemlerinin çözümündeki yetersizlikleri ifade edilmiş ve bu kümelerin bir genellemesi olarak VFPFSS'ler önerilmiştir. / In this study, the inadequacies of FP-fuzzy soft sets and VFP-soft sets in solving some uncertainty problems have been expressed and VFPFSSs have been proposed as a generalization of these sets.



Şekil. Kümeler arasındaki ilişkiler **/Figure.** Relations between sets

Amaç (Aim)

FP-bulanık esnek kümelerin ve VFP-esnek kümelerin bazı belirsizlik problemlerindeki yetersizliğini çözmek. / To solve the inadequacy of FP-fuzzy soft sets and VFP-soft sets in some uncertainty problems.

Tasarım ve Yöntem (Design & Methodology)

Bir uygulama ile, kümeler arasındaki fark ifade edilir ve en ideal sonuçları elde etmek için VFPFSS'lerin kullanılması gerektiği tespit edilmiştir. / With an application, the difference between the sets is expressed and it was identified that VFPFSSs should be used to obtain the most ideal results.

Özgünlük (Originality)

Bu çalışmada önerilen VFPFSS'ler sayesinde FP-bulanık esnek kümelerin ve VFP-esnek kümelerin birçok yetersizliği aşılmıştır. / Thanks to the VFPFSSs proposed in this study, many deficiencies of FP-fuzzy soft sets and VFP-soft sets have been overcome.

Bulgular (Findings)

Önerilen VFPFSS'lerin birçok belirsizlik probleminin çözümünde fayda sağlayabileceği açıktır. / It is clear that the proposed VFPFSSs can be helpful in solving many uncertainty problems.

Sonuç (Conclusion)

Bu çalışmada belirsizlik problemlerini en ideal şekilde çözmek amaçlanmış ve önerilen küme teorisinin başarılı bir şekilde uygulanabileceği belirlenmiştir. / In this study, it was aimed to solve uncertainty problems in the most ideal way and it was determined that the proposed set theory can be applied successfully.

Etik Standartların Beyanı (*Declaration of Ethical Standards*)

Bu makalenin yazarları çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler. / The authors of this article declare that the materials and methods used in this study do not require ethical committee permission and/or legal-special permission.

Karar Verme Problemlerinde VFPFSS'lerin Bir Uygulaması

Araştırma Makalesi / Research Article

Orhan DALKILIÇ*

Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Mersin Üniversitesi, Türkiye

(Geliş/Received : 26.06.2020 ; Kabul/Accepted : 18.08.2020 ; Erken Görünüm/Early View : 21.08.2020)

ÖZ

Bu çalışma belirsizlik problemlerini en iyi şekilde ifade edebilmek ve bu sayede karar verme aşamasında en ideale yakın sonuca ulaşmak için VFP-bulanık esnek kümelerin kullanılmasını önermektedir. Ayrıca bu yeni küme tipinin bazı temel küme işlemleri verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Dahası işlem kalabalığının önüne geçebilecek bazı teknik formülasyonlar verilerek belirsizliğin daha kolay bir şekilde ifade edilebilmesi sağlanmıştır. Son olarak bir karar verme probleminde VFP-esnek kümelerden ve FP-bulanık esnek kümelerden daha iyi sonuçlara ulaşıldığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: VFP-bulanık esnek küme, VFP-esnek küme, FP-bulanık esnek küme, karar verme.

An Application of VFPFSS's in Decision Making Problems

ABSTRACT

This study proposes the use of VFP-fuzzy soft sets in order to express the uncertainty problems in the best way and thus reach the most ideal result in the decision making phase. In addition, some basic set operations of this new set type are given and some properties are examined. Moreover, some technical formulations that can prevent the crowd of transactions have been given, allowing uncertainty to be expressed more easily. Finally, in a decision making problem, it has been shown that better results are obtained from VFP-soft sets and FP-fuzzy soft sets.

Keywords: VFP-fuzzy soft set, VFP-soft set, FP-fuzzy soft set, decision making.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Günümüzde eğitim, mühendislik, sağlık gibi özellikle insan faktörünün hissedildiği alanlarda karşılaşılan belirsizlik problemlerini en doğru şekilde ifade edebilmek ve bu sayede karar vermeyi en ideale yakın bir şekilde sonuçlandırabilmek çok önemli bir konu haline gelmiştir. Bunun için araştırmacılar daha önceden literatüre kazandırılan küme teorilerinden faydalanmışlardır. Bu anlamda önerilen ilk küme tipi Zadeh tarafından ortaya konulan bulanık küme teorisidir [1]. Ancak bulanık küme teorisinin belirsizlik problemlerine objektif olarak uygulanması zor bir süreçtir. Bu nedenle bu zorluğu ortadan kaldırmak için Molodsov tarafından 1999 yılında esnek küme teorisi verildi [3]. Daha sonra, Maji vd. bulanık esnek küme kavramını ortaya atmışlardır [4]. Böylece bulanık kümeler mantığı esnek kümeler ile birlikte incelenmeye başlanmıştır. Bulanık küme teorisi ve esnek küme teorisinin birleştirilerek sunulması sayesinde belirsizlik problemlerinin çözümüne yönelik faklı algoritmaların gelişimine olanak sağlanmıştır [12,13,14]. Tüm bu küme teorileri belirsiz verileri sınıflamak ve bu sayede daha kolay bir şekilde karar verme sürecini yönetebilmek için ortaya konulmuştur. Birçok küme teorisi bu amaçla ortaya atılmasına rağmen karar verme problemlerindeki başarı en çok melez küme tiplerinde yakalanmıştır [15,16,17]. Bunun sebebi melez küme tiplerinin kendisinden yararlanılan küme tiplerinin avantajlarını tek başına elinde tutabilmesindendir.

2011 yılında Çağman vd. tarafından bulanık parametreli esnek küme (FP-esnek küme)(FPSS) kavramı tanımlandı [9]. Bulanık esnek kümede her parametrenin görüntü, bir bulanık küme iken FP-esnek kümede her parametre için bir esnek görüntü bir de [0,1] kapalı aralığında bir görüntü elde edilmektedir. Böylece karar vermede daha ideale yakın sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır. Nesne kümelerindeki elemanları da üyelik fonksiyonlarıyla tanımlamayı düşünen Cagman vd. [11] FP-bulanık esnek kümeleri literatüre kazandırmıştır. Bu kümeler FP-esnek kümelerin genellemesi olduğundan belirsizliği ifade etmede daha başarılı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca FP-esnek kümelerde verilen parametrelerin üyelik derecelerinin değiştirilmesi ile belirsizlik problemlerindeki karar verme süreçlerinin iyileştirilmesini amaçlayan Dalkılıç ve Demirtaş [10] sanal bulanık parametreli (VFP-)esnek kümeleri tanımlamışlardır. Bu kümeler herhangi bir parametrenin üyeliğinin değişimi sonucunda nesne kümesindeki eşleşmelerin farklı olabileceğini ifade eder. Bu değişimi ifade edebilen bu kümeler sayesinde karar verme sürecindeki oluşabilecek hataları en aza indirmiş oluruz.

**Sorumlu Yazar (Corresponding Author)*
e-posta : orhandlk952495@hotmail.com

Bu anlamda araştırmacılar tarafından ilgi çekici bulunmuştur.

Bu çalışmamızda belirsizlik problemlerini ifade etmede kullanılması önerilen VFP-esnek kümeler ve FP-bulanık esnek kümeler gibi kümelerden daha genel olan VFPFSS'leri tanımlıyoruz. Bu sayede karar verme süreçlerinde ideale en yakın çözümlerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Sanal bulanık parametrelerin kullanımı ile parametrelerin ifadesindeki kısıtlamaları gidermek, bulanık esnek melez küme tipi sayesinde de nesne kümesindeki elemanları üyelik fonksiyonları yardımıyla belirterek problemlerdeki belirsizlik, detaylı bir şekilde ifade edilmiştir. Bu karar verme süreçlerinin daha doğru işlemesi için gerekli bir durumdur. Ayrıca işlem kalabalığından kaçınmak ve daha sade bir görünüm sağlamak için bazı teknik formülasyonlar verilmiştir. Son olarak bir belirsizlik problemi üzerinde küme tipleri karşılaştırılarak en ideale sonuca ulaşmak için VFPFSS'lerin kullanılması önerilmiştir.

Bu çalışma boyunca; $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ bir başlangıç evreni, $P(U)$ U'nun güç kümesi ve $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, U evrenine göre olası tüm parametrelerin kümesi olarak ifade edilecektir. Dahası A, E'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Genellikle parametreler; çeşitli karakteristikler ya da U evrenindeki nesnelerin özellikleri olarak belirtilir. Ayrıca X ve Y, E üzerinde bir bulanık küme olarak varsayılacaktır.

2. MATERYAL VE METOD (MATERIAL and METHOD)

Bu bölümde çalışmanın geri kalanında verilecek tanım ve teorilerin daha iyi anlaşılması için bazı hatırlatmalar yapılacaktır.

2.1. Bulanık Küme (Bulanık Set)

Klasik matematikten faydalanıldığında kesin ifadeleri 0 ('yanlış') ve 1 ('doğru') değerleriyle tespit edebilmek mümkündür. Ancak, gerçek hayatta bu durum her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin; insan düşüncelerini doğru bir şekilde ifade edebilmek için ortaya konulan bulanık küme teorisi üyelik fonksiyonlarının yardımıyla [0,1] aralığında bu durumları ifade etmeyi amaçlamıştır. Zadeh bu küme teorisini 1965 yılında şöyle ifade etmiştir [1];

Tanım 2.1.1. U boştan farklı bir küme ve $\mu_X: U \to [0,1]$ bir fonksiyon olmak üzere $X = \{(u, \mu_X(u)): u \in U\}$ kümesine U üzerinde bir bulanık küme denir [1]. Burada $\mu_X(u)$ değeri, u elemanının üyelik derecesini belirtir.

Bu çalışma boyunca U üzerindeki tüm bulanık kümelerin ailesini $F(U)$ sembolü ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2. X ve Y, U üzerinde iki bulanık küme olsun. Her $u \in U$ için,

(i) $\mu_X(u) \leq \mu_Y(u)$ ise X bulanık kümesi, Y bulanık kümesinin alt kümesidir denir ve $X \subseteq Y$ ile gösterilir [1].

