OKU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 3, Sayı 2, 117-125, 2020

OKU Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 3, Issue 2, 117-125, 2020

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

Osmaniye Korkut Ata University Journal of Natural and Applied Sciences

$q-$ Jackson Türevi ve Özdeğere Bağlı Sınır Koşulları ile Oluşturulan Bir Sınır Değer Probleminin Spektral Özellikleri

Fatma Ayça ÇETİNKAYA[1,*]

[1]Mersin Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 33343, Mersin

*https://orcid.org/0000-0003-0601-3112
*Sorumlu yazar: faycacetinkaya@mersin.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihçesi:
Geliş tarihi: 9 Eylül 2020
Kabul tarihi:9 Ekim 2020
Online Yayınlanma: 15 Aralık 2020

Anahtar Kelimeler:
$q-$ Jackson türevi
Sturm-Liouville operatörü
Sınır değer problemi
Özdeğer ve özfonksiyon
Green fonksiyonu

ÖZET

Spektral yöntemlerin ve özeşlenik operatörler teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynayan Sturm-Liouville teorisi birçok çalışmada Sturm-Liouville operatörü ile oluşturulmuş sınır değer problemleri olarak ele alınmıştır. Şimdiye kadar Sturm-Liouville sınır değer problemlerinde çoğunlukla klasik türev operatörü kullanılmış olsa da 2005 yılında Sturm-Liouville sınır değer problemlerindeki klasik türev operatörü $q-$ Jackson türevi ile değiştirilmiş ve böylece konuya farklı bir bakış açısı getirilmiştir. Matematiksel problemlerin uygulamalarında sıklıkla karşılaşılan sınır koşullarında özdeğer parametresi içeren sınır değer problemleri uzun bir geçmişe sahiptir. Bu çalışmada, $q-$ Jackson türevi içeren ikinci mertebeden bir fark denklemi ve özdeğer parametresine bağlı sınır koşulları ile oluşturulmuş bir sınır değer problemi ele alınmıştır. Probleme uygun direkt toplam uzayında verilen iç çarpım yardımıyla simetrik lineer bir operatör tanımlanarak, ele alınan sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiş ve Green fonksiyonu inşa edilmiştir.

Spectral Properties of a Boundary Value Problem with $q-$ Jackson Derivative and Eigenvalue-Dependent Boundary Conditions

Research Article

Article History:
Received: 9 September 2020
Accepted: 9 October 2020
Published online: 15 December 2020

Keywords:
$q-$Jackson derivative
Sturm-Liouville operator
Boundary value problem
Eigenvalues and eigenfunctions
Green function

ABSTRACT

Sturm-Liouville theory which plays a crucial role in the evolution of spectral methods and the theory of self-adjoint operators has been addressed in many studies as boundary value problems generated by the Sturm-Liouville operator. Even if, up to now, mostly classical derivative operator has been used in Sturm-Liouville boundary value problems, in 2005 the classical derivate was alternated by $q-$Jackson derivative and as a result a different point of view was developed in the area. Boundary value problems with eigenvalue parameter in boundary conditions have commonly been appeared in the applications of mathematical problems and have been studied for a considerable amount of time. This paper is devoted to study a boundary value problem consisting of a difference equation of second order with $q-$ Jackson derivative and eigenparameter dependent boundary conditions. We introduce an inner product in a suitable direct sum space and define a symmetric linear operator in this space. We investigate the eigenvalue and eigenfunction properties of this boundary value problem and we construct Green's function.

To Cite: Çetinkaya FA. $q-$ Jackson Türevi ve Özdeğere Bağlı Sınır Koşulları ile Oluşturulan Bir Sınır Değer Probleminin Spektral Özellikleri**.** Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2020; 3(2): 117-125.

1. Giriş

$q-$ analiz olarak da bilinen kuantum analizinin temelleri ilk kez 1908 yılında Jackson [1] tarafından ortaya konmuştur. Kuantum analizi $q \neq 1$ sabitlenmiş bir sayı, $t \neq 0$ ve f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}$$

biçimindeki $q-$ notasyonuna dayanır. Argümandaki kademeli yer değiştirmenin fonksiyonda meydana getirdiği değişimi hesaplayan klasik türevin aksine, $q-$ türev fonksiyondaki değişimi argümanın q kadar genişlemesini temel alarak hesaplar. f fonksiyonu $t \neq 0$ noktasında diferansiyellenebilirse

$$f'(t)=\lim_{q\to 1}\frac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır.

