Int. J. Adv. Eng. Pure Sci. 2021, 33(2): 250-258
DOI: 10.7240/jeps.784138

RESEARCH ARTICLE / ARAŞTIRMA MAKALESİ

Eşlenmiş Lie Grupları Üzerindeki Lagrange Fark Denklemleri

Discrete Lagrangian Dynamics on Matched Pair Lie Groups

Oğul ESEN[1], Mahmut KUDEYT[2], Serkan SÜTLÜ[3]

[1] *Gebze Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 41400 Gebze-Kocaeli, Türkiye*
[2] *Gebze Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 41400 Gebze-Kocaeli, Türkiye*
[3] *Işık Üniversitesi, Matematik Bölümü, 34980 Şile-İstanbul, Türkiye*

Öz
Bu makalede, kesikli (discrete) dinamiğin Lagrange formülasyonu eşlenmiş (matched pair) Lie grupları üzerinde çalışılmıştır. Sonuç olarak, karşılıklı etkileşim altındaki iki sistemin kolektif davranışını belirleyen *eşlenmiş (Lagrange) fark denklemleri* elde edilmiştir. İki örnek verilmiştir. İlki, bir Lie grubunun tanjant grubu üzerindeki fark denklemleri, ikincisi ise Heisenberg grubu üzerindeki fark denklemleridir.
Anahtar kelimeler: (Lagrange) fark denklemleri; eşlenmiş Lie grubu; tanjant grubu; Heisenberg grubu.

Abstract
In this work, discrete Lagrangian dynamics is studied on matched pairs of Lie groups. Accordingly, the *matched discrete (Lagrange) equation*s are introduced. These equations govern the collective motion of two mutually interacting discrete models. The theory is illustrated both on the tangent group of a Lie group, and on the Heisenberg group.
Key words: Discrete Lagrange equations; matched pair of Lie groups; tangent group; Heisenberg group.

I. GİRİŞ

Fark denklemlerini (difference equations) konfigürasyon uzayı Lie grubu olan fiziksel sistemler için de yazmak mümkündür [1]. Bu formülasyon, özellikle integrasyon ve nümerik çözümler için zengin geometrik\cebirsel bir yapı vadetmektedir [2]. G ile göstereceğimiz bir Lie grubu üzerinde tanımlı, reel değerli Lagrange fonksiyonu $\mathfrak{L}$ için, 2-adımlı olan (Euler-)Lagrange fark denklemleri

$$\mu_{k+1} = \mathrm{Ad}^*_{g_k^{-1}}\mu_k, \qquad \mu_k = T_e^* R_{g_k}\, d\mathfrak{L}(g_k) \tag{1}$$

şeklinde yazılır [1,3,4]. Burada, k bir pozitif tam sayıdır. μ_k ve μ_{k+1}, Lie cebiri $\mathfrak{g}$'nin dual uzayı $\mathfrak{g}^*$'ın elemanlarıdır. Ad^* Lie grubu G'nin dual uzay $\mathfrak{g}^*$ üzerine koadjoint etkisidir. e birim elemanı göstermek üzere $T_e^* R_{g_k}$ ise sağ öteleme dönüşümünün dualidir.

Bu makaledeki amacımız, konfigürasyon uzayı Lie grubu olan ve dinamiği fark denklemleri formunda yazılan, etki tepki içindeki iki sistemin, beraber hareketini kontrol edecek kolektif bir denklem takımı yazmaktır. Diğer bir ifade ile, problemimiz, farklı Lie grupları üzerinde tanımlı ve (1) formunda verilen iki hareket denklemini, Lie grupları birbirine karşılıklı etki ederken, birleştirip tek bir sistem olarak ifade etmektir. Bu, elbette, bireysel hareketleri veren denklemleri yan yana getirmek ile başarılamaz. Karşılıklı etki nedeniyle, beraber hareketi betimleyen fark denklemleri, bütünü oluşturan iki sistemin fark denklemlerinin dışında terimler de içerecektir. Bu ekstra terimleri belirlemek için, karşılıklı etki içindeki iki Lie grubunun nasıl birleştirilip tek bir Lie grubu yapılabileceği sorusunun cevaplanması gerekir. Bu teorik eşik, eşlenmiş (matched pair) Lie grubu tanımı [5,6,7] ile aşılacaktır. Bu terminolojiden yararlanarak, eşlenmiş Lie grubu üzerinde elde ettiğimiz kolektif denklemlere *eşlenmiş fark denklemleri* adını vereceğiz. Yaklaşımımız geometrik/cebirsel bir inşa süreci içereceğinden, uyumluluk şartını sağlayan tüm sistemler için, bu makalemizde sunacağımız *eşlenmiş fark denklemleri*ni kullanmak mümkün olacaktır. Biz de uygulama alanının genişliğini vurgulamak adına, elde ettiğimiz denklemleri biri teorik, tanjant grubu, diğeri ise daha somut, Heisenberg grubu, üzerinde çalışacağız.

Sorumlu yazar: Mahmut Kudeyt, Tel: 0542 280 48 43, e-posta: mahmutkudeyt@gmail.com
Gönderilme: 24.08.2020, **Düzenleme:** 09.03.2021, **Kabul:** 09.03.2021

Bu çalışmamız iki ana bölümden oluşmuştur. Bunların ilki, teorik olarak problemimize yaklaşımımızı sunduğumuz ve problemimizin çözümünü temel tanımlar ışığında verdiğimiz bölümdür. Eşlenmiş fark denklemleri bu bölümde sunulacaktır. Üçüncü bölümde ise teorik sonuçlarımızı özel örnekler üzerinde tartışacağız. İlk uygulama olarak, tanjant grubu üzerinde tanımlanan fark denklemlerinin, eşlenmiş fark denklemleri olarak ifade edilebileceği gösterilecektir. Diğer örnekte ise karşılıklı etki içindeki iki 3 boyutlu Heisenberg grubunun üzerindeki fark denklemlerinin eşlenmesi gerçekleştirilecektir.

II. LIE GRUBU ÜZERİNDE FARK DENKLEMLERİ VE EŞLENMELERİ

2.1. Lie Grubu ve Lie Cebiri

İlk olarak, G ile göstereceğimiz bir türetilebilir katmanı (manifold) göz önüne alalım. Bu katman, bir grup yapısına sahip olsun ve grup operasyonları – grup çarpımı ve ters alma işlemi – türevlenebilir olsun. Bu durumda, G katmanı, bir Lie grubu adını alır [9,13,22]. Bir Lie grubu G üzerindeki grup işlemini şu şekilde gösterelim:

$$G \times G \longrightarrow G, \qquad (g, \tilde{g}) \mapsto g\tilde{g}. \tag{2}$$

Grubun birim elemanını e ile, bir g elemanının tersini ise g^{-1} ile göstereceğiz. Bu grup üzerinde, L ve R ile göstereceğimiz sol ve sağ ötelemeler mevcuttur:

$$L_g(\tilde{g}) = R_{\tilde{g}}(g) = g\tilde{g}. \tag{3}$$

Denklemin en sağ tarafındaki çarpım, G üzerindeki grup çarpımıdır.