(ii) $\mu_X(u) = \mu_Y(u)$ ise X ve Y bulanık kümeleri eşittir denir ve $X = Y$ ile gösterilir [1].

(iii) $\mu_{X^c}(u) = 1 - \mu_X(u)$ ile tanımlanan X^c kümesine X bulanık kümesinin tümleyeni olan bulanık küme denir ve $X^c = \{(u, \mu_{X^c}(u)): u \in U\}$ şeklinde ifade edilir [1].

(iv) $\mu_M(u) = \max\{\mu_X(u), \mu_Y(u)\}$ ile tanımlanan M kümesi X ve Y bulanık kümelerinin birleşimi olan bir bulanık kümedir ve $M = X \cup Y$ ile gösterilir [1].

(v) $\mu_N(u) = \min\{\mu_X(u), \mu_Y(u)\}$ tanımlanan N kümesi X ve Y bulanık kümelerinin kesişimi olan bir bulanık kümedir ve $N = X \cap Y$ ile gösterilir [1].

2.2. Esnek Küme (Esnek Set)

Molodsov tarafından önerilen esnek kümeler mühendislik, tıp bilimi, ekonomi gibi alanlarda birçok belirsizlik sorunuyla başa çıkmak için ifade edilen bir teori olmuştur. Bu kümelerin daha önceden tanıtılan bulanık küme [1], rough küme [2], gibi küme türlerinden farkı, bir parametreleştirme aracı kullanarak belirsizlik problemlerini daha açık ve kapsamlı bir şekilde ifade edebilmesindeki başarısıydı. Molodsov esnek küme teorisini aşağıda verildiği şekilde tanımlamıştır [3];

Tanım 2.2.1. $F: A \to P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, A) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir [3].

Tanım 2.2.2. (F, A) ve (G, B), U evreni üzerinde esnek kümeler olsun.

(i) Eğer $A \subseteq B$ ve her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$ ise (F, A), (G, B)'nin bir esnek alt kümesidir denir ve $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ şeklinde gösterilir. Eğer (G, B), (F, A)'nın bir esnek alt kümesi ise (F, A)'ya (G, B)'nin bir esnek süper kümesi denir ve $(F, A) \sqsupseteq (G, B)$ ile gösterilir [5].

(ii) Eğer (F, A), (G, B)'nin bir esnek alt kümesi ve (G, B), (F, A)'nın bir esnek alt kümesi ise (F, A), (G, B)'ye esnek eşittir denir [5].

(iii) (F, E) esnek kümesinin relatif tümleyeni $(F, E)^c$ ile gösterilir ve $(F, E)^c = (F^c, E)$ şeklinde tanımlanır öyle ki her $x \in E$ için $F^c(x) = X \setminus F(x)$ ile verilen $F^c: A \to P(X)$ bir dönüşümdür [7].

(iv) (F, A) ve (G, B) kümelerinin birleşimi (H, C) esnek kümesi olmak üzere $C = A \cup B$ ve (H, C) esnek birleşim kümesi her $x \in C$ için $H(x) = F(x) \cup G(x)$ ile elde edilir ve $(H, C) = (F, A) \sqcup (G, B)$ ile gösterilir [5].

Uyarı 2.2.1. Maji ve ark. [5] tarafından verilen iki esnek kümenin kesişimi tanımı $H(x) = F(x)$ veya $H(x) = G(x)$ şeklinde olduğundan doğru değildi. Bu durum Irfan ve ark. [6] tarafından aşağıda verilen tanım ile düzeltilmiştir,

Tanım 2.2.3. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. (F, A) ve (G, B) kümelerinin genişletilmiş kesişimi (T, C) esnek kümesi olmak üzere $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ve her $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$ için (T, C) esnek kesişim kümesi,

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in A - B \\ G(x), & x \in B - A \\ F(x) \cap G(x), & x \in A \cap B \end{cases} \quad (1)$$

$\mathrm{H}(\mathrm{e}) = \mathrm{F}(\mathrm{e}) \cap \mathrm{G}(\mathrm{e})$ ile elde edilir ve $(\mathrm{T}, \mathrm{C}) = (\mathrm{F}, \mathrm{A}) \sqcap (\mathrm{G}, \mathrm{B})$ ile gösterilir [6].

2.3. Bulanık Esnek Küme (Bulanık Esnek Set)

Bulanık küme ve esnek kümelerin bir melez modeli olan bulanık esnek kümeler Maji vd. [4] tarafından önerilmiştir. Sadece bulanık kümeleri ya da sadece esnek kümeler kullanılarak ifade edilen belirsizliği daha iyi bir şekilde ifade edebilen bu küme teorisi aşağıdaki şekilde verilmiştir,

Tanım 2.3.1: $F: A \rightarrow F(U)$ bir fonksiyon olmak üzere (F, A) ikilisine U üzerinde bir bulanık esnek küme denir. Yani, her bir $e \in A$ için $F(e)$'yi, (F, A) bulanık esnek kümesinin $e-$yaklaşımlı elemanlarının kümesi olarak düşünebiliriz [4].

Örnek 2.3.1: $\mathrm{U} = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, u_3\}$ nesnelerin bir kümesi ve $\mathrm{A} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\} \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olarak seçilmiş olsun. Bu durumda $F(x_1) = \{0.65/u_1, 0.7/u_2\}$, $F(x_2) = \{0.84/u_2, 0.75/u_3\}$ eşleşmelerine karşılık gelen (F, A) bulanık esnek kümesi şöyle ifade edilir;

$$(F, A) = \begin{Bmatrix} (x_1, \{0.65/u_1, 0.7/u_2\}) \\ (x_2, \{0.84/u_2, 0.75/u_3\}) \end{Bmatrix}$$

2.4. Sanal Bulanık Parametreli Esnek Küme (Virtual Bulanık Parametrized Esnek Set)

Dalkılıç ve Demirtaş [10] tarafından önerilen bu kümeler parametre kümesindeki elemanları üyelik fonksiyonları yardımıyla ifade etmişlerdir. Bunun yanısıra bu kümeler herhangi bir parametrenin üyeliğinin değişimi sonucunda nesne kümesindeki eşleşmelerin farklılığını ifade edebildiğinden belirsizliği ifade etmede oldukça başarılı olduğunu söyleyebiliriz. Dahası bu kümeler Çağman vd. [9] tarafından verilen bulanık parametreli (FP-)esnek kümelerden daha genel bir küme tipidir. Bu anlamda da ilgi çekici olan bu kümelerin bazı temel tanım ve teoremleri hatırlatılacaktır. Aynı zamanda bu bölümde Dalkılıç ve Demirtaş [10] tarafından ifade edilen küme operatörleri tekrar ele alınacak ve daha pratik bir şekilde ifade edilecektir.

Tanım 2.4.1: U evrensel kümesi üzerindeki bir F_X FP-esnek kümesi

$$\mathrm{F}_\mathrm{X} = \{(\mu_\mathrm{X}(\mathrm{x})/\mathrm{x}, \mathrm{f}_\mathrm{X}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\} \quad (2)$$

ile elde edilir. Burada $\mathrm{f}_\mathrm{X}: \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{U})$ fonksiyonu yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır. $\mu_\mathrm{X}: \mathrm{E} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu ise FP-esnek kümesinin üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır [9]. $\mu_\mathrm{X}(\mathrm{x})$ değeri x parametresinin karar veren kişi için önemlilik derecesini belirtir.

Örnek 2.4.1: $\mathrm{U} = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, u_3, u_4, u_5\}$ ve $\mathrm{E} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$ nesne ve parametrelerin bir kümesi olmasına karşın $X = \{0.88/x_1, 0.75/x_2\}$, E üzerinde bir bulanık küme olsun. Bu durumda $\mathrm{f}_\mathrm{X}(x_1) = \{u_2, u_3, u_4\}$, $\mathrm{f}_\mathrm{X}(x_2) = \{u_1, u_3, u_5\}$ yaklaşım fonksiyonlarına karşılık gelen F_X FP-esnek kümesi şöyle ifade edilir;

$$\mathrm{F}_\mathrm{X} = \{(0.88/x_1, \{u_2, u_3, u_4\}), (0.75/x_2, \{u_1, u_3, u_5\})\}$$

Tanım 2.4.2: $1 \leq i \leq n$ için her $0 \leq \underline{\alpha_i} < \mu_X(x_i)$ değerine karşılık gelerek yazılabilecek parametre kümesine, bir alt sanal parametre kümesi denir ve

$$\underline{E} = \left\{x_1^{\underline{\alpha_1}}, x_2^{\underline{\alpha_2}}, \ldots, x_n^{\underline{\alpha_n}}\right\} \quad (3)$$

şeklinde ifade edilir [10]. Burada $x_i^{\underline{\alpha_i}}$ parametresi şu anlama gelmektedir: "x_i parametresinin α_i sayısınca OLUMSUZ YÖNDE GELİŞİM PARAMETRESİ". Ayrıca; $\underline{X}$'i, $\underline{E}$ üzerinde bir bulanık küme olarak alalım. Dikkat etmek gerekir ki, $\underline{f_X}: \underline{E} \rightarrow P(U)$ alt yaklaşım fonksiyonu olarak alındığında ve $\underline{\alpha_i}$ değeri bir reel sayı olduğundan $\underline{f_X}\left(x_i^{\underline{\alpha_i}}\right)$ ifadesi, evren kümede karşılık gelebilecek nesnelerin kümesini değiştirebilir [10]. Ayrıca $1 \leq i \leq n$ değeri için her $0 \leq \overline{\alpha_i} \leq 1 - \mu_X(x_i)$ değerine karşılık gelerek yazılabilecek parametre kümesine bir üst sanal parametre kümesi denir ve

$$\overline{E} = \left\{x_1^{\overline{\alpha_1}}, x_2^{\overline{\alpha_2}}, \ldots, x_n^{\overline{\alpha_n}}\right\} \quad (4)$$

şeklinde ifade edilir [10]. Burada $x_i^{\overline{\alpha_i}}$ parametresi şu anlama gelmektedir: "x_i parametresinin α_i sayısınca OLUMLU YÖNDE GELİŞİM PARAMETRESİ". Ayrıca; $\overline{X}$'i, $\overline{E}$ üzerinde bir bulanık küme olarak alalım. Dikkat etmek gerekir ki, $\overline{f_X}: \overline{E} \rightarrow P(U)$ üst yaklaşım fonksiyonu olarak alındığında ve α_i değeri bir reel sayı olduğundan $\overline{f_X}\left(x_i^{\overline{\alpha_i}}\right)$ ifadesi, evren kümede karşılık gelebilecek nesnelerin kümesini değiştirebilir [10].

