Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 11(2): 1468-1480, 2021
Journal of the Institute of Science and Technology, 11(2): 1468-1480, 2021
ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618
Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.804438**
Araştırma Makalesi / *Research Article*
Geliş tarihi / Received: 06-10-2020 **Kabul tarihi / Accepted: 21-01-2021**

Atıf İçin: Değirmen N, Değirmen İ, 2021. A_{p1,q1}^{p2,q2}(G,w) Uzayı ve Bazı Topolojik Özellikleri Üzerine. Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 11(2): 1468-1480.

To Cite: Değirmen N, Değirmen İ, 2021. On the Space A_{p1,q1}^{p2,q2}(G,w) and Some of Its Topological Properties. Journal of the Institute of Science and Technology, 11(2): 1468-1480.

A_{p1,q1}^{p2,q2}(G,w) Uzayı ve Bazı Topolojik Özellikleri Üzerine

Nilay DEĞİRMEN[1*], İbrahim DEĞİRMEN[2]

ÖZET: G ünimodüler yerel kompakt grup ve $p=\min\{p_1,p_2\}$ olmak üzere $w\in B_p$ olsun. Bu makalede, $|||.|||$ infimum normlu $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının bazı önemli topolojik özellikleri incelenmiştir. İlk olarak, $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu ve ötelemeler altında invaryant olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayından $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayına tanımlı $h\to L_s h$ dönüşümünün lineer ve sınırlı olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Projektif tensör çarpımı, girişim operatörü, ağırlıklı Lorentz uzayı, Banach uzay

On the Space A_{p1,q1}^{p2,q2}(G,w) and Some of Its Topological Properties

ABSTRACT: Let G be a unimodular locally compact group and $w\in B_p$ where $p=\min\{p_1,p_2\}$. In this paper, we examine some crucial topological properties of the space $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ endowed with the infimum norm $|||.|||$. We first prove that $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ becomes a Banach space and invariant under translation. We also show that the mapping $h\to L_s h$ is linear and bounded from $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ to $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$.

Keywords: Projective tensor product, convolution operator, weighted Lorentz space, Banach space

[1] Nilay DEĞİRMEN (**Orcid ID:** 0000-0001-8192-8473), Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun, Türkiye
[2] İbrahim DEĞİRMEN (**Orcid ID:** 0000-0001-5669-1881), Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun, Türkiye

***Sorumlu Yazar / Corresponding Author:** Nilay DEĞİRMEN, e-mail: nilay.sager@omu.edu.tr

GİRİŞ

Avcı ve Gürkanlı (2007), Yap (1969) tarafından tanımlanan Lorentz uzaylarını kullanarak G yerel kompakt Abel grup olmak üzere bir $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayı ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlamış, bu uzayın bir Banach uzay olduğunu ve sağladığı bazı temel topolojik sonuçları elde etmiştir. Ayrıca Avcı ve Gürkanlı (2007), aynı çalışmada $L(p_1,q_1)(G)$ ve $L(p_2,q_2)(G)$ Lorentz uzaylarının $L^1(G)$ normuna göre projektif tensör çarpımı olan $L(p_1,q_1)(G)\otimes_{L^1(G)} L(p_2,q_2)(G)$ uzayı ile $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayının izometrik izomorf olduğunu ispatlamıştır.

Li ve Sun (2012) ise, Carro, Raposo ve Soria (2007) tarafından tanımlanan ağırlıklı Lorentz uzaylarını kullanarak G ünimodüler yerel kompakt grup olmak üzere bazı özel w ağırlıkları için bir $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlamış ve $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ ve $\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzaylarının $\Lambda_G^1(w)$ normuna göre projektif tensör çarpımı olan $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\otimes_{\Lambda_G^1(w)}\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayı ile $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının izometrik izomorf olduğunu ispatlamıştır.

Ancak literatürde, $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında temel topolojik özelliklerin incelenmediği saptanmıştır. Buradan yola çıkarak, bu çalışmada, Avcı ve Gürkanlı (2007) nın kullandığı yöntemlerle G ünimodüler yerel kompakt grup olmak üzere Li ve Sun (2007) tarafından tanımlanan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının Banach uzay olma, ötelemeler altında invaryantlık gibi bazı temel özelliklerinin araştırılması amaçlanmaktadır.