Bir Lie grubu G'ye karşılık gelen Lie cebiri $\mathfrak{g}$'yi, birim elemana teğet olan T_eG uzayı olarak tanımlayalım. Lie cebiri $\mathfrak{g}$ üzerinde, ters-simetrik ve Jacobi eşitliğini sağlayan iki-lineer bir çerçeve mevcuttur:

$$[\bullet,\bullet]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (\xi, \tilde{\xi}) \mapsto [\xi, \tilde{\xi}]. \tag{4}$$

Bu operasyon Lie çerçevesi adıyla anılır. Bu çerçeveyi, Denklem (2)'de belirlediğimiz grup çarpımından hareketle elde etmemiz mümkündür. Bunun için, öncelikle, bir $\xi \in \mathfrak{g}$ vektörü için, bu vektöre karşılık gelen sol değişmez vektör alanı

$$\vec{\xi}: G \longrightarrow TG, \qquad g \mapsto T_eL_g(\xi), \tag{5}$$

olarak tanımlanır. Burada sol ötelemenin tanjant dönüşümü (Jakobyeni) TL, sağ ötelemenin tanjant dönüşü TR ile değiştirerek, sağ değişmez vektör alanı

$$\overleftarrow{\xi}: G \longrightarrow TG, \qquad g \mapsto T_eR_g(\xi) \tag{6}$$

tanımlanır. Sol değişmez vektör alanlarını kullanarak, $\xi, \tilde{\xi} \in \mathfrak{g}$ ve $g^{-1} \in G$ için, Lie cebiri $\mathfrak{g}$ üzerinde Denklem (4) ile belirlediğimiz Lie çerçevesi

$$[\xi, \tilde{\xi}] = \mathrm{TL}_{g^{-1}}\left[\vec{\xi}, \vec{\tilde{\xi}}\right]_{JL} \tag{7}$$

şeklinde hesap edilir. Burada eşitliğin sağ tarafında JL altsimgesi ile belirlenen çerçeve, vektör alanları üzerindeki klasik Jacobi-Lie çerçevesidir. Benzer şekilde, Denklem (6)'da verilen sağ-değişmez (right-invariant) vektör alanları ile de çerçeveyi tanımlamak mümkündür. Bu şekilde elde edilecek Lie çerçevesi, Denklem (7)'deki Lie çerçevesinin eksi ile çarpılmış hali olacaktır.

Adjoint ve Koadjoint Temsiller. Bir Lie grubu G'nin, Lie cebiri $\mathfrak{g}$ üzerine sol adjoint etkisi

$$\mathrm{Ad}: G \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (g, \xi) \mapsto \mathrm{Ad}_g\xi = TL_g \circ TR_{g^{-1}}(\xi) \tag{8}$$

olarak tanımlanır. Bu etkinin türevi ise Lie cebirinin kendisi üzerine sonsuz küçük (infinitesimal) adjoint etkisini verecektir. Bu türevi hesaplamak için, Lie grubu G üzerinde x_t ile göstereceğimiz bir eğri alalım. Bu eğri, $t = 0$'da birim elemanı e'den geçsin ve bu noktadaki, yani $t = 0$'daki, türevi $\xi \in \mathfrak{g}$ vektörü olsun. Bu seçimler ışığında, sonsuz küçük adjoint etki

$$\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (\xi, \tilde{\xi}) \mapsto \mathrm{ad}_\xi\tilde{\xi} := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}_{x_t}\tilde{\xi} \tag{9}$$

olarak tanımlanır. Dikkatli bir gözlem, Denklem (9)'da tanımladığımız etki ve Denklem (7)'de tanımladığımız Lie çerçevesinin aynı olduğunu, diğer bir ifade ile, $\mathrm{ad}_\xi\tilde{\xi} = [\xi, \tilde{\xi}]$ eşitliğini verecektir. Biz, metin içinde, bu eşitlikten yararlanarak, iki gösterimi de uygunluk durumlarına göre birbirleri yerine kullanacağız.

Lie cebiri $\mathfrak{g}$ bir vektör uzayıdır ve her vektör uzay gibi, $\mathfrak{g}$'nin de bir lineer cebirsel dual uzayı bulunmaktadır. Dual uzayı $\mathfrak{g}^*$ ile göstereceğiz. Lie grubu G'nin, dual uzay $\mathfrak{g}^*$ üzerine sol koadjoint etkisi

$$\mathrm{Ad}^*: G \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \langle \mathrm{Ad}_g^*\mu, \xi \rangle = \langle \mu, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi \rangle, \quad \forall\xi \in \mathfrak{g} \tag{10}$$

olarak verilir. Denklem (10)'da, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ile gösterdiğimiz, Lie cebiri $\mathfrak{g}$ ve duali $\mathfrak{g}^*$ arasındaki doğal eşleme (pairing) olarak tanımlanmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken, dual operatör Ad_g^*'nin $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$'in duali olduğudur. Bu tercihi, Ad^* ile gösterdiğimiz koadjoint etkinin sol etki olmasını garanti etmek için yaptık. Lie cebiri $\mathfrak{g}$'nin duali $\mathfrak{g}^*$ üzerine sonsuz küçük koadjoint etkisi ise

$$\mathrm{ad}^*: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \langle \mathrm{ad}_\xi^*\mu, \tilde{\xi} \rangle = -\langle \mu, \mathrm{ad}_\xi\tilde{\xi} \rangle, \quad \forall\tilde{\xi} \in \mathfrak{g} \tag{11}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Tanımdaki eksi işareti sayesinde, sonsuz küçük koadjoint etki ad^*'da sol etki olmuş ve de Denklem (10)'da verilen koadjoint etki Ad^*'ın türevi olarak ifade edilebilir hale gelmiştir.

2.2. Karşılıklı Etki İçindeki İki Lie Grubunun Eşlenmesi

G ve H iki Lie grubu olsun. H grubunun G üzerine soldan etkisi

$$\rhd : H \times G \longrightarrow G, \qquad (h,g) \mapsto h \rhd g, \tag{12}$$

ve G grubunun H üzerine sağdan etkisi

$$\lhd : H \times G \longrightarrow H, \qquad (h,g) \mapsto h \lhd g \tag{13}$$

verilsin. Kartezyen çarpım uzayında $G \times H$ üzerinde Denklem (12) ve (13)'de verilen karşılıklı etkileri de muhafaza eden bir çarpım tanımlamak mümkündür:

$$(g,h)(\tilde{g},\tilde{h}) = \big(g(h \rhd \tilde{g}), (h \lhd \tilde{g})\tilde{h}\big). \tag{14}$$

Bu çarpımın bir grup çarpımı olabilmesi, diğer bir ifade ile, $G \times H$ uzayının bir Lie grubu olabilmesi için (14) işleminin birleşme özelliğini sağlaması gerekir. Bu, ancak ve ancak, aşağıdaki koşulların sağlanması ile mümkündür:

$$h \rhd (g\tilde{g}) = (h \rhd g)\big((h \lhd g) \rhd \tilde{g}\big), \tag{15a}$$
$$\big(h\tilde{h}\big) \lhd g = \Big(h \lhd \big(\tilde{h} \rhd g\big)\Big)\big(\tilde{h} \lhd g\big). \tag{15b}$$

Bu şartlar altında tanımlanmış ve Denklem (14)'de verilen grup çarpımını taşıyan Kartezyen çarpım uzayını $G \bowtie H$ notasyonu ile göstereceğiz ve eşlenmiş Lie grubu adını vereceğiz [6,10,12,16]. Eşlenmiş Lie grubu $G \bowtie H$'nin birim elemanı, G'nin birim elemanı e_G ve H'nin birim elemanı e_H olacak şekilde gösterilirse, (e_G, e_H) ikilisi ile verilecektir. Aşağıdaki önerme eşlenmiş Lie grubu kavramını, bir Lie grubun aşikar kesişen iki Lie altgrubuna dekompozisyonu olarak belirlemekte ve eşlenme kavramını daha net olarak ortaya koymaktadır. İspat için [10] nolu kaynağı işaret edebiliriz.

Önerme 2.1: S bir Lie grubu olsun. G ve H ile S'nin iki Lie altgrubu gösterilsin ve de S üzerindeki grup işlemi $S \cong G \times H$ izomorfizması ile üretilsin. Bu durumda S Lie grubu $G \bowtie H$ eşlenmiş Lie grubuna eşyapılıdır. Bu durumda herhangi bir $g \in G$ ve $h \in H$ için karşılıklı etkiler

$$hg = (h \rhd g)(h \lhd g) \tag{16}$$

işlemi ile üretilir. Burada, G ve H gruplarının S içine gömülmeleri

$$G \longrightarrow S : g \mapsto (g,e), \qquad H \longrightarrow S : h \mapsto (e,h) \tag{17}$$

olarak tanımlanır.

Karşılıklı etkilerin türevleri. Bu kısımdaki amacımız Denklem (12) ve (13)'de verilen karşılıklı etkilerin türevlerini hesap etmek ve bu şekilde etkilerin sonsuz küçük versiyonlarına ulaşmaktır. Bunun için, bir eşlenmiş Lie grubu belirleyecek şekilde karşılıklı olarak etki eden G ve H Lie gruplarını ve, sırasıyla, bu gruplara karşı gelen Lie cebirleri $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$'yi göz önüne alalım.

