Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi
Dergi web sayfası: http://fbd.beun.edu.tr
DOI: 10.7212%2Fzkufbd.v8i2.1174

Araştırma Makalesi
Geliş tarihi / Received : 24.10.2017
Kabul tarihi / Accepted : 31.01.2018

Split Kuaterniyon ve Lorentziyen Küresel Hareket

Split Quaternion and Lorentzian Spherical Motion

Hatice Kuşak Samancı*

Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye

Öz

Çalışmamızın amacı, split kuaterniyonik çatıları kullanarak hareketli ve sabit birim Lorentziyen kürelerin oluşturduğu Lorentziyen küresel hareketi incelemektir. İlk olarak split kuaterniyonlarla hareketi tanımladık ve ikinci olarak hareketin hız denklemlerini hesapladık. Son olarak da split kuaterniyonların kullanılmasıyla oluşan Lorentziyen küresel hareketin kanonik izafe sistemini bulduk.

Anahtar Kelimeler: Hareket, Lorentz uzayı, Split kuaterniyon

Abstract

The intention of our paper is to examine a Lorentzian spherical motion which has the moving and fixed unit Lorentzian spheres by using the split quaternionic frames. Firstly, we define the motion by the split quaternions and secondly we calculated the velocity equations of the motion. Finaly, we obtained the canonical relative system for the Lorentzian Spherical Motion by using split quaternion frames.

Keywords: Kinematic, Lorentz space, Split quaternion

1. Giriş

Kuaterniyon terimi ilk defa 1843 yılında William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından tanımlanmıştır, (Hamilton 1853). Birim kuaterniyonlar üç boyutlu Öklid uzayında dönme hareketini sağladığı için bu cebirsel yapılar, makine mühendisliğinde küresel mekanizmalarda, robotik çalışmalarda, oyun similasyonlarında yaygınca kullanılmaktadırlar, (Hanson, 2006). Split kuaterniyon terimi ise 1849 da James Cockle tarafından tanımlanmıştır, (Kula ve Yaylı, 2007).

Kuaterniyon ve split kuaterniyonlar yardımıyla birim küre üzerinde interpolasyon yapmamızı sağlayan SLERP ve MSLERP eğrileri vardır. SLERP birim küre üzerinde iki dönme arasında optimum interpolasyon eğrisini gösterirken MSLERP ise birim Lorentziyen küre üzerindeki iki hiperbolik dönme arasında optimum interpolasyon eğrisini gösterir. Böylece SLERP ve MSLERP birim küre üzerinde sadece büyük yayları oluşturmakla kalmaz ayrıca en kısa yayı kullanarak interpolasyon yolunu sağlar, [Ghadami, Rahebi, Yaylı, (2013), Hanson (2006)]. Kuaterniyon ve split kuaterniyonlar, geometrik olarak dönme hareketini sağladıkları için kinematik, robotik, mekanik, fizik ve bazı mühendislik alanlarında son yıllarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Çalışmamızda split kuaterniyon çatılarını kullanarak Lorentziyen küresel hareketi tanımlayacağız.

2. Gereç ve Yöntem

Tanım 2.1. Bazları $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, e_1e_2 = e_3, e_3e_2 = e_1, e_3e_1 = e_2$ koşullarını sağlamak üzere $q = q_0.1 + q_1.e_1 + q_2.e_2 + q_3.e_3$ sayı dörtlülerine "kuaterniyon" denir, [Blaschke(1958), Hamilton (1853), Yang ve Freudenstein (1964)].

Teorem 2.2. Kartezyen koordinat sisteminin birim vektörleri x,y,z olsun $q = q_0.1 + q_1.e_1 + q_2.e_2 + q_3.e_3$ birim kuaterniyon çarpımı yardımıyla

$$T = q(0,x)q^{-1},$$
$$N_1 = q(0,y)q^{-1},$$
$$N_2 = q(0,z)q^{-1},$$

biçiminde keyfi bir T,N_1,N_2 ortonormal çatısı oluşturulabilir. Bu ortonormal çatının matris gösterimi

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: hkusak@beu.edu.tr

Hatice Kuşak Samancı orcid.org/0000-0001-6685-236X

$$[T\ \ N_1\ \ N_2]=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_1q_3+2q_0q_2 \\ 2q_1q_2+2q_3q_0 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_2q_3-2q_1q_0 \\ 2q_1q_3-2q_2q_0 & 2q_1q_0+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ile verilir, [Hanson (2006)].