MATERYAL VE METOT

Tanım 1.1 X, Y ve Z aynı F cismi üzerinde üç normlu lineer uzay olsun. Bir $\phi: X\times Y\to Z$ dönüşümü verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa ϕ dönüşümüne bilineer dönüşüm denir.

i) Her $y\in Y$ için $x\to\phi(x,y)$ dönüşümü lineerdir.

ii) Her $x\in X$ için $y\to\phi(x,y)$ dönüşümü lineerdir.

Eğer her $x\in X$ ve her $y\in Y$ için $\|\phi(x,y)\|\le M\|x\|\|y\|$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı varsa ϕ bilineer dönüşümüne sınırlıdır denir. ϕ dönüşümünün normu; $\|\phi\|=\sup\{\|\phi(x,y)\|:\|x\|\le 1,\|y\|\le 1\}$ ile tanımlanır (Bonsall ve Duncan, 1973).

Tanım 1.2 X ve Y, F cismi üzerinde iki normlu uzay, X' ve Y' de sırasıyla X ve Y nin dual uzayları olsun. $X'\times Y'$ uzayından F cismine tanımlı bütün sınırlı, bilineer dönüşümlerin Banach uzayını $BL(X',Y';F)$ ile gösterelim. Herhangi bir $x\in X$ ve $y\in Y$ verilsin. $x\otimes y$, $BL(X',Y';F)$ nin $f\in X'$ ve $g\in Y'$ olmak üzere $(x\otimes y)(f,g)=f(x).g(y)$ ile tanımlı elemanı olsun. $\{x\otimes y: x\in X, y\in Y\}$ kümesinin $BL(X',Y';F)$ uzayında gerdiği uzaya X ve Y nin cebirsel tensör çarpımı denir ve $X\otimes Y$ ile gösterilir (Bonsall ve Duncan, 1973).

Teorem 1.3 Bir $\phi: X\times Y\to Z$ bilineer dönüşümü verildiğinde her $x\in X$ ve her $y\in Y$ için $\sigma(x\otimes y)=\phi(x,y)$ olacak şekilde bir tek $\sigma: X\otimes Y\to Z$ lineer dönüşümü vardır (Bonsall ve Duncan, 1973).

Tanım 1.4 X ve Y iki normlu uzay olsun. $X\otimes Y$ cebirsel tensör çarpımı üzerinde γ projektif tensör normu; $\gamma(u)=\inf\left\{\sum_i\|x_i\|\|y_i\|: u=\sum_i\left(x_i\otimes y_i\right)\right\}$ ile tanımlanır. Burada infimum u nun tüm sonlu gösterimleri üzerinden alınır. $X\otimes Y$ uzayının γ normuna göre tamlamasına X ve Y uzaylarının projektif tensör çarpımı denir ve $X\otimes_\gamma Y$ ile gösterilir. Projektif tensör çarpım uzayının her u elemanı $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|\|y_i\|<\infty$ olmak üzere $u=\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i\otimes y_i\right)$ şeklindedir (Bonsall ve Duncan, 1973).

Tanım 1.5 (X,μ), $(\overline{X},\overline{\mu})$ ve (Y,ϑ) üç ölçüm uzayı olsun. Bir T operatörü X ve $\overline{X}$ üzerinde tanımlı basit fonksiyon çiftlerini Y üzerinde tanımlı negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlara dönüştürsün. Eğer f, f_1, f_2 ve g, g_1, g_2 basit fonksiyonları için aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu T operatörüne pozitif girişim operatörü denir.

i) $\|T(f,g)\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$

ii) $\|T(f,g)\|_\infty\le\|f\|_1\|g\|_\infty$

iii) $\|T(f,g)\|_\infty\le\|f\|_\infty\|g\|_1$

iv) $T(f_1+f_2,g)=T(f_1,g)+T(f_2,g)$

v) $T(f,g_1+g_2)=T(f,g_1)+T(f,g_2)$ (Yap, 1969).