İlk olarak Denklem (12)'de verilen Lie grubu H'nin Lie grubu G üzerine sol etkisi ile başlayalım.

i. Türev işlemini gerçekleştirebilmek için, H Lie grubu içinde, $t = 0$'da grubun e_H birim elemanından geçen ve $t = 0$'daki türevi $\eta \in \mathfrak{h}$ vektörü olan bir y_t eğrisi ele alalım. Bu eğriyi, Denklem (12)'de verilen sol etkide grup elemanı $h \in H$ yerine yazalım ve görüntünün $t = 0$'da türevini alarak, Lie cebiri $\mathfrak{h}$'nin Lie grubu G üzerindeki sonsuz küçük (infinitesimal) sol etkisini tanımlayalım:

$$\rhd : \mathfrak{h} \times G \longrightarrow TG,$$
$$(\eta, g) \mapsto \eta \rhd g := \frac{d}{dt}(y_t \rhd g)|_{t=0}. \tag{18a}$$

ii. Benzer şekilde, Lie grubu G içinde, $t = 0$'da grubun e_G birim elemanından geçen ve $t = 0$'daki türevi $\xi \in \mathfrak{g}$ vektörü olan bir x_t eğrisini tanımlayalım. Denklem (12)'de verilen sol etkide $g \in G$ elemanı yerine x_t eğrisini alalım ve $t = 0$'da türevini alarak, Lie grubu H'nin Lie cebiri $\mathfrak{g}$ üzerine sol etkisini tanımlayalım:

$$\rhd : H \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$
$$(h, \xi) \mapsto h \rhd \xi := \frac{d}{dt}(h \rhd x_t)|_{t=0}. \tag{18b}$$

Denklem (18a-18b)'de iki farklı etki elde ettik ve Denklem (12)'de kullandığımız $\rhd$ notasyonunu kullanmaya devam ettik. Bu seçimleri metni daha fazla notasyona boğmamak için yaptık. Metin içinde dönüşümleri görünür ve takip edilebilir kılmak için ise, elemanların

$$g \in G, h \in H, \xi \in g \ \ ve \ \eta \in h$$

seçimlerini sabit tutacağız. Bu şekilde, daha rahat bir takibin mümkün olacağını umuyoruz. Şimdi, Denklem (18a-18b)'de verilen dönüşümlerin dual etkilerini hesap etmeye çalışalım. Bunun için Denklem (18a)'daki dönüşümle başlayalım, $g \in G$ grup elemanı sabitleyelim ve

$$\mathfrak{b}_g : \mathfrak{h} \longrightarrow T_g G, \qquad \mathfrak{b}_g(\eta) := \eta \rhd g \tag{19}$$

lineer operatörü tanımlayalım. Benzer şekilde, Denklem (18b)'deki dönüşümde $h \in H$ elemanını sabitleyerek, $\mathfrak{g}$ üzerinde bir lineer dönüşüm elde edelim. Bu sayede, Denklem (18a-18b)'deki operatörlerin dualleri sırasıyla

$$\mathfrak{b}_g^* : T_g^* G \longrightarrow \mathfrak{h}^*,$$
$$\langle \eta, \mathfrak{b}_g^*(\mu_g) \rangle = \langle \mathfrak{b}_g(\eta), \mu_g \rangle = \langle \eta \rhd g, \mu_g \rangle, \quad \forall \eta \in \mathfrak{h}, \tag{20a}$$

$$\overset{*}{\lhd} : \mathfrak{g}^* \times H \longrightarrow \mathfrak{g}^*,$$

$$\left\langle \xi, \mu \overset{*}{\lhd} h \right\rangle = \langle h \rhd \xi, \mu \rangle, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g} \tag{20b}$$

olarak hesap edilir. Burada, $\mathfrak{h}^*$ ile Lie cebiri $\mathfrak{h}$'nin lineer cebirsel duali gösterilmektedir.

Şimdi de Denklem (13)'de verilen, Lie grubu G'nin Lie grubu H üzerine sağ etkisine yoğunlaşalım.

iii. Üstte tanımladığımız, Lie grubu G içinde bulunan, $t = 0$'da grubun birim elemanından geçen ve o noktada $\xi \in \mathfrak{g}$ vektörüne teğet olan x_t eğrisini, Denklem (13)'de verilen sağ etkide, grup elemanı $g \in G$ yerine yerleştirelim. Bu durumda görüntünün $t = 0$'daki türevi bize Lie cebiri $\mathfrak{g}$'nin, Lie grubu H üzerindeki sonsuz küçük etkisini verecektir. Bu etki de sağ etkidir:

$$\begin{aligned} &\lhd: H \times \mathfrak{g} \longrightarrow TH, \\ &(h, \xi) \mapsto h \lhd \xi := \tfrac{d}{dt}(h \lhd x_t)|_{t=0}, \end{aligned} \tag{21a}$$

iv. H Lie grubu içindeki, $t = 0$'da birim elemandan geçen ve bu noktadaki türevi $\eta \in \mathfrak{h}$ olan y_t eğrisini ise Denklem (13)'de verilen sağ etkide grup elemanı $h \in H$ yerine yerleştirip, görüntünün $t = 0$'da türevini alalım. Böylece, Lie grubu G'nin Lie cebiri $\mathfrak{h}$ üzerinde sağ etkisine ulaşırız:

$$\begin{aligned} &\lhd: \mathfrak{h} \times G \longrightarrow \mathfrak{h}, \\ &(\eta, \mathrm{g}) \mapsto \eta \lhd g := \tfrac{d}{dt}(y_t \lhd g)|_{t=0} \end{aligned} \tag{21b}$$

Şimdi Denklem (21a-21b)'de sunduğumuz etkilerin duallerini elde etmeye çalışalım. Denklem (21a)'daki ilk etkide $h \in H$ grup elemanı sabitlenirse,

$$\mathfrak{a}_h: \mathfrak{g} \longrightarrow T_h H, \quad \mathfrak{a}_h(\xi) = h \lhd \xi \tag{22}$$

lineer operatörüne ulaşılır. Denklem (21b)'deki dönüşümde ise $g \in G$ elemanını sabitleyerek $\mathfrak{h}$ üzerinde bir temsil elde ederiz. Bu sayede, Denklem (21)'deki operatörlerin dualleri sırasıyla

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_h^*: T_h^* H \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \\ &\langle \xi, \mathfrak{a}_h^*(\nu_h) \rangle := \langle \mathfrak{a}_h(\xi), \nu_h \rangle = \langle h \lhd \xi, \nu_h \rangle, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, \end{aligned} \tag{23a}$$

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\rhd}: G \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*, \\ &\left\langle \eta, g \overset{*}{\rhd} \mu \right\rangle = \langle \eta \lhd g, \mu \rangle, \quad \forall \eta \in \mathfrak{h} \end{aligned} \tag{23b}$$

olarak elde edilir.

2.3. Lie Grubu Üzerinde Fark Denklemleri

Elimizde, bir Lie grubu G ve onun Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olsun. G grubu üzerinde tanımlı reel değerli bir (Lagrange) fonksiyonunu $\mathfrak{L}: G \to \mathbb{R}$ göz önüne alalım. G^N, G Lie grubunun N kere kendisi ile Kartezyen çarpımı olmak üzere, bir $\mathfrak{L}$ Lagrange fonksiyonu için etki

$$S\mathfrak{L}: G^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (g_1, \cdots, g_N) \mapsto \textstyle\sum_{k=1}^{N} \mathfrak{L}(g_k) \tag{24}$$

olarak tanımlanır. Hamilton fark prensibini hatırlayalım [11]. $(g_1, \cdots, g_N)$ dizisinin Lagrange sisteminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin (24) denkleminin kritik noktası olmasıdır. Böylece, herhangi bir $\xi \in \mathfrak{g}$ vektörü ve $g_k, g_{k+1} \in G$ noktaları için, Lagrange fark denklemleri

$$\textstyle\sum_{k=1}^{N-1} \left[\overrightarrow{\xi_k}(g_k)(\mathfrak{L}) - \overleftarrow{\xi_k}(g_{k+1})(\mathfrak{L}) \right] = 0 \tag{25}$$

olarak elde edilir. Burada $\vec{\xi}$ ve $\overleftarrow{\xi}$ ile gösterilen, G üzerinde $\xi \in \mathfrak{g}$ tarafından üretilen sırasıyla sol değişmez (5) ve sağ-değişmez (6) vektör alanlarıdır. Ayrıca $\overrightarrow{\xi_k}(g_k)(\mathfrak{L})$ notasyonu, $\mathfrak{L}$ fonksiyonunun g_k noktasında $\overrightarrow{\xi_k}$ vektör alanı yönündeki türevini göstermektedir.