Spektral yöntemlerin ve özeşlenik operatörler teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynayan Sturm-Liouville teorisi birçok çalışmada Sturm-Liouville operatörü ile oluşturulmuş sınır değer problemleri olarak ele alınmıştır. Şimdiye kadar Sturm-Liouville sınır değer problemlerinde çoğunlukla klasik türev operatörü kullanılmış olsa da Annaby ve Mansour [2] (ayrıca bknz. [3]) Sturm-Liouville sınır değer problemlerindeki klasik türev operatörünü $q-$ Jackson türevi ile değiştirerek konuya farklı bir bakış açısı getirmişlerdir. Annaby ve Mansour [1] aşağıda verilen sınır değer problemini ele almışlardır:

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x)+v(x)y(x)=\lambda y(x), \qquad (1.1)$$

$$U_1(y):=a_{11}y(0)+a_{12}D_{q^{-1}}y(0)=0, \qquad (1.2)$$

$$U_2(y):=a_{21}y(a)+a_{22}D_{q^{-1}}y(a)=0, \qquad (1.3)$$

burada $v(\cdot)$, $[0,a]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sıfır noktasında sürekli bir fonksiyon, sınır koşullarındaki katsayılar ise (a_{ij}) $(1 \le i, j \le 2)$ matrisinin rankı 2 olacak biçimdeki keyfi reel sayılardır. Bahsi geçen bu çalışmada, Annaby ve Mansour $L_q^2(a,b)$ Hilbert uzayında özeşlenik bir $q-$fark operatörü tanımlamış, özdeğerler ve özfonksiyonların bazı spektral özelliklerini incelemiş, Green fonksiyonunu inşa etmiş ve özfonksiyonlar kümesinin $L_q^2(a,b)$'de tam ortogonal bir küme oluşturduğunu göstermişlerdir. Annaby ve Mansour'un elde ettiği bu sonuçlar pek çok farklı problem için bir motivasyon kaynağı olmuştur. Örneğin, Eryılmaz [4] sınır koşulunda özdeğer-parametresi içeren bir $q-$sınır değer problemi ele almıştır ve bu sınır değer probleminin özdeğer ve öz fonksiyonlarından oluşan sistemin tamlığı ile ilgili teoremler ispatlamıştır. Al-Towaib [5] ve Mansour [6] aynı mertebeli sol Riemann-Liouville ve sağ Caputo $q-$kesirli türev içeren regüler bir Sturm-Liouville problemi ele almışlar ve bu problemin özdeğer ve öz fonksiyonlarını incelemişlerdir. Allahverdiev ve Tuna [7] tüm eksende tanımlı singüler bir $q-$Sturm-Liouville operatörü için Parseval eşitliğini ve öz fonksiyonlara göre ayrışım formülünü elde etmiştir. Akça, Benbourename ve Eleuch [8] bazı $q-$analiz ve $q-$türev tanımları vermiş ve daha sonra bu tanımlar yardımıyla bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmişlerdir. Aydın [9] ve Çetinkaya ve Aydın [10] parçalı sürekli bir fonksiyon içeren ikinci mertebeden bir $q-$ fark denklemi ile oluşturulan bir sınır değer problemini ele alarak, bu problemin özdeğer ve öz fonksiyon özelliklerini incelemiş ve probleme uygun Green fonksiyonunu inşa etmişlerdir. El-Metwally ve Masoud [11] dördüncü mertebeden lineer olmayan $q-$ fark denklemlerinin çözümleri için varlık teoremleri ispatlamışlardır.

Bu çalışmada, $x \in [0,\pi]$ olmak üzere

$$ly:=-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x)+v(x)y(x)=\lambda y(x), \quad (1.4)$$

denklemi ve

$$U_1(y):=\alpha_1 y(0)+\alpha_2 D_{q^{-1}}y(0)+\lambda\left[\alpha_3 y(0)+\alpha_4 D_{q^{-1}}y(0)\right]=0, \qquad (1.5)$$

$$U_2(y):=\beta_1 y(\pi)+\beta_2 D_{q^{-1}}y(\pi)+\lambda\left[\beta_3 y(\pi)+\beta_4 D_{q^{-1}}y(\pi)\right]=0, \qquad (1.6)$$

sınır koşullarıyla oluşturulmuş sınır değer problemi ele alınacaktır, burada $v(\cdot) \in L_q^2(0,\pi)$ reel değerli bir fonksiyon, λ bir kompleks parametre ve $\alpha_i, \beta_j \neq 0$ $(i, j = 1,2,3,4)$ keyfi reel sayılardır.

Matematiksel problemlerin uygulamalarında sıklıkla karşılaşılan sınır koşullarında özdeğer parametresi içeren sınır değer problemleri uzun bir geçmişe sahiptir. Fulton [12], Titchmarsh'ın [13] sonlu aralıkta tanımlı regüler bir Sturm-Liouville problemi için yaptığı incelemenin, sınır koşulunda özdeğer parametresi içeren regüler problemlere uyarlanabileceğini göstermiştir. Fulton, bir ucu sabit bir noktaya, diğer ucu ise bir kütleye bağlı olan homojen bir telin titreşimi probleminin sınır koşulunda özdeğer parametresi içeren bir sınır değer problemine indirgenebileceğini göstermiştir. Bu biçimdeki bir problemin, Hilbert uzayında tanımlı özeşlenik bir operatörle olan ilişkisi ise Walter [14] tarafından incelenmiştir. Walter [14] (ayrıca bknz. [12]), özdeğer parametresine bağlı sınır değer problemleri için teorik bir operatör formülasyonu vermiştir. Sınır koşulunda özdeğer parametresi içeren sınır değer problemleri literatürde oldukça geniş bir yer kaplamaktadır. Konuya ilgi duyan okuyucular [15-24] çalışmalarına ve bu çalışmalarda verilen kaynaklara yönlendirilebilir.