Teorem 2.3. $q=q_0.1+q_1.e_1+q_2.e_2+q_3.e_3$ kuaterniyonunun türev matrisi

$$\begin{bmatrix} q_0' \\ q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{bmatrix}=\frac{v(t)}{2}\begin{bmatrix} 0 & -k_x & -k_y & -k_z \\ k_x & 0 & k_z & -k_y \\ k_y & -k_z & 0 & k_x \\ k_z & k_y & -k_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

dir, burada $k=(k_x,k_y,k_z)$ açısal hızı vermektedir, [Hanson (2006)].

Tanım 2.4. Bazları $e_1^2=-1, e_2^2=e_3^2=1, e_1e_2=e_3$, $e_3e_2=-e_1, e_3e_1=e_2$ koşullarını sağlamak üzere

$q=q_0.1+q_1.e_1+q_2.e_2+q_3.e_3$

dördül yapısına "split kuaterniyon" denir.

Tanım 2.5. Kuaterniyon ve split kuaterniyonların oluşturduğu kümeler sırasıyla H ve H' ile gösterilsin. H' split kuaterniyon kümesi her $q\in H'$ için $q=S_q+\vec{V}_q$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.6. Bazları $e_1^2=-1, e_2^2=e_3^2=1, e_1e_2=e_3$, $e_3e_2=-e_1, e_3e_1=e_2$ koşullarını sağlayan

$q=q_0.1+q_1.e_1+q_2.e_2+q_3.e_3$ ve
$p=p_0.1+p_1.e_1+p_2.e_2+p_3.e_3$ iki split kuaterniyonun toplamı

$$q+p=(S_q+S_p)+(\vec{V}_q+\vec{V}_p)$$

ve split kuaterniyon çarpımı

$$\begin{aligned} q.p &= S_qS_p+<\vec{V}_q,\vec{V}_p>_L+S_q\vec{V}_p \\ &+S_p\vec{V}_q+\vec{V}_q\times_L\vec{V}_p \end{aligned} \quad (3)$$

denklemleri tanımlanır. Burada $<,>_L$ ve $\times_L$ sırasıyla, Lorentziyen iç çarpımı ve Lorentziyen vektörel çarpımı göstermektedir.

Tanım 2.7. $S_q=0$ ve $S_p=0$ olduğunda split kuaterniyonuna "saf split kuaterniyon "denir ve iki saf split kuaterniyon çarpımı

$$q.p=<\vec{V}_q,\vec{V}_p>+\vec{V}_q\times\vec{V}_p \quad (4)$$

denklemi ile de hesaplanabilir.

Tanım 2.8. Bir q split kuaterniyonunun normu $N_q=q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^3$ ile tanımlanır. $N_q=1$ olduğu zaman q ya "birim split kuaterniyon" denir, [Ghadami, Rahebi, Yaylı (2013), Kula, Yayli, (2007)].

Teorem 2.9. $q=q_0.1+q_1.e_1+q_2.e_2+q_3.e_3$ birim split kuaterniyonu aynı zamanda birim Lorentz birim kürede döndürmeyi sağlar ve bu dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 & 2q_0q_3-2q_1q_2 & -2q_0q_2-2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_3q_0 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 & -2q_2q_3-2q_1q_0 \\ 2q_1q_3-2q_2q_0 & 2q_1q_0-2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 \end{bmatrix}$$

ile verilir, [Kula ve Yayli (2007), Özdemir ve Ergin (2006)].