Tanım 2.4.3: U evrensel kümesi üzerindeki bir VF_X VFP-esnek kümesi

$$\underline{F_X} = \{((\mu_X(x) - \underline{\alpha})/x, \underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}})) : x \in E, x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}, \underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}}) \in P(U), \mu_X(x) \in [0,1], 0 \leq \underline{\alpha} < \mu_X(x)\} \quad (5)$$

$$F_X = \{(\mu_X(x)/x, f_X(x)) : x \in E, f_X(x) \in P(U), \mu_X(x) \in [0,1]\} \quad (6)$$

$$\overline{F_X} = \{((\mu_X(x) + \overline{\alpha})/x, \overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})) : x \in E, x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}, \overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}}) \in P(U), \mu_X(x) \in [0,1], 0 \leq \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_X(x)\} \quad (7)$$

$$VF_X = \underline{F_X} \cup F_X \cup \overline{F_X} \quad (8)$$

ile elde edilir. Burada $\underline{f_X}: \underline{E} \rightarrow P(U)$ fonksiyonu alt yaklaşım fonksiyonu, $f_X: E \rightarrow P(U)$ fonksiyonu yaklaşım fonksiyonu ve $\overline{f_X}: \overline{E} \rightarrow P(U)$ fonksiyonu ise üst yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır [10]. $\mu_X: E \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu ise VFP-esnek kümenin üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır [10].

U üzerinde tanımlanabilecek tüm VFP-esnek kümelerin kümesi $VFPS(U)$ ile gösterilecektir.

Özellik 2.4.1: $VF_X \in VFPS(U)$ olsun. Her $x \in E, x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}, x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ ve her belirlenen $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}$ değerleri için $s\left(\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})\right) \subseteq s(f_X(x)) \subseteq s\left(\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}})\right)$ kapsaması doğrudur [10].

Uyarı 2.4.1: Bir VFP-esnek kümede seçilen $\underline{\alpha_1}$ ve $\underline{\alpha_2}$ değerleri $\underline{\alpha_1} < \underline{\alpha_2}$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\mu_X(x) - \underline{\alpha_2} < \mu_X(x) - \underline{\alpha_1}$ olacağından Özellik 2.4.1'den $s\left(\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha_1}})\right) \subseteq s\left(\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha_2}})\right)$ kapsaması gerçeklenir [10]. Benzer şekilde seçilen $\overline{\alpha_1}$ ve $\overline{\alpha_2}$ değerleri $\overline{\alpha_1} < \overline{\alpha_2}$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\mu_X(x) + \overline{\alpha_1} < \mu_X(x) + \overline{\alpha_2}$ olacağından Özellik 2.4.1'den $s\left(\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha_1}})\right) \subseteq s\left(\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha_2}})\right)$ kapsaması gerçeklenir [10].

Örnek 2.4.2: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ nesnelerin ve $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ parametrelerin kümesini ifade etsin. Ayrıca $\underline{E}, E, \overline{E}$ üzerindeki bulanık kümeler sırasıyla $\underline{X} = \{0.35/x_1, 0.4/x_3\}$, $X = \{0.75/x_1, 0.65/x_3\}$, $\overline{X} = \{0.9/x_1, 0.7/x_3\}$ şeklinde ifade edilsin. Seçilen kümeler için yaklaşım fonksiyonlarının ise aşağıdaki şekilde verildiğini düşünelim,

$$\underline{f_X}(x_1^{0.4}) = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_7\},$$
$$\underline{f_X}(x_3^{0.25}) = \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_7\},$$
$$f_X(x_1) = \{u_1, u_3, u_5, u_7\},$$
$$f_X(x_3) = \{u_2, u_3, u_7\},$$
$$\overline{f_X}(x_1^{0.15}) = \{u_1, u_5\},$$
$$\overline{f_X}(x_3^{0.05}) = \{u_3, u_7\}.$$

Verilen yaklaşım fonksiyonları için elde edilen FP-esnek kümeleri belirtelim:

$$\underline{F_X} = \left\{\begin{matrix}(0.35/x_1, \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_7\}), \\ (0.4/x_3, \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_7\})\end{matrix}\right\},$$
$$F_X = \left\{\begin{matrix}(0.75/x_1, \{u_1, u_3, u_5, u_7\}), \\ (0.65/x_3, \{u_2, u_3, u_7\})\end{matrix}\right\},$$
$$\overline{F_X} = \left\{\begin{matrix}(0.9/x_1, \{u_1, u_5\}), \\ (0.7/x_3, \{u_3, u_7\})\end{matrix}\right\}.$$

Buradan VF_X VFP-esnek kümesi şöyle yazılır:

$$VF_X = \left\{\begin{pmatrix}(0.35/x_1, \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_7\}), \\ (0.4/x_3, \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_7\}) \\ (0.75/x_1, \{u_1, u_3, u_5, u_7\}), \\ (0.65/x_3, \{u_2, u_3, u_7\}) \\ (0.9/x_1, \{u_1, u_5\}), \\ (0.7/x_3, \{u_3, u_7\})\end{pmatrix}\right\}$$

Tanım 2.4.4: $VF_X \in VFPS(U)$ olsun. Her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}}) = \emptyset$ ise VF_X'e, X −boş VFP-esnek küme denir ve $\widetilde{VF_{\emptyset_X}}$ ile gösterilir. Eğer $\underline{X} = \emptyset$ ise VF_X'e boş VFP-esnek küme denir ve $\widetilde{VF_\emptyset}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.5: $VF_X \in VFPS(U)$ olsun. Eğer her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{X}$ için $\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}}) = U$ ise VF_X'e, X −evrensel VFP-esnek küme denir ve $\widehat{VF}_{\tilde{X}}$ ile gösterilir. Eğer $\overline{X} = \overline{E}$ ise VF_X'e, X −evrensel VFP-esnek kümesi evrensel VFP-esnek küme denir ve $\widehat{VF}_{\tilde{E}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.6: VF_X, $VF_Y \in VFPS(U)$ olsun. Ayrıca VF_X VFP-esnek kümesi için $0 \leq \underline{\alpha} < \mu_X(x)$, $0 \leq \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_X(x)$ eşitsizlikleri ve VF_Y VFP-esnek kümesi için $0 \leq \underline{\beta} < \mu_Y(x)$, $0 \leq \overline{\beta} \leq 1 - \mu_Y(x)$ eşitsizlikleri geçerli olsun. Bu durumda

i) Her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_X(x) - \underline{\alpha} \leq \mu_Y(x) - \underline{\beta}$ ve $\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}}) \subset \underline{f_Y}(x^{\underline{\beta}})$,

ii) Her $x \in E$ için $\mu_X(x) \leq \mu_Y(x)$ ve $f_X(x) \subset f_Y(x)$,

iii) Her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_X(x) - \overline{\alpha} \leq \mu_Y(x) - \overline{\beta}$ ve $\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}}) \subset \overline{f_Y}(x^{\overline{\beta}})$

şartları sağlanır ise, o zaman VF_X, VF_Y nin VFP-esnek alt kümesidir ve $VF_X \tilde{\sqsubseteq} VF_Y$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.4.8: $VF_X \in VFPS(U)$ olsun. VF_X VFP-esnek kümesinin tümleyeni

i) Her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{X^c}(x) = 1 - (\mu_X(x) - \underline{\alpha})$ ve $f_{\underline{X^c}}(x^{\underline{\alpha}}) = U - \underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}})$,

ii) Her $x \in E$ için $\mu_{X^c}(x) = 1 - \mu_X(x)$ ve $f_{X^c}(x) = U - f_X(x)$,

iii) Her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{X^c}(x) = 1 - (\mu_X(x) - \overline{\alpha})$ ve $f_{\overline{X^c}}(x^{\overline{\alpha}}) = U - \overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})$

koşulları sağlanmak üzere VF_{X^c} ile gösterilen VFP-esnek kümesidir [10].

Tanım 2.4.9: VF_X, $VF_Y \in VFPS(U)$ olsun. Ayrıca VF_X VFP-esnek kümesi için $0 \leq \underline{\alpha} < \mu_X(x)$, $0 \leq \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_X(x)$ eşitsizlikleri ve VF_Y VFP-esnek kümesi için $0 \leq \underline{\beta} < \mu_Y(x)$, $0 \leq \overline{\beta} \leq 1 - \mu_Y(x)$ eşitsizlikleri geçerli olsun. VF_X, VF_Y VFP-esnek kümelerinin birleşimi

i) Her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{X \cup Y}(x) - \gamma = max\{\mu_X(x) - \underline{\alpha}, \mu_Y(x) - \underline{\beta}\}$ ve $\underline{f_{X \cup Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = \underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}}) \cup \underline{f_Y}(x^{\underline{\beta}})$ fonksiyonları,

ii) Her $x \in E$ için $\mu_{X \cup Y}(x) = max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$ ve $f_{X \cup Y}(x) = f_X(x) \cup f_Y(x)$ fonksiyonları,

iii) Her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{X \cup Y}(x) + \gamma = max\{\mu_X(x) + \overline{\alpha}, \mu_Y(x) + \overline{\beta}\}$ ve $\overline{f_{X \cup Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = \overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}}) \cup \overline{f_Y}(x^{\overline{\beta}})$ fonksiyonları

yardımıyla elde edilir ve $VF_X \tilde{\sqcup} VF_Y$ şeklinde gösterilir [10].