Bu çalışma, 5 bölümden oluşmaktadır. 2. Bölüm, çalışmanın devamında ihtiyaç duyulacak bazı notasyon, tanım ve lemmalara ayrılmıştır. 3. Bölümde (1.4)-(1.6) sınır değer problemine uygun bir teorik-operatör formülasyonu verilmiştir ve bazı özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir. 4. Bölümde (1.4)-(1.6) problemine uygun Green fonksiyonu inşa edilmiş ve bu fonksiyonun bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. 5. Bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve gelecekte çalışmaya değer görülen bazı açık problemlere yer verilmiştir.

2. Materyal ve Metod

Bu bölümde, Annaby ve Mansour'un [3] elde ettiği sonuçlar temel alınarak, çalışmanın devamlılığını sağlamak için gerekli olan bazı $q-$ notasyonlara ve sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1 $\mu \in \mathbb{C}$ sabitlenmiş bir sayı olsun ve $A \subset \mathbb{C}$ kümesi göz önüne alınsın. Her $z \in A$ için $\mu z \in A$ bağıntısı sağlanırsa, $A \subset \mathbb{C}$ kümesine bir $\mu-$ geometrik küme denir. Eğer, bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi, $\mu-$ geometrik bir küme ise, $z \in A$ olmak üzere, bu A kümesi tüm $\{z\mu^n\}_{n=0}^{\infty}$ geometrik dizilerini içerir.

Tanım 2.2 f, $q-$ geometrik bir A kümesi üzerinde tanımlı, reel veya kompleks değerli bir fonksiyon ve $|q| \neq 1$ olsun. $q-$ fark operatörü D_q

$$D_q f(z) := \frac{f(z) - f(qz)}{z - qz}, \qquad z \in A - \{0\} \tag{2.1}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

(2.1) eşitliği ile verilen $q-$ fark operatörü Jackson $q-$ fark operatörü olarak adlandırılır. $0 \in A$ ise, f fonksiyonunun 0 noktasındaki $q-$ türevi, aşağıdaki limitin mevcut ve $z \in A$ elemanından bağımsız olması durumunda, $|q| < 1$ iken,

$$D_q f(0) := \lim_{n\to\infty} \frac{f(zq^n) - f(0)}{zq^n}, \quad z \in A - \{0\}$$

ile ve $|q| > 1$ iken, $D_q f(0) := D_{q^{-1}} f(0)$ ile tanımlıdır.

3. Bölümde verilecek olan özeşlenik problemin formülasyonu $D_{q^{-1}}$ ifadesini içerdiğinden, burada $x \in A$ olmak üzere, $D_q f(0)$ $q-$ türevinin var olması durumunda, $D_{q^{-1}} f(x)$ ifadesinin

$$D_{q^{-1}} f(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(q^{-1}x)}{x(1-q^{-1})}, & x \neq 0, \\ D_q f(0), & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlı olduğunu belirtmekte yarar vardır.

$q-$ türevin sağ tersi olan $q-$ integral

$$\int_a^b f(t)\, d_q t := \int_0^b f(t)\, d_q t - \int_0^a f(t)\, d_q t \qquad (a, b \in A)$$

biçiminde verilir [1]. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki seri $x=a$ ve $x=b$ noktalarında yakınsak olmak koşulu ile $\int_0^x f(t)\,d_q t$ integrali

$$\int_0^x f(t)\,d_q t=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} xq^n f\left(xq^n\right) \qquad (x\in A)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.3 f , $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $q-$ integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul tüm $z\in A$ elemanları için $\int_0^z f(t)\,d_q t$ integralinin mevcut olmasıdır.

Tanım 2.4 $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu verilsin ve $0\in A$ olsun. Tüm $z\in A$ elemanları için $\lim_{n\to\infty} f\left(zq^n\right)=f(0)$ eşitliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna sıfır noktasında $q-$ regüler bir fonksiyon denir.

$A\subseteq\mathbb{R}$ kümesi $q-$ geometrik bir küme, f fonksiyonu bu A kümesi üzerinde tanımlı ve sıfır noktasında $q-$ regüler bir fonksiyonsa $f\left(0^+\right)$ ve $f\left(0^-\right)$ fonksiyonları sırasıyla, $f\left(0^+\right):=\lim_{\substack{k\to\infty\\ x>0}} f\left(xq^k\right)$ ve $f\left(0^-\right):=\lim_{\substack{k\to\infty\\ x<0}} f\left(xq^k\right)$ eşitlikleri ile tanımlıdır. f fonksiyonunun sıfır noktasında $q-$ regüler bir fonksiyon olması durumunda $f(0)=f\left(0^-\right)=f\left(0^+\right)$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. Bir f fonksiyonunun sıfır noktasındaki $q-$ regülerliği bazı durumlarda klasik analizdeki sürekliliğe karşılık gelir. Sıfır noktasındaki süreklilik, sıfır noktasındaki $q-$ regülerliği gerektirirken, bu durumun tersi her zaman doğru değildir (bknz. [3] Sayfa 7, Eşitlik 1.22).