Tanım 1.6 (X,μ) bir ölçüm uzayı ve $\mathcal{M}(X,\mu)$, X üzerinde hemen hemen her yerde sonlu olan ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olsun. $f\in\mathcal{M}(X,\mu)$, $0<\lambda<\infty$ için

$$\mu_f(\lambda)=\mu\left(x\in X:|f(x)|>\lambda\right)$$

f fonksiyonunun dağılım (veya distribüsyon) fonksiyonu olmak üzere $0<t<\infty$ için

$$f^*(t)=\inf\left\{\lambda:\mu_f(\lambda)\le t\right\}=\sup\left\{\lambda:\mu_f(\lambda)>t\right\}$$

eşitliği ile tanımlı f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun düzenleştirimi, $0<t<\infty$ için

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds$$

ile tanımlı f^{**} fonksiyonuna da f fonksiyonunun ortalama (averaj) fonksiyonu denir. μ_f, f^* ve f^{**} fonksiyonları pozitif tanımlı, artmayan, sağdan sürekli fonksiyonlardır.

$0<p,q<\infty$ olduğunu kabul edelim. $L^{p,q}(X)$ Lorentz uzayı,

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)}=\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty$$

olacak şekildeki tüm $f\in\mathcal{M}(X,\mu)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. $0<p\le\infty$ için $L^{p,\infty}(X)$ uzayı ise,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)<\infty$$

olacak şekildeki tüm $f\in\mathcal{M}(X,\mu)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

$L^{p,q}(X)$ Lorentz uzayı üzerinde

$$\|f\|^*_{L^{p,q}(X)}=\begin{cases}\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty\left(t^{1/p}f^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 0<p<\infty,\ 0<q<\infty\\ \sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t), & 0<p\le\infty,\ q=\infty\end{cases}$$

ile tanımlı $\|.\|^*_{L^{p,q}(X)}$ fonksiyonu bir normdur. Ayrıca $L^{1,1}(X)$ ve $1<p\le\infty, 1\le q\le\infty$ için $L^{p,q}(X)$ uzayı $\|.\|^*_{L^{p,q}(X)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır (Hunt, 1966).

Tanım 1.7 $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı negatif olmayan yerel integrallenebilir fonksiyona, yani hemen hemen her yerde $(0,\infty)$ da değerler alan fonksiyona $\mathbb{R}^+$ da bir ağırlık fonksiyonu denir ve w ile gösterilir (Grafakos, 2009).

$(X,\mu)=(R^+,w(t)dt)$ alırsak; $0\le\lambda<\infty$ için

$$\mu_f(\lambda)=\mu\left(x\in R^+:|f(x)|>\lambda\right)=w\left(x\in R^+:|f(x)|>\lambda\right)=\int_{\{x\in R^+:|f(x)|>\lambda\}}w(x)\,d\mu(x)$$

ve $0<t<\infty$ için $f^*(t)=\inf\{\lambda:\mu_f(\lambda)\le t\}$ olur. Böylece $L^{p,q}(X,\mu)=L^{p,q}(R^+,w(t)dt)$ uzayı elde edilir ve bu uzay $L^{p,q}(w)$ ile gösterilir.

$0<p,q<\infty$ veya $0<p\le\infty,\ q=\infty$ için $\Lambda_X^{p,q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayı Carro, Raposo ve Soria (2007) tarafından

$$\Lambda_X^{p,q}(w)=\left\{f\in\mathcal{M}(X,\mu):\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}=\|f^*\|_{L^{p,q}(w)}<\infty\right\}$$

olarak tanımlanır. $p=q$ olması durumunda

$$\Lambda_X^{p,p}(w)=\left\{f\in\mathcal{M}(X,\mu):\|f\|_{\Lambda_X^{p,p}(w)}=\|f^*\|_{L^{p,p}(w)}=\|f^*\|_{L^p(w)}<\infty\right\}$$

uzayı elde edilir. Burada

$$\|f^*\|_{L^p(R^+,w)}=\left[\int_{R^+}|f^*(t)|^p(w(t))^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\neq\left[\int_X|f(x)|^p(w(x))^p dx\right]^{\frac{1}{p}}=\|f\|_{L^p(X,w)}$$