Tanım 2.4.10: VF_X, $VF_Y \in VFPS(U)$ olsun. Ayrıca VF_X VFP-esnek kümesi için $0 \leq \underline{\alpha} < \mu_X(x)$, $0 \leq \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_X(x)$ eşitsizlikleri ve VF_Y VFP-esnek kümesi için $0 \leq \underline{\beta} < \mu_Y(x)$, $0 \leq \overline{\beta} \leq 1 - \mu_Y(x)$ eşitsizlikleri geçerli olsun. VF_X, VF_Y VFP-esnek kümelerinin kesişimi

i) Her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{X \cap Y}(x) - \gamma = min\{\mu_X(x) - \underline{\alpha}, \mu_Y(x) - \underline{\beta}\}$ ve $\underline{f_{X \cap Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = \underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}}) \cap \underline{f_Y}(x^{\underline{\beta}})$ fonksiyonları,

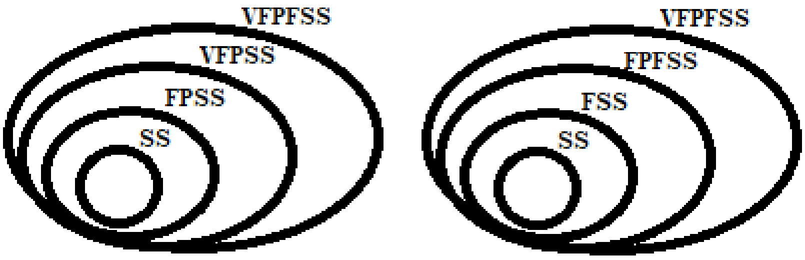
ii) Her $x \in E$ için $\mu_{X \cap Y}(x) = min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$ ve $f_{X \cap Y}(x) = f_X(x) \cap f_Y(x)$ fonksiyonları,

iii) Her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{X \cap Y}(x) + \gamma = min\{\mu_X(x) + \overline{\alpha}, \mu_Y(x) + \overline{\beta}\}$ ve $\overline{f_{X \cap Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = \overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}}) \cap \overline{f_Y}(x^{\overline{\beta}})$ fonksiyonları

yardımıyla elde edilir ve $VF_X \,\tilde{\sqcap}\, VF_Y$ şeklinde gösterilir [10].

3. VFP-BULANIK ESNEK KÜMELER (VFP-BULANIK ESNEK SETS)

Bu bölümde VFP-esnek kümelerden daha genel olan VFPFSS'leri tanımlayacağız ve ilgili bazı özelliklerini vereceğiz. Daha genel bir küme tipi olmasından dolayı VFPFSS'ler belirsizlik problemlerini ifade etmede ve bu sayede karar verme süreçlerinde bizi daha ideale yakın sonuçlara ulaştırabilmede daha başarılıdır. Ayrıca bu küme tipi aynı zamanda Cagman vd. [11] tarafından verilen FP-bulanık esnek kümelerin de bir genellemesi olduğundan burada tanımlanacak olan küme teorisinin özellikle belirsizlik problemlerinin daha belirgin şekilde ifade edilmesinde daha başarılı olacağı açıktır. Bu durum, "UYGULAMA" bölümünde detaylı bir şekilde incelenecektir.



Şekil 1. Kümeler arasındaki ilişkiler **(**Relations between sets)

Tanım 3.1: $\psi_X(x)$ her $x \in X$ için U'nun üzerindeki bir bulanık küme olsun. Her $x \notin X$ için $\psi_X(x) = \emptyset$ olmak üzere $\psi_X(x): E \to F(U)$ fonksiyonuna U üzerinde FP-bulanık esnek küme denir [11]. U üzerinde tanımlı bir Ψ_X FP-bulanık esnek kümesi;

$$\Psi_X = \left\{ \left(\frac{\mu_X(x)}{x}, \psi_X(x) \right) : \begin{array}{c} x \in E, \\ \psi_X(x) \in F(U), \\ \mu_X(x) \in [0,1] \end{array} \right\} \qquad (9)$$

biçiminde sıralı ikililerin kümesi olarak yazılabilir [11].

Tanım 3.2: U üzerindeki bir Γ_X VFPFSS

$$\underline{\Psi_X} = \{(\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})/x, \underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}})) : x \in E, x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}, \underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}}) \in F(U), \mu_X(x) \in [0,1], 0 \le \underline{\alpha} < \mu_X(x)\} \qquad (10)$$

$$\Psi_X = \{(\mu_X(x)/x, \psi_X(x)) : x \in E, \psi_X(x) \in F(U), \mu_X(x) \in [0,1]\} \qquad (11)$$

$$\overline{\Psi_X} = \{(\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})/x, \overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}})) : x \in E, x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}, \overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}}) \in F(U), \mu_X(x) \in [0,1], 0 \le \overline{\alpha} \le 1 - \mu_X(x)\} \qquad (12)$$

$$\Gamma_X = \underline{\Psi_X} \cup \Psi_X \cup \overline{\Psi_X} \qquad (13)$$

ile elde edilir. Burada $\underline{\psi_X}: \underline{E} \to F(U)$ fonksiyonu FPSES'in alt yaklaşım fonksiyonu, $\psi_X: E \to F(U)$ fonksiyonu FPSES'in yaklaşım fonksiyonu ve $\overline{\psi_X}: \overline{E} \to F(U)$ fonksiyonu ise FPSES'in üst yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır. Ayrıca $\mu_{\underline{X}}: \underline{E} \to [0,1]$ ve $\mu_{\overline{X}}: \overline{E} \to [0,1]$ üyelik fonksiyonları sayesinde $\mu_X(x) - \underline{\alpha} = \mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})$ ve $\mu_X(x) + \overline{\alpha} = \mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})$ şeklinde gösterilmiştir. Burada $\mu_X(x) = 0$ ise $\psi_X(x) = \emptyset$ dır.

U üzerinde tanımlanabilecek tüm VFPFSS'lerin kümesi $VFPFSS(U)$ ile gösterilecektir.

Özellik 3.1: $\Gamma_X \in VFPFSS(U)$ olsun. Her $x \in E, x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}, x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ ve her $u \in U$ için $\mu_{\overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}})}(u) \le \mu_{\psi_X(x)}(u) \le \mu_{\underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}})}(u)$ eşitsizliği gerçeklenir. Burada $\mu_{\overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}})}$, $\mu_{\psi_X(x)}$, $\mu_{\underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}})}$ ifadeleri sırasıyla $\overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}})$, $\psi_X(x)$, $\underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}})$ fonksiyonlarının üyelik fonksiyonlarıdır.

İspat. $\mu_X: E \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu bir parametrenin aidiyetlik derecesini ifade eder. Eğer bir parametrenin aidiyetlik derecesi arttırılsaydı, U kümesindeki nesnelerin bu parametreye karşılık gelebilme ihtimali o denli azalırdı. Yani $\mu_{\overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}})}(u)$ ifadesi $\mu_{\psi_X(x)}(u)$ sayısından daha büyük kalamazdı. Benzer şekilde parametrenin aidiyetliğinin azalması durumunda nesnelerin bu parametreye karşılık gelebilme ihtimali artar. Yani $\mu_{\psi_X(x)}(u)$ ifadesi de $\mu_{\underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}})}(u)$ değerinden daha büyük kalamaz. Bundan dolayı eşitsizliğin doğruluğu Tanım 2.4.2 ve Tanım 3.1'den açıktır.

Uyarı 3.1: VFPFSS ve VFP-esnek küme arasındaki farklılık sadece U evren kümesindeki elemanların üyelik fonksiyonlarıyla ifade edilmesindendir. Bundan dolayı VFP-esnek kümeler için verilen E parametre kümesindeki her özellik VFPFSS için de aynıdır. Bu durumda, Özellik 2.4.1 ve Uyarı 2.4.1 VFPFSS için de aynı şekilde olduğu açıktır.

Örnek 2.4.2: Nesnelerin kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ve parametrelerin kümesi $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ şeklinde verildiğini varsayalım. O halde sanal parametrelerimiz $\underline{E} = \left\{x_1^{\underline{\alpha_1}}, x_2^{\underline{\alpha_2}}, x_3^{\underline{\alpha_3}}\right\}$, $\overline{E} = \left\{x_1^{\overline{\alpha_1}}, x_2^{\overline{\alpha_2}}, x_3^{\overline{\alpha_3}}\right\}$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca $\underline{E}$, E, $\overline{E}$ üzerindeki bulanık kümeler sırasıyla $\underline{X} = \left\{{}^{0.4}/_{x_1}, {}^{0.25}/_{x_2}\right\}$, $X = \left\{{}^{0.6}/_{x_1}, {}^{0.5}/_{x_2}\right\}$, $\overline{X} = \left\{{}^{0.85}/_{x_1}, {}^{0.9}/_{x_2}\right\}$ şeklinde ifade edilsin. Dahası yaklaşım fonksiyonlarının aşağıdaki şekilde verildiğini düşünelim,

$$\underline{\psi_X}(x_1^{0.2}) = \left\{{}^{0.8}/_{u_2}, {}^{0.95}/_{u_4}, {}^{0.15}/_{u_5}\right\},$$
$$\underline{\psi_X}(x_2^{0.25}) = \left\{{}^{0.5}/_{u_1}, {}^{0.65}/_{u_3}, {}^{0.75}/_{u_4}, {}^{0.42}/_{u_5}\right\},$$
$$\psi_X(x_1) = \left\{{}^{0.2}/_{u_2}, {}^{0.45}/_{u_4}, {}^{0.1}/_{u_5}\right\},$$
$$\psi_X(x_2) = \{{}^{0.2}/_{u_1}, {}^{0.3}/_{u_3}, {}^{0.6}/_{u_4}\},$$
$$\overline{\psi_X}(x_1^{0.25}) = \{{}^{0.3}/_{u_4}, {}^{0.02}/_{u_5}\},$$
$$\overline{\psi_X}(x_2^{0.4}) = \left\{{}^{0.25}/_{u_3}, {}^{0.4}/_{u_4}\right\}.$$

Burada x_1 için $\underline{\alpha_1}$ değeri $0 \leq \underline{\alpha_1} < 0.6$ için seçilmeli ve x_2 için $\underline{\alpha_2}$ değeri $0 \leq \underline{\alpha_2} < 0.4$ için seçilmeli olup $\underline{\alpha_1} = 0.2$ ve $\underline{\alpha_2} = 0.25$ değerleri tercih edilmiştir. Ayrıca x_1 için $\overline{\alpha_1}$ değeri $0 \leq \overline{\alpha_1} \leq 0.35$ için seçilmeli ve x_2 için $\overline{\alpha_2}$ değeri $0 \leq \overline{\alpha_2} \leq 0.75$ için seçilmeli olup $\overline{\alpha_1} = 0.25$ ve $\overline{\alpha_2} = 0.4$ değerleri tercih edilmiştir. Bu durumda verilen yaklaşım fonksiyonlarından yararlanılarak elde edilen FP-bulanık esnek kümeleri belirtelim:

$$\underline{\Psi_X} = \left\{\left(0.4/x_1, \left\{{}^{0.8}/_{u_2}, {}^{0.95}/_{u_4}, {}^{0.15}/_{u_5}\right\}\right), \left(0.25/x_2, \left\{{}^{0.5}/_{u_1}, {}^{0.65}/_{u_3}, {}^{0.75}/_{u_4}, {}^{0.42}/_{u_5}\right\}\right)\right\},$$
$$\Psi_X = \left\{\left(0.6/x_1, \left\{{}^{0.2}/_{u_2}, {}^{0.45}/_{u_4}, {}^{0.1}/_{u_5}\right\}\right), \left(0.5/x_2, \{{}^{0.2}/_{u_1}, {}^{0.3}/_{u_3}, {}^{0.6}/_{u_4}\}\right)\right\},$$
$$\overline{\Psi_X} = \left\{\left(0.85/x_1, \{{}^{0.3}/_{u_4}, {}^{0.02}/_{u_5}\}\right), \left(0.9/x_2, \left\{{}^{0.25}/_{u_3}, {}^{0.4}/_{u_4}\right\}\right)\right\}.$$