3. Elde Edilen Bulgular

Aynı merkezli hareketli K ve sabit K' Lorentziyen kürelerinin birbirlerine göre oluşan küresel hareketini ele alalım. O merkez noktasına sahip olan hareketli K küresi ve sabit K' küresine ait split kuaterniyonik çatı gösterimleri sırası ile $\{O,e_0=1,e_1,e_2,e_3\}$ ve $\{O,e_0=1,e_1',e_2',e_3'\}$ olarak ifade edilsin. $\{O,e_0=1,e_1,e_2,e_3\}$ sistemi için split kuaterniyon bazlarının özelliklerinden $e_1^2=-1, e_2^2=e_3^2=1$; $e_1e_2=e_3, e_3e_2=-e_1, e_3e_1=e_2$ dir. $\{O,e_0=1,e_1',e_2',e_3'\}$ sistemi için split kuaterniyon bazlarının özellikleri; $e_1'^2=-1$, $e_2'^2=e_3'^2=1$ ve $e_1'e_2'=e_3', e_3'e_2'=-e_1', e_3'e_1'=e_2'$ dir. Küresel hareketi inceleyebilmek için üçüncü $\{O,q_0=1,q_1,q_2,q_3\}$ split kuaterniyonik çatısını alalım. Burada

$q_1^2=-1, q_2^2=q_3^2=1$,

$q_1q_2=q_3, q_3q_2=-q_1, q_3q_1=q_2$

split kuaterniyon koşulları sağlanmaktadır. Şimdi hareketli K küresine ait $\{e_1,e_2,e_3\}$ split kuaterniyonik bazların oluşturduğu matrisi hesaplayalım. (1) denklemindeki kuaterniyonlarla yapılan işlemlere benzer olarak split kuaterniyonlar için ortonormal çatı matrisi

$$[e_1\ \ e_2\ \ e_3]=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 & 2q_0q_3-2q_1q_2 & -2q_0q_2-2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_3q_0 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 & -2q_2q_3-2q_1q_0 \\ 2q_1q_3-2q_2q_0 & 2q_1q_0-2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 \end{bmatrix}$$

ile elde edilir. (2) denklemindeki kuaterniyonların türevlerine benzer olarak split kuaterniyonları için benzer çalışmalar yapıldığında $q_i,(i=0,1,2,3)$ split kuaterniyon bazlarının K ya göre değişimleri

$$\begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}=\frac{v(t)}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \omega_x & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

türev denklemleri bulunur. Benzer yöntemle bazların K' küresine göre değişimleri

$$\begin{bmatrix} d'q_0 \\ d'q_1 \\ d'q_2 \\ d'q_3 \end{bmatrix} = \frac{v(t)}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega'_x & \omega'_y & \omega'_z \\ \omega'_x & 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_y & -\omega'_z & 0 & \omega'_x \\ \omega'_z & \omega'_y & -\omega'_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

türev denklemleri ile elde edilir.

Teorem 3.1. Split kuaterniyonun türevinin kutupsal formda gösterilişi $q'(t) = v(t)\left(\frac{\omega}{2} s\,h\frac{\omega t}{2}, \frac{\omega}{2} c\,h\frac{\omega t}{2}\hat{\omega}\right)$ denklemi ile elde edilir.

İspat. Split kuaterniyonun kutupsal gösterimi $q(t) = \left(c\,h\left(\frac{\omega t}{2}\right), s\,h\left(\frac{\omega t}{2}\right)\hat{\omega}\right)$ olduğu için türevinin kutupsal formu

$$\begin{aligned} q'(t) &= v(t)\frac{1}{2}q(0,\omega) \\ &= v(t)\frac{\omega}{2}q(0,\hat{\omega}) \\ &= v(t)\left(\frac{\omega}{2} s\,h\frac{\omega t}{2}, \frac{\omega}{2} c\,h\frac{\omega t}{2}\hat{\omega}\right) \end{aligned}$$

denklemi ile bulunur.

Tanım 3.2. İzafe sistemine göre koordinatları x_1, x_2, x_3 olan herhangi bir nokta X olsun. X noktasının hareketli K Lorentz küresine nazaran hızına "**relatif hızı**" denir ve $v_r = dx$ ile elde edilir.

Teorem 3.3. X noktasının hareketli K Lorentz küresinde sabit kalma şartı

$$\begin{aligned} &x_1\omega_x + x_2\omega_y + x_3\omega_z = 0 \\ &dx_1 = x_2\omega_z - x_3\omega_y \\ &dx_2 = x_1\omega_z - x_3\omega_x \\ &dx_3 = -x_1\omega_y - x_2\omega_x \end{aligned}$$

denklemleri ile verilir.