Özel olarak, $N = 2$ ve her $\xi \in \mathfrak{g}$ vektörü için, Lagrange fark denklemleri

$$\overrightarrow{\xi_k}(g_k)(\mathfrak{L}) - \overleftarrow{\xi_k}(g_{k+1})(\mathfrak{L}) = 0 \tag{26}$$

olarak hesap edilecektir. (26) denkleminin sol tarafı

$$\begin{aligned} &\langle d\mathfrak{L}(g_k), \vec{\xi}(g_k) \rangle - \langle d\mathfrak{L}(g_{k+1}), \overleftarrow{\xi}(g_{k+1}) \rangle \\ &\quad = \langle d\mathfrak{L}(g_k), T_e L_{g_k}(\xi) \rangle - \langle d\mathfrak{L}(g_{k+1}), T_e R_{g_{k+1}}(\xi) \rangle \\ &\quad = \langle T_e^* L_{g_k}(d\mathfrak{L}(g_k)), \xi \rangle - \langle T_e^* R_{g_{k+1}}(d\mathfrak{L}(g_{k+1})), \xi \rangle \\ &\quad = \langle T_e^* L_{g_k}(d\mathfrak{L}(g_k)) - T_e^* R_{g_{k+1}}(d\mathfrak{L}(g_{k+1})), \xi \rangle \end{aligned} \tag{27}$$

işlemi nedeniyle, rasgele seçilen ξ için, Lagrange fark denklemlerini

$$T_e^* L_{g_k}(d\mathfrak{L}(g_k)) - T_e^* R_{g_{k+1}}(d\mathfrak{L}(g_{k+1})) = 0 \tag{28}$$

olacak şekilde belirler [8]. Burada, d operatörü G grubu üzerinde tanımlı dış (exterior) türevdir [13]. $T_e^* R_{g_k} d\mathfrak{L}(g_k)$ dual uzay $\mathfrak{g}^*$'ın bir elemanıdır. Biz bu terimi μ_k ile gösterelim. Sonuç olarak, (28) denklemleri

$$\begin{aligned} &T_e^* L_{g_k}(d\mathfrak{L}(g_k)) - T_e^* R_{g_{k+1}}(d\mathfrak{L}(g_{k+1})) \\ &= T_e^* L_{g_k}(d\mathfrak{L}(g_k)) - \mu_{k+1} \\ &= T_e^* L_{g_k} \circ T_e^* R_{g_k^{-1}} \circ T_e^* R_{g_k} d\mathfrak{L}(g_k)) - \mu_{k+1} \\ &= T_e^* L_{g_k} \circ T_e^* R_{g_k^{-1}}(\mu_k) - \mu_{k+1} = \mathrm{Ad}_{g_k^{-1}}^*(\mu_k) - \mu_{k+1} \end{aligned}$$

hesabı ile literatürdeki formuna

$$\mu_{k+1} = \mathrm{Ad}_{g_k^{-1}}^*(\mu_k), \quad \mu_k = T_e^* R_{g_k} d\mathfrak{L}(g_k) \tag{29}$$

kavuşur [1,4,14,15].

2.4. Lie Grubu Üzerindeki Fark Denklemlerinin Eşlenmesi

Makalemize konu ettiğimiz ana problemimizi, bu noktaya kadar biriktirdiğimiz terminoloji ışığında, tekrar ifade etmeye çalışalım. Öncelikle, G ve H ile göstereceğimiz iki Lie grubunu göz önüne alalım. Bu grupların Lie cebirlerini sırasıyla $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ ile gösterelim. Altbölüm 2.2'deki notasyonu kullanalım ve bu iki grup üzerinde Lagrange fark denklemlerini Denklem (29)'da verildiği formda sırasıyla

$$Ad^*_{g_k^{-1}}\mu_k = \mu_{k+1}, \qquad Ad^*_{h_k^{-1}}\nu_k = \nu_{k+1}$$

olarak yazalım. Şimdi, Denklem (12) ve (13)'de verilen karşılıklı etkilerin varlığını kabul edelim ve elimizdeki bu iki fark denklemini özel durum olarak kabul edecek ve de karşılıklı etkileri de yoksaymayacak şekilde toplam uzay üzerinde dinamik denklemlerine ulaşmaya çalışalım.

Bir önceki paragrafta anlattığımız hedef için Altbölüm 2.2'de inşasını verdiğimiz eşlenmiş Lie grubu tanımına geri döneceğiz. Bu grubun tanımına dikkat edilirse, aranan kolektif hareket için uygun bir geometrik altyapı sunduğu kolaylıkla görülecektir. O zaman, fark denklemlerinin eşlenme problemi için yapmamız gereken eşlenmiş Lie grubu $G \bowtie H$ üzerindeki Lagrange fark denklemlerini yazmak olacaktır. Bu amaçla, $G \bowtie H$ eşlenmiş Lie grubu ve üzerinde tanımlanan (14) işlemini gözönüne alalım. Bu denklemleri elde etmek için, ilk olarak Denklem (14)'te verilen $G \bowtie H$ üzerindeki grup çarpımının türevlerini alarak sol L ve sağ R ötelemelerinin tanjant dönüşümlerini aşağıdaki gibi hesap edelim:

$$T_{(g_2,h_2)}L_{(g_1,h_1)}\left(X_{g_2}, Y_{h_2}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} T_{h_1 \triangleright g_2}L_{g_1}\left(h_1 \triangleright X_{g_2}\right), \\ T_{h_1 \triangleleft g_2}R_{h_2}\left(h_1 \triangleleft X_{g_2}\right) + T_{h_2}L_{(h_1 \triangleleft g_2)}Y_{h_2} \end{pmatrix}, \tag{30a}$$

$$T_{(g_1,h_1)}R_{(g_2,h_2)}\left(X_{g_1}, Y_{h_1}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} T_{g_1}R_{(h_1 \triangleright g_2)}X_{g_1} + T_{h_1 \triangleright g_2}L_{g_1}\left(Y_{h_1} \triangleright g_2\right), \\ T_{h_1 \triangleleft g_2}R_{h_2}\left(Y_{h_1} \triangleleft g_2\right) \end{pmatrix}. \tag{30b}$$

Burada, $i = 1,2$ için, (g_i, h_i) ikilileri $G \bowtie H$ grubunun elemanları, (X_{g_i}, Y_{h_i}) ikilileri ise $T_{(g_i,h_i)}(G \bowtie H)$ tanjant uzayındaki vektörlerdir. Böylece, bir $(\xi, \eta) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ vektörü tarafından üretilen sol ve sağ değişmez vektör alanlarını

$$\overleftarrow{(\xi,\eta)}(g,h) = T_{(e_G,e_H)}L_{(g,h)}(\xi,\eta)$$
$$= \left(\overleftarrow{h \triangleright \xi}(g), h \triangleleft \xi + \overleftarrow{\eta}(h)\right), \tag{31a}$$

$$\overrightarrow{(\xi,\eta)}(g,h) = T_{(e_G,e_H)}R_{(g,h)}(\xi,\eta)$$
$$= \left(\vec{\xi}(g) + \eta \triangleright g, \overrightarrow{\eta \triangleleft g}(h)\right) \tag{31b}$$

olarak hesaplayabiliriz. (31a) ve (31b) denklemlerinin sağ tarafında Denklem (5-6)'da verilen sol ve sağ değişmez vektör alanı tanımları kullanılmıştır. Eşlenmiş Lie grubu $G \bowtie H$ üzerinde tanımlı bir $\mathfrak{L}: G \bowtie H \to \mathbb{R}$ Lagrange fonksiyonunu kullanarak, herhangi $\xi \in \mathfrak{g}$ ve $\eta \in \mathfrak{h}$ vektörleri ve $g_k, g_{k+1} \in G$ ile $h_k, h_{k+1} \in H$ noktaları için aşağıdaki hesap yapılabilir:

$$\left\langle d\mathfrak{L}(g_k,h_k), \overleftarrow{(\xi,\eta)}(g_k,h_k)\right\rangle - \left\langle d\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), \overrightarrow{(\xi,\eta)}(g_{k+1},h_{k+1})\right\rangle$$
$$= \left\langle d\mathfrak{L}(g_k,h_k), \left(\overleftarrow{h_k \triangleright \xi}(g_k), h_k \triangleleft \xi + \overleftarrow{\eta}(h_k)\right)\right\rangle$$
$$- \left\langle d\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), \left(\vec{\xi}(g_{k+1}) + \eta \triangleright g_{k+1}, \overrightarrow{\eta \triangleleft g_{k+1}}(h_{k+1})\right)\right\rangle$$
$$= \left\langle \begin{matrix} \left(d_1\mathfrak{L}(g_k,h_k), d_2\mathfrak{L}(g_k,h_k)\right), \\ \left(\overleftarrow{h \triangleright \xi}(g_k), h_k \triangleleft \xi + \overleftarrow{\eta}(h_k)\right) \end{matrix} \right\rangle$$
$$- \left\langle \begin{matrix} \left(d_1\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), d_2\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1})\right), \\ \left(\vec{\xi}(g_{k+1}) + \eta \triangleright g_{k+1}, \overrightarrow{\eta \triangleleft g_{k+1}}(h_{k+1})\right) \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \left\langle d_1\mathfrak{L}(g_k,h_k), \overleftarrow{h_k \triangleright \xi}(g_k)\right\rangle + \left\langle d_2\mathfrak{L}(g_k,h_k), h_k \triangleleft \xi + \overleftarrow{\eta}(h_k)\right\rangle$$
$$- \left\langle d_1\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), \vec{\xi}(g_{k+1}) + \eta \triangleright g_{k+1}\right\rangle$$
$$- \left\langle d_2\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), \overrightarrow{\eta \triangleleft g_{k+1}}(h_{k+1})\right\rangle$$
$$= \left\langle d_1\mathfrak{L}(g_k,h_k), T_{e_G}L_{g_k}(h_k \triangleright \xi)\right\rangle$$
$$+ \left\langle d_2\mathfrak{L}(g_k,h_k), h_k \triangleleft \xi + T_{e_H}L_{h_k}\eta\right\rangle$$
$$- \left\langle d_1\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), T_{e_G}R_{g_{k+1}}\xi + \eta \triangleright g_{k+1}\right\rangle$$
$$- \left\langle d_2\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), T_{e_H}R_{h_{k+1}}(\eta \triangleleft g_{k+1})\right\rangle$$
$$= \left\langle T^*_{e_G}L_{g_k} \cdot d_1\mathfrak{L}(g_k,h_k), h_k \triangleright \xi\right\rangle + \left\langle d_2\mathfrak{L}(g_k,h_k), h_k \triangleleft \xi\right\rangle$$
$$+ \left\langle T^*_{e_H}L_{h_k} \cdot d_2\mathfrak{L}(g_k,h_k), \eta\right\rangle$$
$$- \left\langle T^*_{e_G}R_{g_{k+1}} \cdot d_1\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), \xi\right\rangle$$
$$- \left\langle d_1\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), \eta \triangleright g_{k+1}\right\rangle$$
$$- \left\langle T^*_{e_H}R_{h_{k+1}} \cdot d_2\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}), \eta \triangleleft g_{k+1}\right\rangle$$
$$= \left\langle \begin{matrix} \xi, \left(T^*_{e_G}L_{g_k} \cdot d_1\mathfrak{L}(g_k,h_k)\right) \overset{*}{\triangleleft} h_k + \mathfrak{a}^*_{h_k} d_2\mathfrak{L}(g_k,h_k) \\ -T^*_{e_G}R_{g_{k+1}} \cdot d_1\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}) \end{matrix} \right\rangle$$
$$+ \left\langle \begin{matrix} \eta, T^*_{e_H}L_{h_k} \cdot d_2\mathfrak{L}(g_k,h_k) - \mathfrak{b}^*_{g_{k+1}} d_1\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}) \\ -g_{k+1} \overset{*}{\triangleright} T^*_{e_H}R_{h_{k+1}} \cdot d_2\mathfrak{L}(g_{k+1},h_{k+1}) \end{matrix} \right\rangle = 0. \tag{32}$$

Şimdi, (32) hesabını adım adım inceleyelim. Hesaptaki ilk satırda iki eşleme (pairing) bulunmaktadır. Bu eşlemelerden ilki, (g_k, h_k) noktasındaki kotanjant ve tanjant uzayları arasındadır. İkinci eşleme ise (g_{k+1}, h_{k+1}) noktasındaki kotanjant ve tanjant uzayları arasındadır. Her iki eşleme reel değerli sonuç vereceğinden ilk satırdaki toplam mümkündür. (32)'de verilen hesabın ilk eşitliğinde Denklem (31a-31b)'de verilen sol ve sağ değişmez vektör alanlarını kullandık. İkinci ve üçüncü eşitliklerde eşlemenin iki-lineer olma özelliğinden yararlanarak eşlemeyi toplama işlemi üzerine dağıttık. İkinci eşitlikteki,

$$d_1\mathfrak{L} = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g}, \quad d_2\mathfrak{L} = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta h}$$

notasyonları ile Lagrange fonksiyonu $\mathfrak{L}$'nin sırasıyla birinci ve ikinci bileşenlerine göre kısmi türevlerini gösterdik. Dördüncü eşitlikte, Denklem (5) ve (6)'da verilen tanımları kullandık. Beşinci eşitlikte, sol ve sağ ötelemelerin TL ve TR ile gösterilen tanjant dönüşümlerinin, duallerini kullandık. Son iki satırdaki dual operasyonlar, sırasıyla, Denklem (20a)'da verilen $\overset{*}{\triangleleft}$ dual etkisi, Denklem (23b)'de verilen dual dönüşüm $\mathfrak{a}^*_{h_k}$, Denklem (20b)'de verilen $\mathfrak{b}^*_{g_{k+1}}$ ve de Denklem (23a)'da verilen $\overset{*}{\triangleright}$ operatörüdür.

Sonuç olarak rasgele seçilmiş $\xi \in \mathfrak{g}$ ve $\eta \in \mathfrak{h}$ için

$$\left(T^*L_{g_k} \cdot d_1\mathfrak{L}(g_k, h_k)\right) \overset{*}{\triangleleft} h_k + \mathfrak{a}^*_{h_k} d_2\mathfrak{L}(g_k, h_k) \\ -T^*R_{g_{k+1}} \cdot d_1\mathfrak{L}(g_{k+1}, h_{k+1}) = 0,$$

$$T^*L_{h_k} \cdot d_2\mathfrak{L}(g_k, h_k) - \mathfrak{b}^*_{g_{k+1}} d_1\mathfrak{L}(g_{k+1}, h_{k+1}) \\ - g_{k+1} \overset{*}{\triangleright} T^*R_{h_{k+1}} \cdot d_2\mathfrak{L}(g_{k+1}, h_{k+1}) = 0$$

denklemleri elde edilir. Aşağıdaki önermede bulduğumuz bu sonucu not edelim.

Önerme 2.2: $G \bowtie H$ eşlenmiş Lie grubu olsun. Aşağıdaki tanımlanan kovektörleri gözönüne alalım:

$$T^*_{e_G} R_{g_k} \cdot d_1\mathfrak{L}(g_k, h_k) = \mu_k \in \mathfrak{g}^*, \\ T^*_{e_H} R_{h_k} \cdot d_2\mathfrak{L}(g_k, h_k) = \nu_k \in \mathfrak{h}^*. \tag{33}$$

Böylece, $G \bowtie H$ eşlenmiş Lie grubu üzerindeki *eşlenmiş (Lagrange) fark denklemleri*

$$\mu_{k+1} = \mathrm{Ad}^*_{g_k^{-1}} \mu_k \overset{*}{\triangleleft} h_k + \mathfrak{a}^*_{h_k} T^*R_{h_k^{-1}} \nu_k, \tag{34a}$$
$$g_{k+1} \overset{*}{\triangleright} \nu_{k+1} = \mathrm{Ad}^*_{h_k^{-1}} \nu_k - \mathfrak{b}^*_{g_{k+1}} T^*R_{g_{k+1}^{-1}} \mu_{k+1} \tag{34b}$$

olarak yazılır.