$q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları tüm $x\in A$ elemanları için $q-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda kısmi $q-$ integrasyon kuralı

$$\int_0^a g(t)D_q f(t)\,d_q t=(fg)(a)-\lim_{n\to\infty}(fg)\left(aq^n\right) - \int_0^a D_q g(t)\, f(qt)\,d_q t \qquad (2.2)$$

ile tanımlıdır. Eğer, f ve g fonksiyonları sıfır noktasında $q-$ regüler fonksiyonlar ise, o halde (2.2)'nin sağ tarafındaki limit $(fg)(0)$ ifadesiyle değiştirilebilir.

$L_q^2(0,a)$, $[0,a]$ üzerinde tanımlı $\|f\|:=\left(\int_0^a |f(x)|^2\,d_q x\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$ biçimindeki tüm kompleks değerli fonksiyonların bir kümesi olsun. $L_q^2(0,a)$ kümesi,

$$\langle f,g\rangle:=\int_0^a f(x)\overline{g(x)}\,d_q x, \qquad f,g\in L_q^2(0,a) \qquad (2.3)$$

ile tanımlı iç çarpıma göre ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır.

Lemma 2.1 $f(\cdot),g(\cdot)\in L_q^2(0,a)$ olmak üzere, $x\in(0,a]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\left(D_q g\right)\left(xq^{-1}\right)=D_{q,xq^{-1}}g\left(xq^{-1}\right)=D_{q^{-1}}g(x), \qquad (2.4)$$

$$\left\langle D_q f,g\right\rangle=f(a)\overline{g\left(aq^{-1}\right)}-\lim_{n\to\infty} f\left(aq^n\right)\overline{g\left(aq^{n-1}\right)} +\left\langle f,-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}g\right\rangle \qquad (2.5)$$

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}f,g\right\rangle=\lim_{n\to\infty} f\left(aq^{n-1}\right)\overline{g\left(aq^n\right)}-f\left(aq^{-1}\right)\overline{g(a)} +\left\langle f,D_q g\right\rangle. \qquad (2.6)$$

3. Özdeğer ve Özfonksiyon Özellikleri

Bu bölümde, (1.4)-(1.6) sınır değer problemine uygun teorik-operatör formülasyonu verilecek ve bazı özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenecektir.

$H := L_q^2(0,\pi)\oplus\mathbb{C}^2$ Hilbert uzayında tanımlı iççarpım

$$(f,g):=\int_0^\pi f_1(x)\overline{g_1(x)}d_qx+\frac{f_2\overline{g_2}}{\chi_1}+\frac{f_3\overline{g_3}}{\chi_2} \tag{3.1}$$

ile verilsin, burada $f=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}\in H$, $g=\begin{pmatrix} g_1(x)\\ g_2\\ g_3\end{pmatrix}\in H$, $\chi_1:=\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3>0$, $\chi_2:=\beta_1\beta_4-\beta_2\beta_3>0$'dır.

Tanım bölgesi,

$$D(A)=\left\{\begin{array}{l} f\in H: f_1, D_{q^{-1}}f_1\in AC[0,\pi],\ lf_1\in L_q^2(0,\pi),\\ f_2=-\left(\alpha_3 f_1(0)+\alpha_4 D_{q^{-1}}f_1(0)\right),\ f_3=-\left(\beta_3 f_1(\pi)+\beta_4 D_{q^{-1}}f_1(\pi)\right)\end{array}\right\}$$

olan A operatörü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$A(f):=\begin{pmatrix} -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q f_1(x)+v(x)f_1(x)\\ \alpha_1 f_1(0)+\alpha_2 D_{q^{-1}}f_1(0)\\ \beta_1 f_1(\pi)+\beta_2 D_{q^{-1}}f_1(\pi)\end{pmatrix}.$$

Teorem 3.1 H Hilbert uzayında tanımlı A operatörü simetrik bir operatördür.

Kanıt. Aşağıdaki ifade her $f,g\in D(A)$ fonksiyonu için sağlanır:

$$\begin{aligned}(Af,g)-(f,Ag)&=\int_0^\pi Af_1(x)\overline{g_1(x)}d_qx+\frac{Af_2\overline{g_2}}{\chi_1}+\frac{Af_3\overline{g_3}}{\chi_2}\\ &\quad-\int_0^\pi f_1(x)\overline{Ag_1(x)}d_qx-\frac{f_2\overline{Ag_2}}{\chi_1}-\frac{f_3\overline{Ag_3}}{\chi_2}\\ &=\int_0^\pi\left(-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q f_1(x)+v(x)f_1(x)\right)\overline{g_1(x)}d_qx\\ &\quad-\int_0^\pi f_1(x)\overline{\left(-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q g_1(x)+v(x)g_1(x)\right)}d_qx\\ &\quad+\frac{Af_2\overline{g_2}}{\chi_1}+\frac{Af_3\overline{g_3}}{\chi_2}-\frac{f_2\overline{Ag_2}}{\chi_1}-\frac{f_3\overline{Ag_3}}{\chi_2}.\end{aligned}$$