olduğundan $\Lambda_X^{p,p}(w)\neq L^p(X,w)$ dır. $\Lambda_X^{p,p}(w)$ uzayı $\Lambda_X^{p}(w)$ ile gösterilir. $w=1$ olması durumunda

$$\Lambda_X^{p,q}(1)=\left\{f\in\mathcal{M}(X,\mu):\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(1)}=\|f^*\|_{L^{p,q}(1)}<\infty\right\}$$

ve $\mu_{f^*}=\mu_f$ eşitliği kullanıldığında

$$\|f^*\|_{L^{p,q}(R^+,1)}=\|f^*\|_{L^{p,q}(R^+,\mu)}=\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}\left(f^*\right)^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}=\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}=\|f\|_{L^{p,q}(X)}$$

olduğundan $\Lambda_X^{p,q}(1)=L^{p,q}(X)$ dir (Carro, Raposo ve Soria, 2007).

$\Lambda_X^{p,q}(w)$ uzayının dualini ifade etmek için Lorentz uzaylarının başka bir çeşidi olan Γ tanımlanmıştır.

Tanım 1.8 A operatörü; $f\in\mathcal{M}^+(0,\infty)$ ve $t>0$ olmak üzere $Af(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds$ ile tanımlı Hardy operatörü olsun. $0<p<\infty$ için

$$\Gamma_X^p(w)=\left\{f\in\mathcal{M}(X,\mu):\|f\|_{\Gamma_X^p(w)}=\left(\int_0^\infty\left(f^{**}(t)\right)^p w(t)dt\right)^{1/p}<\infty\right\}$$

ve $0<p,q<\infty$ için $W(t)=\int_0^t w(s)ds$ olmak üzere

$$\Gamma_X^{p,q}(w)=\Gamma_X^q\left(W^{\frac{q}{p}-1}w\right)$$

tanımlanır. Burada $\|f\|_{\Gamma_X^{p,q}(w)}=\|f\|_{\Gamma_X^q\left(W^{\frac{q}{p}-1}w\right)}=\left(\int_0^\infty\left(f^{**}(t)\right)^q W^{\frac{q}{p}-1}(t)w(t)dt\right)^{1/q}$ dur (Carro, Raposo ve Soria, 2007).

Tanım 1.9 $0<p<\infty$, $L_{dec}^p;L^p$ de negatif olmayan artmayan fonksiyonların sınıfı, $L_{dec}^{p,\infty};L^{p,\infty}$ da negatif olmayan artmayan fonksiyonların sınıfı olmak üzere $A:L_{dec}^p(w)\to L^p(w)$ Hardy operatörü sınırlı ise $w \in B_p$, $A: L_{dec}^{p,\infty}(w) \to L^{p,\infty}(w)$ Hardy operatörü sınırlı ise $w \in B_{p,\infty}$ ile gösterilir (Carro, Raposo ve Soria, 2007).

Arino ve Muckenhoupt 1990 yılında $1 \le p < \infty$ olmak üzere $w \in B_p$ olması için gerekli ve yeterli şartın $\int_t^\infty \frac{w(x)}{x^p} dx \le \frac{c}{t^p} \int_0^t w(x) dx$ eşitsizliğinin sağlanması olduğunu göstermiştir (Arino ve Muckenhoupt, 1990).

Carro, Garcia ve Soria 1996 yılında $w \in B_{1,\infty}$ olması için gerekli ve yeterli şartın $s \le t$ iken $\frac{1}{t} \int_0^t w(x) dx \le C.\frac{1}{s} \int_0^s w(x) dx$ eşitsizliğinin sağlanması olduğunu elde etmiştir (Carro, Garcia ve Soria, 1996).

Tanım 1.10 G bir yerel kompakt grup olmak üzere G üzerinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif, regüler μ Borel ölçümüne sol (sağ) Haar ölçümü denir.

i) Her $E \subset G$ kompakt kümesi için $\mu(E) < \infty$ dur.

ii) Her $E \subset G$ Borel kümesi ve her $x \in G$ için $\mu(xE) = \mu(E)$ $(\mu(Ex) = \mu(E))$ dir (Folland, 1995).