Yarı-direkt Çarpım Teorisi. Eşlenmiş fark denklemlerinde karşılıklı etkilerden birini aşikar kabul ederek yarı-direkt çarpım (semi-direct product) teorisi elde edilir. Bu özel durumları inceleyelim. Eğer Lie grubu G'nin H üzerine sağ etkisi aşikar ise (34a-34b) denklemleri, (33) tanımları ile birlikte, $G \rtimes H$ Lie gruplarının yarı-direkt çarpım uzayı üzerindeki

$$\mu_{k+1} = Ad^*_{g_k^{-1}} \mu_k \overset{*}{\triangleleft} h_k, \tag{35a}$$

$$\nu_{k+1} = Ad^*_{h_k^{-1}} \nu_k - \mathfrak{b}^*_{g_{k+1}} T^*R_{g_{k+1}^{-1}} \mu_{k+1} \tag{35b}$$

denklemlerine dönüşür. Diğer yandan, eğer Lie grubu H'nin G üzerine sol etkisi aşikar ise bu durumda (33) tanımlamaları ile birlikte, $G \ltimes H$ Lie gruplarının yarı-direkt çarpım uzayı üzerindeki

$$\mu_{k+1} = Ad^*_{g_k^{-1}} \mu_k + \mathfrak{a}^*_{h_k} T^*R_{h_k^{-1}} \nu_k, \tag{36a}$$

$$g_{k+1} \overset{*}{\triangleright} \nu_{k+1} = Ad^*_{h_k^{-1}} \nu_k \tag{36b}$$

denklemlerine ulaşılır. Eğer, her iki etki de aşikar ise (33) ile birlikte

$$\mu_{k+1} = Ad^*_{g_k^{-1}} \mu_k, \qquad \nu_{k+1} = Ad^*_{h_k^{-1}} \nu_k \tag{37}$$

denklemleri elde edilir. Denklem (37), bu altbölümün başlangıcında sergilediğimiz G ve H üzerindeki bireysel hareket denklemleridir. Karşılıklı etkiler aşikar olduğunda bireysel hareketler korunmaktadır.

III. UYGULAMALAR

3.1. Tanjant Grubu Üzerinde Fark Denklemleri

G bir Lie grubu olsun. Her zamanki gösterimimize devam edelim ve Lie cebirini $\mathfrak{g}$ ile gösterelim. G katmanının TG tanjant demeti üzerindeki grup yapısını elde edeceğiz. Bunun için $g(t)$ ve $\tilde{g}(t)$ aşağıdaki özelliklere sahip G üzerinde iki eğri alalım:

$$g(0) = g, \quad \tilde{g}(0) = \tilde{g}, \quad \frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = X_g \in T_gG, \\ \frac{d}{dt} \tilde{g}(t)|_{t=0} = Y_{\tilde{g}} \in T_{\tilde{g}}G. \tag{38}$$

Bu iki eğrinin G grubu üzerindeki çarpımını $t = 0$'da türetelim. Bu durumda

$$\frac{d}{dt} g(t)\tilde{g}(t)|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} g(t)|_{t=0}\right) \tilde{g}(0) \\ +g(0)\left(\frac{d}{dt} \tilde{g}(t)|_{t=0}\right) = TR_{\tilde{g}} X_g + TL_g Y_{\tilde{g}} \tag{39}$$

elde edilir. Burada, TL_g ve $TR_{\tilde{g}}$, sırasıyla Denklem (3)'de verilen sol ve sağ ötelemelerinin tanjant dönüşümleridir. Böylece, aşağıda tanımlanan işlem ile TG bir Lie grup yapısına sahip olur [17,18,19]:

$$TG \times TG \longrightarrow TG, \quad (X_g, Y_{\tilde{g}}) \mapsto X_g * Y_{\tilde{g}} = TR_{\tilde{g}} X_g + TL_g Y_{\tilde{g}}. \tag{40}$$

Burada, görüntüdeki vektörün $T_{g\tilde{g}}G$ uzayında yer aldığına dikkat ediniz. Grubun birim elemanı, $\mathfrak{g} \cong T_eG$ uzayının sıfır vektörüdür. Ayrıca bir X_g elemanının grup çarpımına göre tersi

$$X_g^{-1} = -T_g(L_{g^{-1}} \circ R_{g^{-1}}) X_g \in T_{g^{-1}}G \tag{41}$$

vektörüdür.

Trivializasyon. Bir Lie grubu G'nin tanjant demeti TG, global bir sağ trivializasyon (trivialization) ihtiva eder [20, 21]:

$$tr: TG \longrightarrow \mathfrak{g} \rtimes G, \qquad X_g \mapsto (TR_{g^{-1}} X_g, g). \tag{42}$$

Bu trivializasyon sayesinde TG üzerinde tanımladığımız (40) işlemini $\mathfrak{g} \rtimes G$ çarpım uzayına taşıyabiliriz. Bunun için, $X_g \in T_gG$ ve $Y_{\tilde{g}} \in T_{\tilde{g}}G$ olacak şekilde iki vektör alalım ve bu vektörlerin cebir üzerine çekildiklerinde $TR_{g^{-1}} X_g = \xi$ ve $TR_{\tilde{g}^{-1}} Y_{\tilde{g}} = \tilde{\xi}$ ile gösterildiklerini kabul edelim. Bu durumda, Denklem (40)'da verilen grup çarpımının görüntüsüne Denklem (42)'de verilen trivializasyonu uygulayalım:

$$\begin{aligned} tr(X_g * Y_{\tilde{g}}) &= tr(TR_{\tilde{g}} X_g + TL_g Y_{\tilde{g}}) \\ &= (TR_{(g\tilde{g})^{-1}}(TR_{\tilde{g}} X_g + TL_g Y_{\tilde{g}}), g\tilde{g}) \\ &= (TR_{(\tilde{g}^{-1}g^{-1})}(TR_{\tilde{g}} X_g + TL_g Y_{\tilde{g}}), g\tilde{g}) \\ &= (TR_{(\tilde{g}^{-1}g^{-1})} \circ TR_{\tilde{g}} X_g + TR_{(\tilde{g}^{-1}g^{-1})} \circ TL_g Y_{\tilde{g}}, g\tilde{g}) \\ &= (TR_{g^{-1}} \circ TR_{\tilde{g}^{-1}} \circ TR_{\tilde{g}} X_g + TR_{g^{-1}} \circ TR_{\tilde{g}^{-1}} \circ TL_g Y_{\tilde{g}}, g\tilde{g}) \\ &= (TR_{g^{-1}} \circ X_g + TR_{g^{-1}} \circ TL_g \circ TR_{\tilde{g}^{-1}} Y_{\tilde{g}}, g\tilde{g}) \\ &= (\xi + TR_{g^{-1}} \circ TL_g \cdot \tilde{\xi}, g\tilde{g}) \\ &= (\xi + \mathrm{Ad}_g \tilde{\xi}, g\tilde{g}). \end{aligned} \tag{43}$$

Burada, Ad ile G grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerine Denklem (8)'de verilen adjoint etkisi gösterilmiştir. Böylece $\mathfrak{g} \rtimes G$ trivializasyonu aşağıda verilen işlemle bir Lie gruptur:

$$(\mathfrak{g} \rtimes G) \times (\mathfrak{g} \rtimes G) \longrightarrow \mathfrak{g} \rtimes G\,,$$
$$\left((\xi, g), (\tilde{\xi}, \tilde{g})\right) \mapsto (\xi, g) * (\tilde{\xi}, \tilde{g}) = \left(\xi + \mathrm{Ad}_g \tilde{\xi}, g\tilde{g}\right). \quad (44)$$

Bu grubun birim elemanı $(0, e)$, bir $(\xi, g) \in \mathfrak{g} \rtimes G$ elemanının tersi ise $\left(-Ad_{g^{-1}}\xi, g^{-1}\right)$'dir.