Burada, son eşitlikte yer alan ilk integralde $f(x)=D_q f_1(x)$ ve $g(x)=g_1(x)$ alarak ve bu integrale (2.6) formülünü uygulayarak, yukarıdaki ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}(Af,g)-(f,Ag)&=\lim_{n\to\infty}\left(D_q f_1\right)\left(\pi q^{n-1}\right)\overline{g_1\left(\pi q^n\right)}\\ &\quad-\left(D_q f_1\right)\left(\pi q^{-1}\right)\overline{g_1(\pi)}+\left\langle D_q f_1, D_q g_1\right\rangle\\ &\quad=\int_0^\pi f_1(x)\overline{\left(-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q g_1(x)\right)}d_qx\\ &\quad+\frac{Af_2\overline{g_2}}{\chi_1}+\frac{Af_3\overline{g_3}}{\chi_2}-\frac{f_2\overline{Ag_2}}{\chi_1}-\frac{f_3\overline{Ag_3}}{\chi_2}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

İlerlemek adına (3.2) eşitliğindeki $\left\langle D_q f_1, D_q g_1\right\rangle$ terimini kullanılabilir hale getirmek için (2.4) ifadesinde $f(x)=f_1(x)$, $g(x)=D_q g_1(x)$ alınırsa (3.2) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}(Af,g)-(f,Ag)&=[f_1,g_1](\pi)-\lim_{n\to\infty}[f_1,g_1]\left(\pi q^n\right)\\ &\quad+\frac{Af_2\overline{g_2}}{\chi_1}+\frac{Af_3\overline{g_3}}{\chi_2}-\frac{f_2\overline{Ag_2}}{\chi_1}-\frac{f_3\overline{Ag_3}}{\chi_2},\end{aligned} \tag{3.3}$$

burada $[f,g](x)$

$$[f,g](x):=f(x)\overline{D_{q^{-1}}g(x)}-D_{q^{-1}}f(x)\overline{g(x)}$$

biçiminde tanımlıdır. A operatörünün tanım bölgesindeki koşullardan yararlanarak

$$\frac{Af_2\overline{g_2}}{\chi_1}+\frac{Af_3\overline{g_3}}{\chi_2}-\frac{f_2\overline{Ag_2}}{\chi_1}-\frac{f_3\overline{Ag_3}}{\chi_2}=0$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla, eşitlik (3.3) aşağıdaki hali alır:

$$(Af,g)-(f,Ag)=[f_1,g_1](\pi)-\lim_{n\to\infty}[f_1,g_1]\left(\pi q^n\right) \tag{3.4}$$

$f_1(x)$ ve $g_1(x)$ fonksiyonlarının sıfır noktasındaki süreklilikleri $\lim_{n\to\infty}[f_1,g_1]\left(\pi q^n\right)=[f_1,g_1](0)$ olmasını gerektirir. O halde, (3.4) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(Af,g)-(f,Ag)=[f_1,g_1](\pi)-[f_1,g_1](0).$$

$f_1(x), g_1(x) \in C_q^2(0)$ fonksiyonlarının (1.5), (1.6) sınır koşullarını sağladığı göz önünde bulundurularak $[f_1, g_1](0) = 0$ ve $[f_1, g_1](\pi) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(Af, g) - (f, Ag) = 0$ sonucuna ulaşılır ve böylece teorem kanıtlanmış olur.

Tanım 3.1 (1.4)-(1.6) sınır değer problemi için sıfırdan farklı bir $\Phi^*(\cdot)$ çözümü bulunabilecek biçimdeki λ^* sayısına bu sınır değer probleminin özdeğeri denir. Bu durumda, $\Phi^*(\cdot)$ fonksiyonu (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin λ^* özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu olarak adlandırılır. Bir özdeğerin tekrarlanma sayısı, bu özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız çözümlerin sayısı ile tanımlanır. Özel olarak, bir özdeğere, lineer bağımsız tek bir çözüm karşılık geliyorsa bu özdeğer basittir denir.

A operatörünün özfonksiyonları

$$\Phi(x, \lambda_n) = \Phi_n := \begin{pmatrix} \varphi(x, \lambda_n) \\ \alpha_3 \varphi(0, \lambda_n) + \alpha_4 D_{q^{-1}} \varphi(0, \lambda_n) \\ \beta_3 \varphi(\pi, \lambda_n) + \beta_4 D_{q^{-1}} \varphi(\pi, \lambda_n) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır.

Aşağıdaki sonuçlar kanıtsız olarak verilebilir.

Sonuç 3.1 Farklı özdeğerlere karşılık gelen Φ_1 ve Φ_2 özfonksiyonları diktir.