Her yerel kompakt grup bir sol Haar ölçümüne sahiptir (Folland, 1995).

Tanım 1.11 G bir yerel kompakt grup ve μ, G üzerinde tanımlı sol Haar ölçümü olsun. Eğer μ sol Haar ölçümü aynı zamanda sağ Haar ölçümü ise G grubuna ünimodüler grup denir (Folland, 1995).

G değişmeli, diskret veya kompakt bir grup ise ünimodülerdir (Folland, 1995).

Örnek 1.12 $n \ge 2$ için determinantı sıfırdan farklı olan $n \times n$ tipindeki reel matrisler grubu $GL(n,R)$; hem $d_{R^{n^2}} x$ Lebesgue ölçümüne göre hem de $|\det X|^{-n} d_{R^{n^2}} x$ Haar ölçümüne göre bir ünimodüler gruptur. Ancak bu grup çarpma işlemine göre değişmeli değildir. Diğer yandan $n \ge 2$ için $X = (x_{ij})$, $\det X = 1$, $1 \le i \le n$ için $x_{ii} > 0$, $1 \le j < i \le n$ için $x_{ij} = 0$ olan $n \times n$ tipindeki X reel matrislerinin grubu $ST_+(n,R)$ bir ünimodüler grup değildir (Reiter ve Stegeman, 2000).

Tanım 1.13 (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı ve $A \in \Sigma$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa A kümesine bir atom denir.

i) $\mu(A) > 0$ dır.

ii) $B \subset A$ olan herhangi bir $B \in \Sigma$ için $\mu(B) = 0$ veya $\mu(A) = \mu(B)$ dir.

Eğer pozitif ölçümlü her ölçülebilir küme bir atom içerirse μ ölçümüne atomik ölçüm, μ için Σ de hiçbir atom bulunamıyorsa μ ölçümüne atomik olmayan ölçüm denir. μ atomik bir ölçüm ise

(X,Σ,μ) ölçüm uzayına atomik ölçüm uzayı, μ atomik olmayan bir ölçüm ise (X,Σ,μ) ölçüm uzayına atomik olmayan ölçüm uzayı denir (Halmos, 1974).

Örnek 1.14 μ sayma ölçümü olmak üzere $(N,\wp(N),\mu)$ ölçüm uzayı atomik ölçüm uzayı ve Σ Borel cebiri, η de Lebesgue ölçümü olmak üzere (R,Σ,η) ölçüm uzayı atomik olmayan ölçüm uzayıdır.

Tanım 1.15 (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere her $n\in N$ için $\mu(E_n)<\infty$ ve $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ olacak şekilde bir $(E_n)\subset\Sigma$ küme dizisi varsa (X,Σ,μ) uzayına $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı denir (Halmos, 1974).

Lemma 1.16 G bir ünimodüler yerel kompakt grup, T bir girişim operatörü, $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$, c bir sabit olmak üzere $w\geq c>0$, $p=\min\{p_1,p_2\}$ olmak üzere $w\in B_p$ ve $f\in\Lambda^{p_1,q_1}(w)$, $g\in\Lambda^{p_2,q_2}(w)$ için $k=T(f,g)=f*g$ olsun. O halde $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{r}$, $s\geq1$ ve $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geq\frac{1}{s}$ olmak üzere $k\in\Lambda^{r,s}(w)$ ve $\|k\|_{\Lambda^{r,s}(w)}\leq C.\|f\|_{\Lambda^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda^{p_2,q_2}(w)}$ dir (Li ve Sun, 2012).

Önerme 1.17 $0<p,q<\infty$ olmak üzere her $f\in\Lambda_G^{p,q}(w)$ ve her $s\in G$ için $L_sf\in\Lambda_G^{p,q}(w)$, $R_sf\in\Lambda_G^{p,q}(w)$ dır. Dolayısıyla $\Lambda_G^{p,q}(w)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır (Li ve Sun, 2012).

Teorem 1.18 $1<p<\infty$, $1\leq q<\infty$, $w\in B_{1,\infty}$ ya da $p=q=1$, $w\in B_1$ olsun. O halde $\Lambda_G^{p,q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayı $\|.\|_{\Gamma_G^{p,q}(w)}$ normuna göre bir Banach fonksiyon uzayıdır (Li ve Sun, 2012).

BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kesimde G bir ünimodüler yerel kompakt grup, λ, G nin bir sol Haar ölçümü ve (G,λ), $\sigma-$ sonlu atomik olmayan ölçüm uzayı,

$$1<p_1,p_2<\infty,\ 1\leq q_1,q_2<\infty,$$

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1,\ \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{r},\ r>0,\ \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geq\frac{1}{s},\ s\geq1,$$

$$w\geq c>0,$$

$$p=\min\{p_1,p_2\} \text{ için } w\in B_p$$

olsun. $\tilde{f}(x)=f(-x)$ olmak üzere her $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda)=\mu_{\tilde{f}}(\lambda)$ olduğundan $\|f^*\|_{L^{p,q}(w)}=\left\|\left(\tilde{f}\right)^*\right\|_{L^{p,q}(w)}$ ve dolayısıyla $\|f\|_{\Lambda_G^{p,q}(w)}=\left\|\tilde{f}\right\|_{\Lambda_G^{p,q}(w)}$ dır. Yani $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ iken $\tilde{f}\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ olur. Böylece Lemma 1.16 gereği her $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ için

$$\left\|T\left(\tilde{f},g\right)\right\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)} \leq C.\left\|\tilde{f}\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}=C.\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

eşitsizliği yazılır. O halde $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\times\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayından $\Lambda_G^{r,s}(w)$ uzayına bir k bilineer dönüşümünü $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere $k(f,g)=\tilde{f}*g$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bu k dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca

$$\|k\|=\sup\left\{\frac{\|k(f,g)\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}:\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\leq 1,\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\leq 1\right\}$$

$$=\sup\left\{\frac{\left\|\tilde{f}*g\right\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}:\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\leq 1,\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\leq 1\right\}$$

$$\leq\sup\left\{\frac{C.\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}:\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\leq 1,\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\leq 1\right\}=C$$

olduğundan k dönüşümü sınırlıdır. O halde Teorem 1.3 gereği bu sınırlı k bilineer dönüşümüne her $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ için $K(f\otimes g)=\tilde{f}*g$ olacak şekilde $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\otimes_\gamma\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayından $\Lambda_G^{r,s}(w)$ uzayına tanımlı bir tek K lineer dönüşümü karşılık gelir. Yine $\|K\|\leq C$ olup K dönüşümü de sınırlıdır (Li ve Sun, 2012).

Tanım 2.1 K lineer dönüşümü altında $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\otimes_\gamma\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayının görüntüsünü $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ ile gösterelim. Böylece

$$A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)=\left\{\begin{array}{l} h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i*g_i : f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w), K\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i\otimes g_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i*g_i\right), \\ \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\infty \end{array}\right\}$$

olur. Her $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için $f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere

$$\|h\|=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} : h=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i*g_i\right), f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)\right\}$$

ile tanımlanan $\left\|\left|\cdot\right|\right\|$ fonksiyonu bir normdur. Böylece $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı bir normlu uzay olur (Li ve Sun, 2012).

Teorem 2.2 $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı $\left\|\left|\cdot\right|\right\|$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat: Herhangi bir $(h_n)\subset A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ Cauchy dizisi alalım. Bu durumda (h_n) dizisinin her $n\in N$ için $\left\|\left|k_{n+1}-k_n\right|\right\|<\frac{1}{2^n}$ olacak şekilde bir (k_n) alt dizisi vardır. $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı ve $\left\|\left|\cdot\right|\right\|$ normunun tanımı gereği

i) $k_1=\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{1,j}*g_{1,j}\right),$

ii) $\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_{1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_{1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\left\|\left|k_1\right|\right\|+1,$

iii) Her $n\in N$ için $k_{n+1}-k_n=\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{n+1,j}*g_{n+1,j}\right),$

iv) Her $n\in N$ için $\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_{n+1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_{n+1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\frac{1}{2^{n-1}}$

olacak şekilde $\left(f_{n,j}\right)\subset\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $\left(g_{n,j}\right)\subset\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ alt dizileri vardır.