Yarı-direkt Çarpım Yapısı. Denklem (44)'de verilen grup çarpımının Denklem (14)'te verilen eşlenmiş Lie grubu çarpımının özel durumu olduğuna dikkat çekmek isteriz. Lie grubu $\mathfrak{g} \rtimes G$'nin eşlenmiş bir Lie grubu olarak ifadesi için Altbölüm 2.2'deki geometride sol etkiyi yapan Lie grubu H, Lie grubu G ile değiştirmek, diğer yandan da sağ etkiyi yapan Lie grubu G, toplama işlemi ile değişmeli bir Lie grubu olarak kabul edeceğimiz, $\mathfrak{g}$ ile değiştireceğiz.

$$H \to G, \quad G \to \mathfrak{g}.$$

Bu seçimler ile, $\mathfrak{g} \rtimes G$ grubunu bir eşlenmiş Lie grubu uygulaması olarak görelim ve dikkatli bir şekilde Altbölüm 2.2'deki denklemleri sırasıyla elde edelim. Denklem (12) ve Denklem (13)'deki sol etki adjoint temsil ve sağ etki ise aşikar etkidir:

$$\rhd : G \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad (g, \xi) \mapsto \mathrm{Ad}_g \xi, \quad (45a)$$
$$\lhd : G \times \mathfrak{g} \longrightarrow G, \quad (g, \xi) \mapsto g. \quad (45b)$$

Sol etki (45a)'dan yararlanarak, Denklem (18a-18b)'deki sol etkiler sırasıyla

$$\rhd : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow T\mathfrak{g}, \quad \left(\tilde{\xi}, \xi\right) \mapsto (\xi, \mathrm{ad}_{\tilde{\xi}} \xi), \quad (46a)$$
$$\rhd : G \times T_0\mathfrak{g} \longrightarrow T_0\mathfrak{g}, \quad (g, \xi) \mapsto \mathrm{Ad}_g \xi \quad (46b)$$

olarak hesap edilir. Burada, $T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $T\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ eşitliklerinin kullanıldığına dikkat çekmek isteriz. Denklem (46a)'dan elde edilecek $\mathfrak{b}_\xi : \mathfrak{g} \to T_\xi \mathfrak{g}$ dönüşümü sonsuz küçük adjoint temsil olacak, bu sayede de (20a) ve (20b)'de verilen dualler sırasıyla

$$\mathfrak{b}_\xi^* : \mathrm{T}_\xi^* \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \mu \mapsto \mathrm{ad}_\xi^* \mu, \quad (47a)$$
$$\overset{*}{\lhd} : \mathrm{T}_0^* \mathfrak{g} \times G \longrightarrow \mathrm{T}_0^* \mathfrak{g}, \quad (\mu, g) \mapsto \mu \overset{*}{\lhd} g = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^* \mu \quad (47b)$$

olacaktır. Burada, $\mathrm{T}_\xi^* \mathfrak{g} \cong \mathrm{T}_0^* \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ eşitlikleri kabul edilmiştir. Şimdi de, sağ etki (45b)'den yararlanarak (21a) ve (21b)'yi hesap edelim:

$$\lhd : G \times T_0\mathfrak{g} \longrightarrow TG, \quad (g, \xi) \mapsto 0, \quad (48a)$$
$$\lhd : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad \left(\tilde{\xi}, \xi\right) \mapsto \tilde{\xi}. \quad (48b)$$

Denklem (48a)'da bir g elemanını sabit tutarak elde ettimiz $\mathfrak{a}_g$ lineer dönüşümü sıfır fonksiyonu olacaktır. Bu sayede (23a) ve (23b)'de tanımlanmış dual dönüşümler bu bölümdeki özel seçimlerimiz neticesiyle sırasıyla sıfır dönüşümü ve aşikar temsil olacaktır:

$$\mathfrak{a}_g^* : T_g^* G \longrightarrow T_0^* \mathfrak{g}, \quad \mu_g \mapsto 0, \quad (49a)$$
$$\overset{*}{\rhd} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad (\xi, \mu) \mapsto \mu\,. \quad (49b)$$

Son olarak da, tüm bu tanımları Önerme 2.2'de yerlerine yerleştirerek aşağıdaki önermeye ulaşırız.

Önerme 3.1: Tanjant grubu $\mathfrak{g} \rtimes G$ üzerinde tanımlı bir Lagrange fonksiyonu $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\xi, g)$ için denklem (33)'de verilen tanımlar

$$d_1 \mathfrak{L}(\xi_k, g_k) = \mu_k \in \mathfrak{g}^*,$$
$$T_e^* R_{g_k} \cdot d_2 \mathfrak{L}(\xi_k, g_k) = \tilde{\mu}_k \in \mathfrak{g}^*. \quad (50)$$

şeklindedir, (34a) ve (34b)'de verilen eşlenmiş fark denklemleri ise

$$\mu_{k+1} = \mathrm{Ad}_{g_k^{-1}}^* \mu_k, \quad (51a)$$
$$\tilde{\mu}_{k+1} = \mathrm{Ad}_{g_k^{-1}}^* \tilde{\mu}_k - ad_{\xi_{k+1}}^* \mu_{k+1} \quad (51b)$$

olarak hesap edilir.

3.2. Heisenberg Grubu Üzerinde Fark Denklemi

G ve H sırasıyla köşegenleri 1 olan, sırasıyla, üst ve alt üçgensel matris grupları olsun. Bu gruplara literatürde Heisenberg grubu adı verilir [22].

İlk olarak G Lie grubu ile başlayalım. Lie cebiri $\mathfrak{g}$, köşegen elemanları 0 olan 3×3 üst üçgensel matrislerlerden oluşur. Lie cebiri $\mathfrak{g}$ üzerinde iz operatörü yardımıyla tanımlayacağımız bir iç çarpım mevcuttur:

$$\langle \xi, \tilde{\xi} \rangle = iz\left(\xi^T \tilde{\xi}\right) \quad (52)$$

iç çarpımın varlığı ile dual uzay $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ alınabilir. Hesaplarımızda kullanacağımız matrisleri aşağıdaki gibi sabitleyelim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g},$$
$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ r & s & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}^*. \quad (53)$$

Lie grubu G'nin Lie cebiri üzerine adjoint etkisini tanımlayalım ve dual uzayı üzerine koadjoint etkisi

$$\mathrm{Ad}_A \xi = A \xi A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & b - za + xc \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Ad_A^* \mu = (A^{-1})^T \mu A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ r - pz + sx & s & 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

olarak elde edilir. $(A^{-1})^T$ ile A^{-1} ters matrisinin transpozesi gösterilmektedir. G grubu üzerindeki $\mathfrak{L}: G \longrightarrow \mathbb{R}$ Lagrange fonksiyonu ile üretilen Lagrange fark denklemleri

$$p_{k+1} = p_k = p,$$
$$r_{k+1} = r_k + sx_k - pz_k, \quad s_{k+1} = s_k = s, \tag{55a}$$

$$p_k = d_1 L(x_k, y_k, z_k), \quad r_k = d_2 L(x_k, y_k, z_k)$$
$$+ x_k d_3 L(x_k, y_k, z_k), \quad s_k = d_3 L(x_k, y_k, z_k), \tag{55b}$$

olarak hesap edilir.