Sonuç 3.2 (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

Şimdi,

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} U_1(\Phi_1) & U_1(\Phi_2) \\ U_2(\Phi_1) & U_2(\Phi_2) \end{vmatrix}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Burada, δ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ Kronecker deltasını göstermek üzere, $\Phi_i(\cdot, \lambda)$ fonksiyonları $D_q^{j-1} \Phi_i(\cdot, \lambda) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$, $\lambda \in \mathbb{C}$) başlangıç koşulları ile belirlenen fonksiyonlardır. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu olarak tanımlanır.

Aşağıdaki teorem, (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özdeğerlerinin $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun basit sıfırları olduğunu ifade eder.

Teorem 3.2. (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun basit sıfırlarıdır.

Kanıt. $\theta_1(\cdot, \lambda)$ ve $\theta_2(\cdot, \lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki koşullar sağlanacak biçimde tanımlansın:

$$\begin{cases} \theta_1(x, \lambda) := U_1(\phi_1)\phi_1(x, \lambda) - U_1(\phi_1)\phi_2(x, \lambda), \\ \theta_2(x, \lambda) := U_2(\phi_2)\phi_1(x, \lambda) - U_2(\phi_1)\phi_2(x, \lambda). \end{cases} \tag{3.5}$$

Buradan, $\theta_1(\cdot, \lambda)$ ve $\theta_2(\cdot, \lambda)$ fonksiyonlarının (1.4) denkleminin aşağıda verilen başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olduğu görülebilir:

$$\begin{cases} \theta_1(0, \lambda) = \alpha_2 + \lambda \alpha_4, \quad D_{q^{-1}} \theta_1(0, \lambda) = -(\alpha_1 + \lambda \alpha_3), \\ \theta_2(\pi, \lambda) = \beta_2 + \lambda \beta_4, \quad D_{q^{-1}} \theta_2(\pi, \lambda) = -(\beta_1 + \lambda \beta_3). \end{cases} \tag{3.6}$$

Şimdi, λ_0'ın (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin bir özdeğeri olduğu kabul edilsin.

$$W_q(\theta_1(\cdot, \lambda), \theta_2(\cdot, \lambda))(x) = \Delta(\lambda) W_q(\phi_1(\cdot, \lambda), \phi_2(\cdot, \lambda))(x) = \Delta(\lambda)$$

eşitliği, reel değerli $\theta_i(x, \lambda_0)$ $(i = 1, 2)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olmasını gerektirir, yani

$$\theta_1(x, \lambda_0) = k_0 \theta_2(x, \lambda) \quad (k_0 \neq 0) \tag{3.7}$$

eşitliği sağlanır. (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{cases} \theta_1(\pi, \lambda_0) = k_0 \theta_2(\pi, \lambda) = k_0(\beta_2 + \lambda \beta_4), \\ D_{q^{-1}} \theta_1(\pi, \lambda_0) = k_0 D_{q^{-1}} \theta(\pi, \lambda) = -k_0(\beta_1 + \lambda \beta_3) \end{cases} \tag{3.8}$$

olduğu kolayca görülebilir. $\theta_1(\cdot,\lambda)$ ve $\theta_1(\cdot,\lambda_0)$ fonksiyonlarına $q-$ Lagrange kuralı (bknz. [3], sf. 81) uygulanarak

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_0)\int_0^{\pi}\theta_1(x,\lambda)\theta_1(x,\lambda_0)d_qx &= \theta_1(\pi,\lambda)D_{q^{-1}}\theta(\pi,\lambda_0)- \\ &-D_{q^{-1}}\theta_1(\pi,\lambda)\theta_1(\pi,\lambda_0) \\ &= k_0\left(\theta_1(\pi,\lambda)D_{q^{-1}}\theta(\pi,\lambda_0)-\theta_2(\pi,\lambda_0)D_{q^{-1}}\theta_1(\pi,\lambda)\right) \\ &= k_0W_q\left(\theta_1(\cdot,\lambda),\theta_2(\cdot,\lambda)\right)\left(q^{-1}\pi\right)=k_0\Delta(\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$, λ nın bir tam fonksiyonu olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=\frac{1}{k_0}\int_0^{\pi}\theta_1^2(x,\lambda_0)d_qx\neq 0 \tag{3.9}$$

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonun sıfırlarının basitliği (3.9)'un direkt bir sonucudur. Böylece teorem kanıtlanmış olur. □

4. Green Fonksiyonu

Bu bölümde, (1.4)-(1.6) sınır değer problemine uygun Green fonksiyonu inşa edilecek ve bu fonksiyonun bazı özelliklerinden bahsedilecektir.