$$h=\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{1,j}*g_{1,j}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{n+1,j}*g_{n+1,j}\right)\right)\text{ olarak tanımlayalım.}$$

$$\begin{aligned}\left\|\left|h\right|\right\|&\le\left\|\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{1,j}*g_{1,j}\right)\right|\right\|+\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{n+1,j}*g_{n+1,j}\right)\right|\right\|\\&\le c_1\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_{1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_{1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}+c_2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_{n+1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_{n+1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\\&<c_1\left(\left\|\left|k_1\right|\right\|+1\right)+c_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\\&=c_1\left\|\left|k_1\right|\right\|+c_1+2c_2\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k_1\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ olduğu kullanılırsa $\left\|\left|h\right|\right\|<\infty$ olup $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ elde edilir.

Şimdi (k_n) alt dizisinin $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında h elemanına yakınsadığını gösterelim.

$$\sum_{r=1}^{n}\left(k_{r+1}-k_r\right)=\left(k_2-k_1\right)+\left(k_3-k_2\right)+\ldots+\left(k_{n+1}-k_n\right)=k_{n+1}-k_1$$

olduğundan $k_{n+1}=k_1+\sum_{r=1}^{n}k_{r+1}-k_r$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left\|h-k_{n+1}\right\| &= \left\|h-\left(k_1+\sum_{r=1}^{n}\left(k_{r+1}-k_r\right)\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{1,j}*g_{1,j}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{r+1,j}*g_{r+1,j}\right)\right)-\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{1,j}*g_{1,j}\right)-\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{r+1,j}*g_{r+1,j}\right)\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{r=n+1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{r+1,j}*g_{r+1,j}\right)\right)\right\| \\
&\le \sum_{r=n+1}^{\infty}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{r+1,j}*g_{r+1,j}\right)\right)\right\| \\
&\le c_3\sum_{r=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_{r+1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_{r+1,j}\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \\
&< c_3\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{r-1}}
\end{aligned}$$

olur. Bunun sonucunda $\lim_{n\to\infty}\left\|h-k_{n+1}\right\|=0$ elde edilir. Bu durumda

$$\left\|k_n-h\right\|\le\left\|k_n-k_{n+1}\right\|+\left\|k_{n+1}-h\right\|<c_4\frac{1}{2^n}+\left\|k_{n+1}-h\right\|$$

eşitsizliğinde $n\to\infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}\left\|h-k_n\right\|=0$ olur. Bu ise (k_n) alt dizisinin $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında h elemanına yakınsadığını gösterir. O halde (h_n) Cauchy dizisi $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında h elemanına yakınsar. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.3 $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır.

İspat: Herhangi bir $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ alalım. Bu durumda $f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere $h=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i*g_i\right)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_i\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\infty$ yazılır. Buradan her $s\in G$ için

$$\left\|L_s h\right\|=\left\|L_s\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i*g_i\right)\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}L_s\left(\tilde{f}_i*g_i\right)\right\| \tag{2.1}$$

olur. Ayrıca her $x\in G$ için

$$
\begin{aligned}
L_s\left(\tilde{f}_i * g_i\right)(x) &= \left(\tilde{f}_i * g_i\right)(x-s) \\
&= \int_G \tilde{f}_i(y) g_i(x-s-y)\, d\mu(y) \\
&\overset{\substack{y+s=u \\ dy=du}}{=} \int_G \tilde{f}_i(u-s) g_i(x-u)\, d\mu(u) \\
&= \int_G L_s \tilde{f}_i(u) g_i(x-u)\, d\mu(u) \\
&= \left(L_s \tilde{f}_i\right) * g_i(x)
\end{aligned}
$$

dir. Buradan

$$L_s\left(\tilde{f}_i * g_i\right) = \left(L_s \tilde{f}_i\right) * g_i \tag{2.2}$$

elde edilir. Diğer yandan her $x \in G$ için

$$L_s \tilde{f}_i(x) = \tilde{f}_i(x-s) = f_i(s-x) = f_i\left(s+(-x)\right) = R_s f_i(-x) = \left(R_s f_i\right)^{\sim}(x)$$