Dolayısıyla Γ_X VFPFSS'si şöyle yazılır:

$$\Gamma_X = \left\{\begin{matrix} \left(0.4/x_1, \left\{{}^{0.8}/_{u_2}, {}^{0.95}/_{u_4}, {}^{0.15}/_{u_5}\right\}\right), \left(0.25/x_2, \left\{{}^{0.5}/_{u_1}, {}^{0.65}/_{u_3}, {}^{0.75}/_{u_4}, {}^{0.42}/_{u_5}\right\}\right) \\ \left(0.6/x_1, \left\{{}^{0.2}/_{u_2}, {}^{0.45}/_{u_4}, {}^{0.1}/_{u_5}\right\}\right), \left(0.5/x_2, \{{}^{0.2}/_{u_1}, {}^{0.3}/_{u_3}, {}^{0.6}/_{u_4}\}\right) \\ \left(0.85/x_1, \{{}^{0.3}/_{u_4}, {}^{0.02}/_{u_5}\}\right), \left(0.9/x_2, \left\{{}^{0.25}/_{u_3}, {}^{0.4}/_{u_4}\right\}\right) \end{matrix}\right\}$$

Tanım 3.3: $\Gamma_X \in VFPS(U)$ olsun.

(i) Her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}}) = \emptyset$ ise Γ_X'e, X −boş VFPFSS denir ve $\widetilde{\Gamma_{\emptyset_X}}$ ile gösterilir. Eğer $\underline{X} = \emptyset$ ise Γ_X'e boş VFPFSS denir ve $\widetilde{\Gamma_{\emptyset}}$ ile gösterilir.

(ii) Her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{X}$ için $\overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}}) = U$ ve $\mu_X(x^{\overline{\alpha}}) = 1$ ise Γ_X'e, X −evrensel VFPFSS denir ve $\widetilde{\Gamma_{\overline{X}}}$ ile gösterilir. Özel olarak $\overline{X} = \overline{E}$ olarak alınırsa Γ_X'e, X −evrensel VFPFSS denir ve $\widetilde{\Gamma_{\overline{E}}}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4: Γ_X, $\Gamma_Y \in VFPFSS(U)$ olsun. Ayrıca VF_X VFPFSS'si için $0 \leq \underline{\alpha} < \mu_X(x)$, $0 \leq \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_X(x)$ eşitsizlikleri ve Γ_Y VFPFSS'si için $0 \leq \underline{\beta} < \mu_Y(x)$, $0 \leq \overline{\beta} \leq 1 - \mu_Y(x)$ eşitsizlikleri geçerli olmak üzere,

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}) \leq \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})$ ve $\underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}}) \subseteq \underline{\psi_Y}(x^{\underline{\beta}})$,

ii) her $x \in E$ için $\mu_X(x) \leq \mu_Y(x)$ ve $\psi_X(x) \subseteq \psi_Y(x)$,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}) \leq \mu_{\overline{Y}}(x^{\overline{\beta}})$ ve $\overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}}) \subseteq \overline{\psi_Y}(x^{\overline{\beta}})$

şartları sağlanır ise, o zaman Γ_X, Γ_Y nin VFP-bulanık esnek alt kümesidir ve $\Gamma_X \mathrel{\hat{\subseteq}} \Gamma_Y$ ile gösterilir. Eğer aynı koşullar altında

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}) = \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})$ ve $\underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}}) = \underline{\psi_Y}(x^{\underline{\beta}})$,

ii) her $x \in E$ için $\mu_X(x) = \mu_Y(x)$ ve $\psi_X(x) = \psi_Y(x)$,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}) = \mu_{\overline{Y}}(x^{\overline{\beta}})$ ve $\overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}}) = \overline{\psi_Y}(x^{\overline{\beta}})$

şartları sağlanır ise Γ_X ve Γ_Y VFPFSS-eşittir denir ve $VF_X = VF_Y$ ile gösterilir.

Özellik 3.2: $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in VFPFSS(U)$ olsun. Aşağıda verilenler gerçeklenir,

i) $\Gamma_X \mathrel{\hat{\subseteq}} \widetilde{\Gamma_{\overline{E}}}$

ii) $\widetilde{\Gamma_{\emptyset_X}} \mathrel{\hat{\subseteq}} \Gamma_X$

iii) $\widetilde{\Gamma_{\emptyset}} \mathrel{\hat{\subseteq}} \Gamma_X$

iv) $\Gamma_X \mathrel{\hat{\subseteq}} \Gamma_X$

v) $\Gamma_X \mathrel{\hat{\subseteq}} \Gamma_Y$ ve $\Gamma_Y \mathrel{\hat{\subseteq}} \Gamma_Z$ ise $\Gamma_X \mathrel{\hat{\subseteq}} \Gamma_Z$

Kanıt: Herbir madde VFPFSS için verilen üyelik fonksiyonları ve yaklaşım fonksiyonları yardımıyla kolaylıkla kanıtlanabilir.

Tanım 3.5: $\Gamma_X \in VFPFSS(U)$ olsun. Γ_X VFPFSS'nin tümleyeni

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X^c}}(x^{\underline{\alpha}}) = 1 - \mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})$ ve $\underline{\psi_{X^c}}(x^{\underline{\alpha}}) = U - \underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}})$,

ii) her $x \in E$ için $\mu_{X^c}(x) = 1 - \mu_X(x)$ ve $\psi_{X^c}(x) = U - \psi_X(x)$,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X}^c}(x^{\overline{\alpha}}) = 1 - \mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})$ ve $\psi_{\overline{X^c}}(x^{\overline{\alpha}}) = U - \overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}})$

koşulları sağlanmak üzere Γ_{X^c} ile gösterilen VFPFSS'sidir.

Tanım 3.6: Γ_X, $\Gamma_Y \in VFPFSS(U)$ olsun. Ayrıca VF_X VFPFSS'si için $0 \leq \underline{\alpha} < \mu_X(x)$, $0 \leq \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_X(x)$ eşitsizlikleri ve Γ_Y VFPFSS'si için $0 \leq \underline{\beta} < \mu_Y(x)$, $0 \leq \overline{\beta} \leq 1 - \mu_Y(x)$ eşitsizlikleri geçerli olmak üzere, Γ_X, Γ_Y VFPFSS'lerinin birleşimi

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X \cup Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = max\{\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}), \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})\}$ ve $\underline{\psi_{X \cup Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = \underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}}) \cup \underline{\psi_Y}(x^{\underline{\beta}})$ fonksiyonları,

ii) her $x \in E$ için $\mu_{X \cup Y}(x) = max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$ ve $\psi_{X \cup Y}(x) = \psi_X(x) \cup \psi_Y(x)$ fonksiyonları,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X \cup Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = max\left\{\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}), \mu_{\overline{X}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)\right\}$ ve $\overline{\psi_{X \cup Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = \overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}}) \cup \overline{\psi_Y}(x^{\overline{\beta}})$ fonksiyonları

yardımıyla elde edilir ve $\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \Gamma_Y$ şeklinde gösterilir. Ayrıca verilen VFPFSS'lerin kesişimi ise

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X \cap Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = min\{\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}), \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})\}$ ve $\underline{\psi_{X \cap Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = \underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}}) \cap \underline{\psi_Y}(x^{\underline{\beta}})$ fonksiyonları,

ii) her $x \in E$ için $\mu_{X \cap Y}(x) = min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$ ve $\psi_{X \cap Y}(x) = \psi_X(x) \cap \psi_Y(x)$ fonksiyonları,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X \cap Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = min\left\{\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}), \mu_{\overline{X}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)\right\}$ ve $\overline{\psi_{X \cap Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = \overline{\psi_X}(x^{\overline{\alpha}}) \cap \overline{\psi_Y}(x^{\overline{\beta}})$ fonksiyonları

yardımıyla elde edilir ve $\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \Gamma_Y$ şeklinde gösterilir.

Özellik 3.3: $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in VFPFSS(U)$ olsun. Aşağıda verilenler gerçeklenir,

i) $\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \Gamma_X = \Gamma_X$ ve $\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \Gamma_X = \Gamma_X$

ii) $\widetilde{\Gamma_{\emptyset_X}} \,\hat{\cup}\, \Gamma_X = \Gamma_X$ ve $\widetilde{\Gamma_{\emptyset_X}} \,\hat{\cap}\, \Gamma_X = \widetilde{\Gamma_{\emptyset_X}}$

iii) $\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \widetilde{\Gamma_\emptyset} = \Gamma_X$ ve $\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \widetilde{\Gamma_\emptyset} = \widetilde{\Gamma_\emptyset}$

iv) $\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \widetilde{\Gamma_E} = \widetilde{\Gamma_E}$ ve $\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \widetilde{\Gamma_E} = \Gamma_X$

v) $\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \Gamma_Y = \Gamma_Y \,\hat{\cup}\, \Gamma_X$ ve $\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \Gamma_Y = \Gamma_Y \,\hat{\cap}\, \Gamma_X$

vi) $(\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \Gamma_Y) \,\hat{\cup}\, \Gamma_Z = \Gamma_X \,\hat{\cup}\, (\Gamma_Y \,\hat{\cup}\, \Gamma_Z)$ ve $(\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \Gamma_Y) \,\hat{\cap}\, \Gamma_Z = \Gamma_X \,\hat{\cap}\, (\Gamma_Y \,\hat{\cap}\, \Gamma_Z)$

Kanıt: Herbir madde VFPFSS için verilen üyelik fonksiyonları ve yaklaşım fonksiyonları yardımıyla Tanım 3.6'dan kolaylıkla elde edilebilir.