(1.4)-(1.6) sınır değer problemine uygun Green fonksiyonu ile $f_1(x)\in L_q^2(0,\pi)$ olmak üzere

$$ly:=-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_qy(x)+\{-\lambda+v(x)\}y(x)=f_1(x), \tag{4.1}$$

$$U_1(y):=\alpha_1y(0)+\alpha_2D_{q^{-1}}y(0)+\lambda\left[\alpha_3y(0)+\alpha_4D_{q^{-1}}y(0)\right]=f_2, \tag{4.2}$$

$$U_2(y):=\beta_1y(\pi)+\beta_2D_{q^{-1}}y(\pi)+\lambda\left[\beta_3y(\pi)+\beta_4D_{q^{-1}}y(\pi)\right]=f_3, \tag{4.3}$$

homojen olmayan sınır değer probleminin çözümü aranırken karşılaşılır.

Teorem 4.1 λ'nın (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin bir özdeğeri olmadığı varsayılsın ve ayrıca $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonu (4.1) denklemini ve (4.2), (4.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}\phi(x,\lambda)&=\int_0^{\pi}G(x,t;\lambda)f_1(t)d_qt \\ &+\frac{f_2\left(\alpha_3G(0,\cdot;\lambda)+\alpha_4G(0,\cdot;\lambda)\right)}{\chi_1} \\ &+\frac{f_3\left(\beta_3G(\pi,\cdot;\lambda)+\beta_4G(\pi,\cdot;\lambda)\right)}{\chi_2}\end{aligned} \tag{4.4}$$

biçiminde ifade edilebilir, burada $G(x,t;\lambda)$ (4.1)-(4.3) homojen olmayan sınır değer probleminin aşağıdaki gibi tanımlanan Green fonksiyonudur:

$$G(x,t;\lambda)=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\theta_2(x,\lambda)\theta_1(t,\lambda), & t\le x,\\ \theta_1(x,\lambda)\theta_2(t,\lambda), & x\le t.\end{cases}$$

Tersine, (4.4) ile tanımlı $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1) denklemini ve (4.2), (4.3) koşullarını sağlar.

Kanıt: Sabitlerin değişimi yönteminin $q-$ benzeri kullanılarak (4.1)-(4.3) homojen olmayan sınır değer probleminin çözümü

$$\phi(x,\lambda)=c_1(x)\theta_1(x,\lambda)+c_2(x)\theta_2(x,\lambda) \tag{4.5}$$

biçiminde aransın. Burada, $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları

$$\begin{cases}D_{q,x}c_1(x)\theta_1(x,\lambda)+D_{q,x}c_2(x)\theta_2(x,\lambda)=0,\\ D_{q,x}c_1(x)D_{q,x}\theta_1(x,\lambda)+D_{q,x}c_2(x)D_{q,x}\theta_2(x,\lambda)=f_1(x)\end{cases} \tag{4.6}$$

denklemler sisteminin çözümleridir.

Eğer, $D_{q,x}c_i(x)$ $(i=1,2)$ fonksiyonları $[0,t]$ aralığında $q-$ integrallenebilirse o halde $\lim\limits_{n\to\infty}tq^n\theta_i\left(tq^{n+1},\lambda\right)f\left(tq^{n+1}\right)=0$ $(i=1,2)$ eşitliği sağlanır. $q-$ geometrik bir A_f kümesi $A_f:=\left\{x\in[0,\pi]:\lim\limits_{n\to\infty}xq^n\left|f\left(xq^n\right)\right|^2=0\right\}$ biçiminde tanımlansın. $f\in L_q^2(0,\pi)$ olduğundan A_f kümesi $\left\{aq^m:m\in\mathbb{N}_0\right\}$ elemanlarını içeren $q-$ geometrik bir kümedir. Dolayısıyla, $D_qc_i(\cdot)$ $(i=1,2)$ tüm $x\in A_f$'ler için $[0,x]$ aralığında $q-$ integrallenebilir. O halde, c_1^* ve c_2^* sayıları bilinmeyen sabitler ve $x \in A_f$ olmak üzere (4.6) denklem sisteminin çözümleri

$$\begin{cases} c_1(x) = c_1^* + \dfrac{q}{\Delta(\lambda)} \displaystyle\int_0^x \theta_2(qt,\lambda) f_1(qt) d_q t, \\ c_2(x) = c_2^* + \dfrac{q}{\Delta(\lambda)} \displaystyle\int_x^\pi \theta_1(qt,\lambda) f_1(qt) d_q t \end{cases} \tag{4.7}$$

biçiminde olur. (4.7) eşitlikleri (4.5)'te yerine yazılarak ve (4.2), (4.3) koşulları dikkate alınarak (4.4) elde edilir. Şimdi, tersine, $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.4) biçiminde ifade edildiği varsayılsın. Buradan, $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.1) denklemini ve (4.2), (4.3) koşullarını sağladığı kolayca görülür. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

Aşağıdaki teorem Green fonksiyonun sağladığı özellikleri vermektedir. Teoremin kanıtı [3]'te verilen Teorem 3.9'a benzer biçimde yapılabilir.

Teorem 4.2. Green fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $G(x,t;\lambda)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında süreklidir.

ii) $G(x,t;\lambda) = G(t,x;\lambda)$ sağlanır.