olur. Buradan

$$L_s \tilde{f}_i = \left(R_s f_i\right)^{\sim} \tag{2.3}$$

eşitliği görülür. (2.2) ve (2.3) eşitlikleri (2.1) de yerine yazılır ve $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ uzayının ötelemeler altında invaryant olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\left\|L_s h\right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(R_s f_i\right)^{\sim} * g_i \right) \right\| \\
&\leq c \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \left(R_s f_i\right)^{\sim} \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \left\| g_i \right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \\
&= c \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \left(R_s f_i\right) \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \left\| g_i \right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \\
&= c \sum_{i=1}^{\infty} \left\| f_i \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \left\| g_i \right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} < \infty
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

elde edilir. Bu durumda $L_s h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ olup $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.4 Her $s \in G$ ve her $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için

$$\left\|L_s h\right\| \leq c \left\|h\right\| \tag{2.5}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: (2.4) eşitsizliğinden her $s \in G$ ve her $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için $|||L_s h||| \leq c \sum_{i=1}^{\infty} \| f_i \|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \| g_i \|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$ dir. Her iki tarafın $h = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\tilde{f}_i * g_i \right)$, $f_i \in \Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g_i \in \Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ üzerinden infimumu alınırsa $|||L_s h||| \leq c |||h|||$ elde edilir.

Sonuç 2.5 Her $s \in G$ için $L_s \in BL\left(A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)\right)$ dır.

İspat: $L_s : A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w) \to A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ öteleme operatörünün lineer olduğu açıktır. Böylece (2.5) eşitsizliği gereği L_s operatörünün sınırlı olduğu elde edilir. Sonuç olarak $L_s \in BL\left(A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)\right)$ dır.

SONUÇ

Bu çalışmada, G yerel kompakt Abel grup olmak üzere Avcı ve Gürkanlı (2007) tarafından tanımlanan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayının bir genelleştirmesi olarak G ünimodüler yerel kompakt grup olmak üzere Li ve Sun (2012) tarafından tanımlanan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının, $|||.|||$ normuna göre bir Banach uzayı olduğu, ötelemeler altında invaryant olduğu ve öteleme operatörünün sınırlı ve lineer olduğu elde edilmiştir. Böylece $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayı ve $\Lambda_G^{p,q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayındaki Banach uzay olma ve ötelemeler altında invaryantlık özellikleri bu uzaya taşınmıştır.

Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkısı

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan eder.

KAYNAKLAR

Arino MA, Muckenhoupt B, 1990. Maximal functions classical Lorentz spaces and Hardy' s inequality with weights for nonincreasing functions. Transactions of the American Mathematical Society, 320(2), 727-735.

Avcı H, Gürkanlı AT, 2007. Multipliers and tensor products of $L(p,q)$ Lorentz spaces. Acta Mathematica Scientia, 27(B)(1), 107-116.

Bonsall FF, Duncan J, 1973. Complete normed algebras. Springer Verlag, Berlin.

Carro MJ, Garcia del AA, Soria J, 1996. Weak-type weights and normable Lorentz spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 124(3), 849-857.

Carro MJ, Raposo JA, Soria J, 2007. Recent developments in the theory of Lorentz spaces and weighted inequalities. Mem. Amer. Math. Soc., 187, no. 877.

Folland GB, 1995. A course in abstract harmonic analysis. CRS Press, Boca Raton, Florida.

Grafakos L, 2009. Modern Fourier analysis, Second edition. Springer Science+Business Media, New York.

Halmos PR, 1974. Measure theory, Second edition. Springer Verlag, New York.

Hunt R, 1966. On $L(p,q)$ spaces. Enseign. Math., 12, 249-276.

Li H, Sun Q, 2012. Multipliers and tensor products of the weighted Lorentz spaces $\Lambda_G^{p,q}(w)$. Georgian Math. Journal, 19, 721-740.

Reiter H, Stegeman JD, 2000. Classical harmonic analysis and locally compact groups, Second edition. Clarendon Press, Oxford.

Yap LYH, 1969. Some remarks on convolution operators and $L(p,q)$ spaces. Duke Math. J., 36, 647-658.