Uyarı 3.1: $\Gamma_X \in VFPFSS(U)$ olsun. Eğer $\Gamma_X \neq \widetilde{\Gamma_{\tilde{E}}}$ ya da $\Gamma_X \neq \widetilde{\Gamma_\emptyset}$ gerçeklenirse $\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \Gamma_{X^c} \neq \widetilde{\Gamma_{\tilde{E}}}$ ve $\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \Gamma_{X^c} \neq \widetilde{\Gamma_\emptyset}$ dir.

Özellik 3.4: $\Gamma_X, \Gamma_Y \in VFPFSS(U)$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen De Morgan kuralları gerçeklenir,

i) $(\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \Gamma_Y)^c = \Gamma_X^c \,\hat{\cap}\, \Gamma_Y^c$

ii) $(\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \Gamma_Y)^c = \Gamma_X^c \,\hat{\cup}\, \Gamma_Y^c$

Kanıt: i) kanıtlanacaktır, ii) nin kanıtı benzerdir. Kanıt için Tanım 3.5 den faydalanacağız. İlk olarak her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için,

$$\begin{aligned}
\mu_{\underline{(XUY)^c}}(x^{\underline{\gamma}}) &= 1 - \mu_{\underline{(XUY)}}(x^{\underline{\gamma}}) \\
&= 1 - max\{\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}), \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})\} \\
&= min\{1 - \mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}), 1 - \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})\} \\
&= min\{\mu_{\underline{X^c}}(x^{\underline{\alpha}}), \mu_{\underline{Y^c}}(x^{\underline{\beta}})\} \\
&= \mu_{\underline{X^c \cap Y^c}}(x^{\underline{\gamma}})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\psi_{\underline{(XUY)}^c}(x^{\underline{\gamma}}) &= \left(\underline{\psi_X}(x^{\underline{\alpha}}) \cup \underline{\psi_Y}(x^{\underline{\beta}})\right)^c \\
&= \underline{\psi_{X^c}}(x^{\underline{\alpha}}) \cap \underline{\psi_{Y^c}}(x^{\underline{\beta}}) = \psi_{\underline{X^c \cap Y^c}}(x^{\underline{\gamma}})
\end{aligned}$$

olup Tanım 3.5'te verilen ii) ve iii) maddeleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Özellik 3.5: $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in VFPFSS(U)$ olsun. Bu durumda aşağıda verilenler gerçeklenir,

i) $\Gamma_X \,\hat{\cup}\, (\Gamma_Y \,\hat{\cap}\, \Gamma_Z) = (\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \Gamma_Y) \,\hat{\cap}\, (\Gamma_X \,\hat{\cup}\, \Gamma_Z)$

ii) $\Gamma_X \,\hat{\cap}\, (\Gamma_Y \,\hat{\cup}\, \Gamma_Z) = (\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \Gamma_Y) \,\hat{\cup}\, (\Gamma_X \,\hat{\cap}\, \Gamma_Z)$

Kanıt: Kanıtlar Tanım 3.6'dan kolaylıkla gösterilebilir.

4. UYGULAMA (APPLICATION)

Bu bölümde, karar verme problemlerinde VFPFSS'lerin FP-esnek kümeler ve FP-bulanık esnek kümelerden daha iyi bir şekilde belirsizliği ifade edebildiğini göstereceğiz. Bunun için VFPFSS'lerden faydalanmanın önemi bir algoritma vasıtasıyla gösterilecek ve algoritmanın bir uygulama üzerindeki sonuçları incelenecektir.

Önerilen algoritmayı vermeden önce bazı teknik formülasyonlar ifade edilecektir,

Tanım 4.1: Γ_X, U üzerinde bir VFPFSS olsun. Γ_X VFPFSS'sini bir matris yardımıyla aşağıdaki gibi karakterize edebiliriz;

$$M_{\Gamma_X} = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{k1} & \Lambda_{k2} & \cdots & \Lambda_{kn} \end{pmatrix}_{k \times n} \end{array}$$

İfade edilen matristeki her bir bileşen $\Lambda_{ij} = \left(\mu_{\underline{\psi_X}\left(x_j^{\underline{\alpha}}\right)}(u_i), \mu_{\psi_X(x_j)}(u_i), \mu_{\overline{\psi_X}\left(x_j^{\overline{\alpha}}\right)}(u_i)\right)$ şeklinde üçlülerden oluşmaktadır. Burada $\mu_{\underline{\psi_X}\left(x_j^{\underline{\alpha}}\right)}(u_i)$, $\mu_{\psi_X(x_j)}(u_i)$, $\mu_{\overline{\psi_X}\left(x_j^{\overline{\alpha}}\right)}(u_i)$ ifadeleri sırasıyla $\underline{\psi_X}\left(x_j^{\underline{\alpha}}\right)$, $\psi_X(x_j)$ ve $\overline{\psi_X}\left(x_j^{\overline{\alpha}}\right)$ yaklaşım fonksiyonlarının üyelik fonksiyonlarıdır.

Tanım 4.2: Γ_X, U üzerinde bir VFPFSS olsun. Her $x_j \in$ E parametresi için $E_{\Gamma_X}^j = \left(\mu_{\underline{X}}\left(x_j^{\underline{\alpha}}\right), \mu_X(x_j), \mu_{\overline{X}}\left(x_j^{\overline{\alpha}}\right)\right)$ üçlüleri ile ifade edilen vektöre x_j parametresinin "genel üyelik vektörü" denir. E parametre kümesindeki her parametre için genel üyelik vektörlerini aşağıda verildiği şekilde bir matris yardımıyla ifade edebiliriz;

$$\mathrm{E}_{\Gamma_X} = \begin{pmatrix} E^1_{\Gamma_X} \\ E^2_{\Gamma_X} \\ \vdots \\ E^n_{\Gamma_X} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Tanım 4.3: Γ_X, U üzerinde bir VFPFSS olsun. M_{Γ_X} ve E_{Γ_X} matris çarpımı bize her bir nesnenin tüm parametreler arasından istenilen parametreleri ne kadar sağlayıp ya da ne kadar sağlamadığı hakkında genel skoru bize ifade eder. Bu durumda,

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{k1} & \Lambda_{k2} & \cdots & \Lambda_{kn} \end{pmatrix}_{k\times n} \begin{pmatrix} E^1_{\Gamma_X} \\ E^2_{\Gamma_X} \\ \vdots \\ E^n_{\Gamma_X} \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} \Sigma(u_1) \\ \Sigma(u_2) \\ \vdots \\ \Sigma(u_k) \end{pmatrix}_{k\times 1}$$

matris çarpımı yani bir başka değişle,

$$\Sigma(u_i) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ij} \times E^j_{\Gamma_X} \tag{14}$$

toplamı hesaplanır. Burada $\Lambda_{ij} \times W_j$ skaler çarpımı

$$\Lambda_{ij} \times E^j_{\Gamma_X} = \left(\mu_{\underline{\psi_X}(x_j^{\underline{\alpha}})}(u_i), \mu_{\psi_X(x_j)}(u_i), \mu_{\overline{\psi_X}(x_j^{\overline{\alpha}})}(u_i)\right) \times \left(\mu_{\underline{X}}\left(x_j^{\underline{\alpha}}\right), \mu_X(x_j), \mu_{\overline{X}}(x_j^{\overline{\alpha}})\right) = \mu_{\underline{\psi_X}(x_j^{\underline{\alpha}})}(u_i)\mu_{\underline{X}}\left(x_j^{\underline{\alpha}}\right) + \mu_{\psi_X(x_j)}(u_i)\mu_X(x_j) + \mu_{\overline{\psi_X}(x_j^{\overline{\alpha}})}(u_i)\mu_{\overline{X}}(x_j^{\overline{\alpha}}) \tag{15}$$

şeklinde hesaplanır**.**

Algoritma:

Adım 1. $A \subseteq E$ istenilen parametre kümesi, U evren kümesi ve X, E üzerinde bir bulanık küme olacak şekilde temel kümeleri gir.

Adım 2. Karşılaşılan belirsizlik problemini FP-bulanık esnek küme ile ifade et.

Adım 3. Her parametre için $\mu_{\underline{X}}\left(x_j^{\underline{\alpha}}\right)$ ve $\mu_{\overline{X}}(x_j^{\overline{\alpha}})$ üyelik fonksiyonlarını ve bu üyelik fonksiyonlarına karşılık gelen yaklaşım fonksiyonlarını gir.

Adım 5. Yaklaşım fonksiyonlarından yararlanarak mevcut belirsizlik problemini VFPFSS'ler yardımıyla ifade et.

Adım 6. Her $u_i \in U$ için $\Sigma(u_i)$ değerlerini hesapla.

Adım 7. $\Sigma(u_l) = max\{\Sigma(u_i): 1 \le i \le k\}$ değerini bul.

Adım 8. u_l nesnesi istenen parametreleri en iyi karşılayan elemandır.

Şimdi bu algoritmayı bir belirsizlik problemi üzerinde inceleyelim,

Açıklayıcı Örnek: Bir şirket bir pozisyonda istediği kriterlere en uygun personeli işe almak istiyor. Şirkete bu amaçla başvuran alternatiflerin kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ olsun. Buna karşın, şirketin istediği kriterleri ifade eden parametre kümesi ise $E = \{e_1 = bilgisayar\ bilgisi,\ e_2 = deneyim, e_3 = etkileyici\ konuşma\}$ şeklinde verilsin. Şirketin işe alım komitesi bu seçimi en doğru şekilde yapabilmek için kişilere üç aşamalı bir test yapacağını açıklıyor. Bu testler hakkındaki bilgilendirme şöyle ifade ediliyor,

i. İlk test en kolay ve son test en zor olmak üzere tüm test sonuçları her bir aday için dikkate alınacaktır.

ii. Test zorluklarının artması alınacak olan puanında yüksek olacağını ifade eder.