Sabitlenmiş her $t \in (0,q\pi]$ için $G(x,t;\lambda)$ fonksiyonu $[0,t)$ ve $(t,\pi]$ aralıklarında (4.1) denklemini ve (4.2), (4.3) koşullarını sağlar.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, $q-$ Jackson türevi içeren ikinci mertebeden bir fark denklemi ve özdeğer parametresine bağlı sınır koşulları ile oluşturulmuş bir sınır değer problemi ele alınmıştır. Probleme uygun direkt toplam uzayında verilen iççarpım yardımıyla simetrik bir operatör tanımlanarak, ele alınan sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiş ve Green fonksiyonu inşa edilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda, değişik sınır değer koşullarıyla elde edilen ikinci mertebeden parçalı sürekli katsayılı sınır değer problemlerinin çeşitli spektral özellikleri incelenerek literatüre katkı sağlanabilir.

Teşekkür

Özgün araştırma makalesi niteliğinde olan bu çalışmanın iyileştirilmesi adına görüş bildiren saygıdeğer hakemlere teşekkürlerimi sunarım.

Kaynakça

[1] Jackson FH. On $q-$ functions and certain difference operator, Transactions of Royal Society of Edinburgh 1908; 46: 64-72.

[2] Annaby MH., Mansour ZS. Basic Sturm-Liouville problems, Journal of Physics A: Mathematical and General 2005; 48: 3775-3797.

[3] Annaby MH, Mansour ZS. $q-$ fractional calculus and equations. Springer; 2012.

[4] Eryılmaz A. Spectral analysis of a $q-$ Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions, Journal of Function Spaces and Applications 2012; (Article ID 736437), 17 pages.

[5] Al-Towaib MA. A $q-$ fractional approach to the regular Sturm-Liouville problems, Electronic Journal of Differential Equations 2017; 88: 1–13.

[6] Mansour ZS. On fractional $q-$ Sturm-Liouville problems, Journal of Fixed Point Theory and Applications 2017; 19: 1591–1612.

[7] Allahverdiev BP., Tuna H. An expansion theorem for $q-$ Sturm-Liouville operators on the whole line, Turkish Journal of Mathematics 2018; 42(3): 1060–1071.

[8] Akça H., Benbourename J., Eleuch H. The $q-$ derivative and differential equation, Journal of Physics: Conference Series 2019; 1411, 012002.

[9] Aydın İ. Bir $q-$ kesirli sınır değer probleminin spektral özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 47 sayfa: Mersin, Türkiye, 2019.

[10] Çetinkaya FA., Aydın İ. Spectral properties of a $q-$ boundary value problem with piecewise-continuous coefficient, Palestine Journal of Mathematics 2019; 8(11): 390–396.

[11] El-Metwally H., Masoud, FM. Solving some $q-$difference equations of the fourth order, Journal of Fractional Calculus and Applications 2020; 11(1): 97–111.

[12] Fulton CF. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proceedings of Royal Society of Edinburgh 1997; 77: 293–308

[13] Titchmarsh EC. Eigenfuction expansions associated with second order differential equations I, 2nd edition. Oxford University Press; 1962.

[14] Walter J. Regular eiganvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, Mathematische Zeitschrift 1973; 133: 301-312.

[15] Russakovskij EM. Operator treatment of boundary value problems with spectral parameters entering via polynomials in the boundary conditions, Functional Analysis and Its Applications 1975; 9: 358-359.

[16] Hinton DB., An expansion theorem for an eigenvalue problem with eiganvalue parameter in the boundary conditions, The Quarterly Journal of Mathematics 1979; 30: 33-42.

[17] Binding P., Hryniv R., Langer H. Elliptic eigenvalue problems with eigenparameter-dependent boundary conditions, Journal of Differential Equations 2001; 174: 30-54.

[18] Binding PA., Browne PJ., Watson BA. Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter II, Journal of Computational and Applied Mathematics 2002; 148(1): 147-168.

[19] Huseynov HM., Jamshidipour AH. On Jost solutions of Sturm-Liouville equations with spectral parameter in discontinuity condition, Transactions of NAS of Azerbaijan 2010; XXX(4): 61-68.

[20] Kablan A., Özden T. A dirac system with transmission condition and eigenparameter in boundary condition, Abstract and Applied Analysis 2013; Article ID 395457, 6 pages.

[21] Şen E. Asymptotic properties of eigenvalues of a Sturm-Liouville problem with discontinuous weight function, Miskolc Mathematical Notes 2014; 15 (1): 197-209.

[22] Tuna H., Kendüzler A. On the completeness of eigenfunctions of a discontinuous Dirac operator with an eigenparameter in the boundary condition, Filomat 2017; 31(8): 2537-2544.

[23] Çetinkaya FA. A discontinuous $q-$ fractional boundary value problem with eigenparameter dependent boundary conditions, Miskolc Mathematical Notes 2019; 20(2): 795-806.

[24] Çetinkaya FA. Basic properties of an eigenparameter-dependent $q-$ boundary value problem, Kragujevac Journal of Mathematics 2019; 43(4): 503-512.