Şimdi H alt üçgensel matris grubunu, bu grubun Lie cebiri $\mathfrak{h}$ ve dual uzay $\mathfrak{h}^*$ için elemanları şu şekilde belirleyelim:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \in H, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h},$$
$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^*. \tag{56}$$

Eşlenmiş Lie grubu $G \bowtie H$ üzerindeki Lagrange fark denklemlerini hesap edelim. Öncelikle, (53) ve (56)'da verilen notasyonlar ışığında bu iki matris grubunun karşılıklı etkisini tanımlayalım:

$$\rhd: H \times G \longrightarrow G,$$
$$B \rhd A = I + (B^{-1})^T (A - I) = \begin{pmatrix} 1 & x & y - lz \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{57a}$$

$$\lhd: H \times G \longrightarrow H,$$
$$B \lhd A = I + (B - I)(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ m - xn & n & 1 \end{pmatrix}. \tag{57b}$$

Sol etki sayesinde hesap ettiğimiz ve ifadelerini Denklem (18a) ve (18b)'de sunduğumuz etkiler sırasıyla şu şekildedir:

$$\rhd: \mathrm{H} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$
$$(B, \xi) \mapsto B \rhd \xi = (B^{-1})^T \xi = \begin{pmatrix} 0 & a & b - \ell c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{58a}$$

$$\mathfrak{h} \times G \longrightarrow TG,$$
$$(\eta, A) \mapsto \eta \rhd A = \mathfrak{b}_A(\eta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -zd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{58b}$$

Bu dönüşümlerin de dualleri sırasıyla

$$\overset{*}{\lhd}: \mathfrak{g}^* \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathfrak{g}^*,$$
$$(\mu, B) \mapsto \mu \overset{*}{\lhd} B = (B^{-1})\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ r - pn & s & 0 \end{pmatrix}, \tag{59a}$$

$$\mathfrak{b}_A^*: T_A^* G \longrightarrow \mathfrak{h}^*, \quad \mu \mapsto \mathfrak{b}_A^* \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -sx \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{59b}$$

olarak elde edilir. Sağ etki ile elde edilen ve ifadelerini Denklem (21a) ve (21b)'de verdiğimiz etkiler sırasıyla

$$\lhd: H \times \mathfrak{g} \longrightarrow TH,$$
$$(B, \xi) \mapsto \mathfrak{a}_B(\xi) = B \lhd \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -an & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{60a}$$

$$\lhd: \mathfrak{h} \times G \longrightarrow \mathfrak{h},$$
$$(\eta, A) \mapsto \eta \lhd A = \eta (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ e - xf & f & 0 \end{pmatrix}, \tag{60b}$$

dual dönüşümler ise

$$\mathfrak{a}_B^*: T_B^* H \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \nu \mapsto \mathfrak{a}_B^* \nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\ell w & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{61a}$$

$$\overset{*}{\rhd}: G \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*, \quad \nu \mapsto A \overset{*}{\rhd} \nu = \begin{pmatrix} 0 & u & v - zu \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{61b}$$

olarak hesaplanır. Eşlenmiş hareket denklemleri (34a) ve (34b) ise aşağıdaki formda elde edilir:

$$p_{k+1} = p_k,$$
$$r_{k+1} = r_k - (z_k + n_k) p_k + s_k x_k - \ell w_k, \quad s_{k+1} = s_k, \tag{62a}$$

$$u_{k+1} = u_k,$$
$$v_{k+1} = z_{k+1} u_{k+1} + v_k - \ell w_k + u_k n_k$$
$$+ s_{k+1} x_{k+1}, \quad w_{k+1} = w_k. \tag{62b}$$

Dizi elemanlarının Lagrange fonksiyonu ile ifadesi ise $L = L(x_k, y_k, z_k, \ell_k, m_k, n_k)$ için

$$p_k = d_1 L, \quad r_k = d_2 L + x_k d_3 L, \quad s_k = d_3 L,$$
$$u_k = d_4 L, \quad m_k = d_5 L + l_k d_6 L, \quad n_k = d_6 L \tag{63}$$

olacaktır.

V. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu makalede, kesikli (discrete) hareket için eşlenme problemi çalışılmıştır. Elde edilen temel teorik sonuç Önerme 2.2'de verilen *eşlenmiş fark denklemleri*dir. Bu denklemler, karşılıklı etki içindeki iki Lie grubu üzerindeki Lagrange fark denklemlerinin, karşılıkları etkileri muhafaza edecek şekilde, tek bir sistem olarak yazımını göstermektedir. Bu, fiziksel olarak birbirine etki eden iki sistemin kolektif davranışını betimler. Bu teorik sonuç, tanjant ve Heisenberg grupları üzerinde eşlenmiş fark denklemlerini yazmak için kullanılmıştır.

Bu çalışmamız, [16] ve [23] nolu çalışmalarımızı bütünleyici nitelikte ve fakat farklı bir direksiyondadır. [16] nolu çalışmamızda sürekli (fark denklemi değil diferansiyel denklem olan) iki Lagrange sistemi eşlenmiş, [23] nolu çalışmamızda ise bu tartışma yüksek mertebeden tanjant grupları için çalışılıp yüksek mertebeden türevler içeren sürekli iki Lagrange sisteminin kolektif hareketi analiz edilmiştir. Bu tip bir genelleştirme, halihazırdaki çalışmamız için de uygun bir genelleştirme fikridir. İleriki yayınlarımızda bu nokta üzerine de değinmeyi planlamaktayız. Diğer bir parallel çalışma ise Lie grubu yerine tüm bu analizlerin Lie grupoid için yapılmasıdır. Bu durum da [8] nolu çalışmamızda incelenmiştir.

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGMENT)

Bu çalışma OE ve SS'nin "Lagrange ve Hamilton Sistemlerinin Eşlenmesi (Matched pairs of Lagrangian and Hamiltonian Systems)" adlı ve 117F426 kodlu TÜBİTAK projesi kapsamındadır. Yazarlar TÜBİTAK'a desteği için teşekkürü bir borç bilir. Metnin bu halini almasında değerli hakemlerin görüş ve önerileri önalıcı olmuştur. Kendilerine teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR

[1] Marrero, J. C., Martín de Diego, D. ve Martínez, E. 2006. Discrete Lagrangian and Hamiltonian mechanics on Lie groupoids. *Nonlinearity*, 19(6):1313–1348.

[2] Hairer, E., Lubich, C. ve Wanner, G. (2006). *Geometric numerical integration*, volume 31 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations.

[3] Lee, T., Leok, M. ve McClamroch, N.H. (2007). Lie group variational integrators for the full body problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(29-30):2907–2924.

[4] Marsden, J. E., Pekarsky, S. ve Shkoller, S. (1999). Discrete Euler-Poincaré and Lie-Poisson equations. *Nonlinearity*, 12(6):1647– 1662.

[5] Lu, J.-H. and Weinstein, A. (1990). Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions. *J. Differential Geom.*, 31(2):501–526.

[6] Majid, S. (1990). Matched pairs of Lie groups associated to solutions of theYang-Baxter equations. *Pacific J. Math.*, 141(2):311–332.

[7] Takeuchi, M. (1981). Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras. *Comm. Algebra*, 9(8):841–882.

[8] Esen, O., ve Sütlü, S. (2021). Discrete dynamical systems over double cross-product Lie groupoids. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 18(04), 2150057.

[9] Knapp, A. W. (1988). *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, volume 34 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[10] Majid, S. (1995). *Foundations of quantum group theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Weinstein, A. (1996). Lagrangian mechanics and groupoids. In *Mechanics day (Waterloo, ON, 1992)*, volume 7 of *Fields Inst. Commun.*, pages 207–231. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[12] Esen, O. (2017). Dinamik sistemlerin eşlenmesi. *Sakarya University Journal of Science*, 21(3):469–480.

[13] Şuhubi, E. (2013). *Exterior analysis: Using applications of differential forms*. Elsevier.

[14] Bobenko, A. I. ve Suris, Y. B. (1999). Discrete Lagrangian reduction, discrete Euler-Poincaré equations, and semidirect products. *Lett. Math. Phys.*, 49(1):79–93.

[15] Marsden, J. E., Pekarsky, S. ve Shkoller, S. (2000). Symmetry reduction of discrete Lagrangian mechanics on Lie groups. *J. Geom. Phys.*, 36(1-2):140–151.

[16] Esen, O. ve Sütlü, S. (2017). Lagrangian dynamics on matched pairs. *J. Geom. Phys.*, 111:142–157.

[17] Hindeleh, F. Y. (2006). *Tangent and cotangent bundles, automorphism groups and representations of Lie groups*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI.

[18] Kolář, I., Michor, P. W. ve Slovák, J. (1993). *Natural operations in differential geometry*. Springer-Verlag, Berlin.

[19] Michor, P. W. (2008). *Topics in differential geometry*, volume 93. American Mathematical Soc.

[20] Vizman, C. (2013). The group structure for jet bundles over Lie groups. *Journal of Lie Theory*, 23.

[21] Yano, K. ve Ishihara, S. (1973). *Tangent and cotangent bundles: differential geometry*, volume 16. Dekker.

[22] Hall, B. C., (2003). *Lie groups, Lie algebras, and representations.* Springer-Verlag, New York.

[23] Esen O., Kudeyt, M. ve Sütlü, S. (2021) Second order Lagrangian dynamics on double cross product groups. *Journal of Geometry and Physics*, 159, 1-18.