İlk testin zorluk derecesi her bir parametre için sırasıyla 0.25, 0.56, 0.12; ikinci testin zorluk derecesi her bir parametre için sırasıyla 0.4, 0.75, 0.37; üçüncü testin zorluk derecesi her bir parametre için sırasıyla 0.64, 0.87, 0.7 şeklinde veriliyor. Dahası bu zorluk dereceleri üyelik fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$\mu_{\underline{X}}(x_1^{0.15}) = 0.25$, $\mu_{\underline{X}}(x_2^{0.19}) = 0.56$, $\mu_{\underline{X}}(x_3^{0.25}) = 0.12$, yani $\underline{X} = \{0.25/x_1, 0.56/x_2, 0.12/x_3\}$,

$\mu_X(x_1) = 0.4$, $\mu_X(x_2) = 0.75$, $\mu_X(x_3) = 0.37$, yani $\mathrm{X} = \{0.4/x_1, 0.75/x_2, 0.37/x_3\}$,

$\mu_{\overline{X}}(x_1^{0.24}) = 0.64$, $\mu_{\overline{X}}(x_2^{0.12}) = 0.87$, $\mu_{\overline{X}}(x_3^{0.43}) = 0.7$, yani $\overline{X} = \{0.64/x_1, 0.87/x_2, 0.7/x_3\}$.

Açıktır ki; yapılan testlerin zorluk derecelerini değiştirirsek seçilen nesne kümesindeki nesne grubunun farklılaşmasına sebebiyet verebiliriz. Bu durum daha açık bir şekilde Dalkılıç ve Demirtaş [10] tarafından ifade edilmiştir.

Şimdi ise işe alım komitesi tarafından elde edilen test sonuçlarını yaklaşım fonksiyonları yardımıyla ifade edelim:

$$\underline{f_X}(x_1^{0.15}) = \left\{{}^{0.7}/_{u_1}, {}^{1}/_{u_2}, {}^{0.44}/_{u_3}, {}^{1}/_{u_4}, {}^{0.58}/_{u_5}, {}^{0.6}/_{u_6}, {}^{1}/_{u_7}, {}^{0.43}/_{u_8}, {}^{0.74}/_{u_9}\right\},$$

$$\underline{f_X}(x_2^{0.19}) = \left\{{}^{1}/_{u_1}, {}^{0.75}/_{u_2}, {}^{0.58}/_{u_3}, {}^{0.9}/_{u_4}, {}^{0.72}/_{u_5}, {}^{1}/_{u_6}, {}^{1}/_{u_7}, {}^{0.54}/_{u_8}, {}^{1}/_{u_9}\right\},$$

$$\underline{f_X}(x_3^{0.25}) = \left\{{}^{1}/_{u_1}, {}^{1}/_{u_2}, {}^{0.74}/_{u_3}, {}^{1}/_{u_4}, {}^{1}/_{u_5}, {}^{0.33}/_{u_6}, {}^{1}/_{u_7}, {}^{0.72}/_{u_8}, {}^{0.5}/_{u_9}\right\},$$

$$f_X(x_1) = \left\{{}^{0.35}/_{u_1}, {}^{0.72}/_{u_2}, {}^{0.35}/_{u_3}, {}^{1}/_{u_4}, {}^{0.34}/_{u_5}, {}^{0.21}/_{u_6}, {}^{1}/_{u_7}, {}^{0.21}/_{u_8}, {}^{0.5}/_{u_9}\right\},$$

$$f_X(x_2) = \left\{{}^{1}/_{u_1}, {}^{0.61}/_{u_2}, {}^{0.42}/_{u_3}, {}^{0.35}/_{u_4}, {}^{0.54}/_{u_5}, {}^{1}/_{u_6}, {}^{0.84}/_{u_7}, {}^{0.12}/_{u_8}, {}^{1}/_{u_9}\right\},$$

$$f_X(x_3) = \left\{{}^{0.5}/_{u_1}, {}^{1}/_{u_2}, {}^{0.66}/_{u_3}, {}^{1}/_{u_4}, {}^{1}/_{u_5}, {}^{0.18}/_{u_6}, {}^{0.37}/_{u_7}, {}^{0.67}/_{u_8}, {}^{0.32}/_{u_9}\right\},$$

$$\overline{f_X}(x_1^{0.24}) = \left\{{}^{0.2}/_{u_1}, {}^{0.6}/_{u_2}, {}^{0.23}/_{u_3}, {}^{1}/_{u_4}, {}^{0.23}/_{u_5}, {}^{0.2}/_{u_6}, {}^{0.55}/_{u_7}, {}^{0.12}/_{u_8}, {}^{0.1}/_{u_9}\right\},$$

$$\overline{f_X}(x_2^{0.12}) = \left\{{}^{0.23}/{u_1}, {}^{0.58}/{u_2}, {}^{0.32}/{u_3}, {}^{0.27}/{u_4}, {}^{0.42}/{u_5}, {}^{1}/{u_6}, {}^{0.76}/{u_7}, {}^{0.08}/{u_8}, {}^{1}/{u_9}\right\},$$
$$\overline{f_X}(x_3^{0.43}) = \left\{{}^{0.4}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.25}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{1}/{u_5}, {}^{0}/{u_6}, {}^{0.1}/{u_7}, {}^{0.44}/{u_8}, {}^{0.2}/{u_9}\right\}.$$

Bu durumda Γ_X VFPFSS aşağıdaki şekilde üç FP-bulanık esnek kümenin birleşimidir,

$$\underline{\Psi_X} = \left\{\begin{matrix} \left(0.25/x_1, \left\{{}^{0.7}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.44}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{0.58}/{u_5}, {}^{0.6}/{u_6}, {}^{1}/{u_7}, {}^{0.43}/{u_8}, {}^{0.74}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.56/x_2, \left\{{}^{1}/{u_1}, {}^{0.75}/{u_2}, {}^{0.58}/{u_3}, {}^{0.9}/{u_4}, {}^{0.72}/{u_5}, {}^{1}/{u_6}, {}^{1}/{u_7}, {}^{0.54}/{u_8}, {}^{1}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.12/x_3, \left\{{}^{1}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.74}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{1}/{u_5}, {}^{0.33}/{u_6}, {}^{1}/{u_7}, {}^{0.72}/{u_8}, {}^{0.5}/{u_9}\right\}\right) \end{matrix}\right\},$$

$$\Psi_X = \left\{\begin{matrix} \left(0.4/x_1, \left\{{}^{0.35}/{u_1}, {}^{0.72}/{u_2}, {}^{0.35}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{0.34}/{u_5}, {}^{0.21}/{u_6}, {}^{1}/{u_7}, {}^{0.21}/{u_8}, {}^{0.5}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.75/x_2, \left\{{}^{1}/{u_1}, {}^{0.61}/{u_2}, {}^{0.42}/{u_3}, {}^{0.35}/{u_4}, {}^{0.54}/{u_5}, {}^{1}/{u_6}, {}^{0.84}/{u_7}, {}^{0.12}/{u_8}, {}^{1}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.37/x_3, \left\{{}^{0.5}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.66}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{1}/{u_5}, {}^{0.18}/{u_6}, {}^{0.37}/{u_7}, {}^{0.67}/{u_8}, {}^{0.32}/{u_9}\right\}\right) \end{matrix}\right\},$$

$$\overline{\Psi_X} = \left\{\begin{matrix} \left(0.64/x_1, \left\{{}^{0.2}/{u_1}, {}^{0.6}/{u_2}, {}^{0.23}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{0.23}/{u_5}, {}^{0.2}/{u_6}, {}^{0.55}/{u_7}, {}^{0.12}/{u_8}, {}^{0.1}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.87/x_2, \left\{{}^{0.23}/{u_1}, {}^{0.58}/{u_2}, {}^{0.32}/{u_3}, {}^{0.27}/{u_4}, {}^{0.42}/{u_5}, {}^{1}/{u_6}, {}^{0.76}/{u_7}, {}^{0.08}/{u_8}, {}^{1}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.7/x_3, \left\{{}^{0.4}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.25}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{1}/{u_5}, {}^{0}/{u_6}, {}^{0.1}/{u_7}, {}^{0.44}/{u_8}, {}^{0.2}/{u_9}\right\}\right) \end{matrix}\right\},$$

$$\Gamma_X = \left\{\begin{matrix} \left(0.25/x_1, \left\{{}^{0.7}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.44}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{0.58}/{u_5}, {}^{0.6}/{u_6}, {}^{1}/{u_7}, {}^{0.43}/{u_8}, {}^{0.74}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.56/x_2, \left\{{}^{1}/{u_1}, {}^{0.75}/{u_2}, {}^{0.58}/{u_3}, {}^{0.9}/{u_4}, {}^{0.72}/{u_5}, {}^{1}/{u_6}, {}^{1}/{u_7}, {}^{0.54}/{u_8}, {}^{1}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.12/x_3, \left\{{}^{1}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.74}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{1}/{u_5}, {}^{0.33}/{u_6}, {}^{1}/{u_7}, {}^{0.72}/{u_8}, {}^{0.5}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.4/x_1, \left\{{}^{0.35}/{u_1}, {}^{0.72}/{u_2}, {}^{0.35}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{0.34}/{u_5}, {}^{0.21}/{u_6}, {}^{1}/{u_7}, {}^{0.21}/{u_8}, {}^{0.5}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.75/x_2, \left\{{}^{1}/{u_1}, {}^{0.61}/{u_2}, {}^{0.42}/{u_3}, {}^{0.35}/{u_4}, {}^{0.54}/{u_5}, {}^{1}/{u_6}, {}^{0.84}/{u_7}, {}^{0.12}/{u_8}, {}^{1}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.37/x_3, \left\{{}^{0.5}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.66}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{1}/{u_5}, {}^{0.18}/{u_6}, {}^{0.37}/{u_7}, {}^{0.67}/{u_8}, {}^{0.32}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.64/x_1, \left\{{}^{0.2}/{u_1}, {}^{0.6}/{u_2}, {}^{0.23}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{0.23}/{u_5}, {}^{0.2}/{u_6}, {}^{0.55}/{u_7}, {}^{0.12}/{u_8}, {}^{0.1}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.87/x_2, \left\{{}^{0.23}/{u_1}, {}^{0.58}/{u_2}, {}^{0.32}/{u_3}, {}^{0.27}/{u_4}, {}^{0.42}/{u_5}, {}^{1}/{u_6}, {}^{0.76}/{u_7}, {}^{0.08}/{u_8}, {}^{1}/{u_9}\right\}\right), \\ \left(0.7/x_3, \left\{{}^{0.4}/{u_1}, {}^{1}/{u_2}, {}^{0.25}/{u_3}, {}^{1}/{u_4}, {}^{1}/{u_5}, {}^{0}/{u_6}, {}^{0.1}/{u_7}, {}^{0.44}/{u_8}, {}^{0.2}/{u_9}\right\}\right) \end{matrix}\right\}$$

Elde edilen Γ_X VFPFSS daha açık bir şekilde aşağıdaki şekilde ifade etmek belirsizlik problemlerini ifade etmenin daha kolay bir yoludur,

$$M_{\Gamma_X} = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0.7,1,1) & (0.35,1,0.5) & (0.2,0.23,0.4) \\ (1,0.75,1) & (0.72,0.61,1) & (0.6,0.58,1) \\ (0.44,0.58,0.74) & (0.35,0.42,0.66) & (0.23,0.32,0.25) \\ (1,0.9,1) & (1,0.35,1) & (1,0.27,1) \\ (0.58,0.72,1) & (0.34,0.54,1) & (0.23,0.42,1) \\ (0.6,1,0.33) & (0.21,1,0.18) & (0.2,1,0) \\ (1,1,1) & (1,0.84,0.37) & (0.55,0.76,0.1) \\ (0.43,0.54,0.72) & (0.21,0.12,0.67) & (0.12,0.08,0.44) \\ (0.74,1,0.5) & (0.5,1,0.32) & (0.1,1,0.2) \end{pmatrix}_{9\times 3} \end{array}$$

Dahası E parametre kümesindeki her parametre için genel üyelik vektörlerini ifade eden matris aşağıda verilmiştir,

$$E_{\Gamma_X} = \begin{pmatrix} (0.25,0.56,0.12) \\ (0.4,0.75,0.37) \\ (0.64,0.87,0.7) \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Şimdi her nesnenin ayrı ayrı istenilen parametreleri ne kadar sağlayıp ya da ne kadar sağlamadığı hakkında genel skoru hesaplayalım.

$$\begin{pmatrix} (0.7,1,1) & (0.35,1,0.5) & (0.2,0.23,0.4) \\ (1,0.75,1) & (0.72,0.61,1) & (0.6,0.58,1) \\ (0.44,0.58,0.74) & (0.35,0.42,0.66) & (0.23,0.32,0.25) \\ (1,0.9,1) & (1,0.35,1) & (1,0.27,1) \\ (0.58,0.72,1) & (0.34,0.54,1) & (0.23,0.42,1) \\ (0.6,1,0.33) & (0.21,1,0.18) & (0.2,1,0) \\ (1,1,1) & (1,0.84,0.37) & (0.55,0.76,0.1) \\ (0.43,0.54,0.72) & (0.21,0.12,0.67) & (0.12,0.08,0.44) \\ (0.74,1,0.5) & (0.5,1,0.32) & (0.1,1,0.2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0.25,0.56,0.12) \\ (0.4,0.75,0.37) \\ (0.64,0.87,0.7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5381 \\ 3.4941 \\ 1.8234 \\ 3.4814 \\ 2.7918 \\ 2.6482 \\ 3.1801 \\ 1.3726 \\ 2.9474 \end{pmatrix}$$

Bu durumda $\Sigma(u_2) = max\{\Sigma(u_i): 1 \leq i \leq k\}$ olduğundan istenilen kriterlere en uygun alternatifin u_2 olduğunu öneriyoruz.

Peki verilen belirsizlik problemini VFP-esnek küme (VFPSS) veya FP-bulanık esnek küme (FPFSS) ile çözseydik yine de aynı sonuçlara ulaşabilirmiydik? Bu sorunun genel halde cevabı hayırdır. Örneğin çalışmamızda verilen problem için üç küme teorisinin karşılşatırmalı sonuçları aşaıdaki tabloda verilmiştir, (VFPSS için nesnelerin üyelikleri ancak 0 veya 1 olacağı dikkat edilmelidir.)

Çizelge 1. Üç küme tipine göre skorların sonuçları (Results of scores by three set types)

Nesneler	VFPFSS	FPFSS	VFPSS
u_1	2.5381	1.075	1.43
u_2	3.4941	1.1155	1.44
u_3	1.8234	0.6992	0
u_4	3.4814	1.0325	2.48
u_5	2.7918	0.911	1.19
u_6	2.6482	0.9006	2.18
u_7	3.1801	1.1669	1.33
u_8	1.3726	0.4219	0
u_9	2.9474	1.0684	2.18

Çizelge 1'de görüldüğü üzere aynı belirsizlik problemini ifade etmede FPFSS kullanılsaydı en iyi alternatif u_7, VFPSS kullanılsaydı en iyi alternatif u_4 olacaktı. Ancak her iki küme tipinden de genel olan VFPFSS kullnılması sonucunda en iyi alternatifin u_2 olduğu ifade edilmiştir. Burada elde edilen sonuçların farklı olmasının değerlendirmesini yapalım,

Değerlendirme sonuçlarının farklılıkları: Burada FPFSS'lerinin değerlendirme sonuçlarının VFPFSS'lerden farklı olmasının sebebi, FPFSS'lerin yapısı gereği parametre üyelik değişimlerini göz ardı etmesinden kaynaklandığını gözlemliyoruz. Dolayısıyla burada parametre kümesindeki üyelik değişimlerinin etkisiyle nesne kümesindeki değişimleri dikkate almamızın ne kadar önemli olabileceği sonucuna ulaşıyoruz. Ayrıca VFPSS ve VFPFSS arasındaki farklılık, bulanık esnek kümelerin esnek kümelerin bir genellemesi olmasından kaynaklanır. Hibrit küme tipi, kendisini oluşturan kümelerin özelliklerini içerisinde barındırdığından belirsizliği ifade etmede daha başarılıdır. Bu durumda belirsizlik problemlerinin çözümlerini en ideale yakın bir şekilde elde etmek için sorunu en genel ve açık bir şekilde belirtebilen küme tiplerinin ele alınması gerektiği sonucuna ulaşıyoruz.

6. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada FP-bulanık esnek kümeler ve VFP-esnek kümelerden daha genel olan VFPFSS'ler tanımlanmıştır ve temel küme işlemleri incelenerek bazı özellikleri verilmiştir. Dahası, bu yeni küme tipi kullanılarak belirsizliğin ifade edilmesinde önerilen bir karar verme algoritması önerilmiştir. Ayrıca çalışmamızdaki işlemlerin karmaşıklığını engelleyerek belirsizlik durumunu daha sade bir şekilde ifade edebilmek için bazı teknik formülasyonlara da yer verilmiştir. Son olarak bir belirsizlik problemi diğer küme tiplerinin kullanılması halindeki sonuçları da incelenerek karşılaştırmalı olarak irdelenmiştir.

Belirsizlik problemlerini en ideale yakın şekilde sonuçlandırabilmek için birçok küme teorisi ortaya atılmakla birlikte birden fazla küme teorisinin birleşmesiyle elde edilen melez küme teorileri bu anlamda daha başarılı olmuşlardır. Bu yüzden çalışmamızda verilen VFPFSS'ler literatüre bu anlamda yeni bir bakış açısı sağlayabileceğini düşünüyoruz. Özellikle belirsizlik problemlerini ifade etmedeki başarısı, karar verme süreçlerinde bu teoriyi dikkat çekici yapmaktadır.

ETİK STANDARTLARIN BEYANI (DECLARATION OF ETHICAL STANDARDS)

Bu makalenin yazarları çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler.

YAZARLARIN KATKILARI (AUTHORS' CONTRIBUTIONS)

Orhan DALKILIÇ: Deneyleri yapmış ve sonuçlarını analiz etmiştir. Ayrıca makalenin yazım işlemini gerçekleştirmiştir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI (CONFLICT OF INTEREST**)**

Bu çalışmada herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] Zadeh L.A., "Fuzzy sets", ***Information and Control***, 8:338-353, (1965).

[2] Pawlak Z., "Rough sets", ***Int J Comput Inf Sci***, 11:341-356, (1982).

[3] Molodtsov D., "Soft set theory-first results", ***Comput. Math. Appl.***, 37:19-31, (1999).

[4] Maji P.K., Roy A.R. and Biswas R., "Fuzzy soft sets", ***Journal of Fuzzy Mathematics***, 9(3):589-602, (2001).

[5] Maji P.K., Roy A.R. and Biswas R., "Soft set theory", ***Computers and Mathematics with Applications***, 45(4-5): 555–562, (2003).

[6] Irfan A.M., Feng F., Liu X., Minc W.K. and Shabir M., "On some new operations in soft set theory", ***Computers and Mathematics with Applications***, 57:1547-1553, 2009.

[7] Shabir M. and Naz M., "On soft topological spaces", ***Comput. Math. Appl.***, 61:1786-1799, 2011.

[8] Çağman N., Enginoğlu S. and Çıtak F., "Fuzzy Set Theory and its Applications", ***Iranian Journal of Fuzzy Systems***, 8:137-147, (2011).

[9] Çağman N., Çıtak F. and Enginoğlu S., "FP-soft Set Theory and Its Applications", ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics***, 2: 219-226, (2011).

[10] Dalkılıç O. and Demirtaş N., "VFP-Soft Sets and Its Application on Decision Making Problems", ***Journal of Polytechnic***, https://doi.org/10.2339/politeknik.685634.

[11] Cağman N., Citak F. and Enginoglu S., "Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications", ***Turkish Journal of Fuzzy Systems***, 1(1): 21-35, (2010).

[12] Roy A.R. and Maji P.K., "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems", ***Journal of computational and Applied Mathematics***, 203 (2): 412-418, (2007).

[13] Peng X. and Jingguo D., "Hesitant fuzzy soft decision making methods based on WASPAS, MABAC and COPRAS with combined weights", ***Journal of Intelligent and Fuzzy Systems***, 33: 1313-1325, (2017).

[14] Peng X. and Harish G., "Algorithms for interval-valued fuzzy soft sets in emergency decision making based on WDBA and CODAS with new information measure", ***Computers and Industrial Engineering***, 119: 439-452, (2018).

[15] Demirtaş N., Hussaın S. and Dalkılıç O., "New approaches of inverse soft rough sets and their applications in a decision making problem", ***Journal of applied mathematics and informatics***, 38(3-4): 335-349, (2020).

[16] Demirtaş N. and Dalkılıç O., "An application in the diagnosis of prostate cancer with the help of bipolar soft rough sets", ***on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2019)***, KONYA, 283, (2019).

[17] Meng D. and Zhang X., Qin K. "Soft rough fuzzy sets and soft fuzzy rough sets", ***Computers and mathematics with applications***, *62*(12): 4635-4645, (2011).