İspat. Split kuaterniyon çatısına göre X noktasını ifade edebilmek için X noktasını $(0,x) = (0,x_1,x_2,x_3)$ alıyoruz. O halde $\overrightarrow{OX} = (0,\vec{x}) = 0q_0 + x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3$ olur. X noktası özel olarak Lorentziyen birim küresi üzerinde ise $\vec{x}^2 = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ bağıntısına sahip olur. Birim hızlı ise $v(t) = 1$ olacağından

$$\begin{aligned} \vec{dx} &= x_1dq_1 + x_2dq_2 + x_3dq_3 \\ &+ q_1dx_1 + q_2dx_2 + q_3dx_3 \\ &= \frac{v(t)}{2}\begin{matrix} x_1(\omega_xq_0 - \omega_zq_2 + \omega_yq_3) + x_2(\omega_yq_0 - \omega_zq_1 + \omega_xq_3) \\ + x_3(\omega_zq_0 + \omega_yq_1 - \omega_xq_2) \end{matrix} \\ &+ q_1dx_1 + q_2dx_2 + q_3dx_3 \\ &= \frac{1}{2}\begin{matrix} q_0(x_1\omega_x + x_2\omega_y + x_3\omega_z) + q_1(-x_2\omega_z + x_3\omega_y + dx_1) \\ + q_2(-x_1\omega_z - x_3\omega_x + dx_2) + q_3(x_1\omega_y - x_2\omega_x + dx_3) \end{matrix} \end{aligned}$$

Buradan $\vec{v}_r = 0$ ya da $dx = 0$ ise X noktası K da sabittir. Bu nedenle X nin K da sabit olma şartı

$$\begin{aligned} &x_1\omega_X + x_2\omega_y + x_3\omega_z = 0 \\ &dx_1 = x_2\omega_z - x_3\omega_y \\ &dx_2 = x_1\omega_z - x_3\omega_x \\ &dx_3 = -x_1\omega_y - x_2\omega_x \end{aligned}$$

denklemleri ile ifade edilebilir.

Teorem 3.4. X noktasının sabit K' Lorentz küresinde sabit kalma şartı

$$\begin{aligned} &x_1\omega'_X + x_2\omega'_y + x_3\omega'_z = 0 \\ &dx_1 = x_2\omega'_z - x_3\omega'_y \\ &dx_2 = x_1\omega'_z - x_3\omega'_x \\ &dx_3 = -x_1\omega'_y - x_2\omega'_x \end{aligned}$$

denklemleri ile hesaplanır.

İspat. X noktasının K' küresine göre değişimi Teorem (3.3) ispata benzer şekilde hesaplandığında X nin K' da sabit kalma şartları elde edilir.

Tanım 3.5. X noktası K küresinde sabit ise X noktasının K' ye göre hızına yine X nin "**sürüklenme hızı**" denilir ve d_fx ile gösterilir.

Teorem 3.6. iki saf split kuaterniyonun çarpım özelliğinden

$$d_fx = \langle \psi, x \rangle_L + \psi \times_L x$$

eşitliğinin elde edilir.

İspat. $d_fx = d'x - dx$ ve $\psi_i = \omega'_i - \omega_i$ için

$$\begin{aligned} d_fx &= \frac{1}{2}[q_0(x_1(\omega'_x - \omega) + x_2(\omega'_y - \omega_y) + x_3(\omega'_z - \omega_z)) \\ &+ q_1(-x_2(\omega'_z - \omega_z) + x_3(\omega'_y - \omega_y) + (dx_1 - dx_1)) \\ &+ q_2(-x_1(\omega'_z - \omega_z) - x_3(\omega'_x - \omega_x) + (dx_2 - dx_2)) \\ &+ q_3(x_1(\omega'_y - \omega_y) + x_2(\omega'_x - \omega_x) + (dx_3 - dx_3)) \\ &= \frac{1}{2}[q_0(x_1\psi_x + x_2\psi_y + x_3\psi_z) + q_1(-x_2\psi_z + x_3\psi_y) \\ &+ q_2(-x_1\psi_z - x_3\psi_x) + q_3(x_1\psi_y + x_2\psi_x)] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\psi = q_0.0 + q_1\psi_x + q_2\psi_y + q_3\psi_z = (0,\vec{\psi})$ için $d_f\vec{x} = (0,\vec{\psi})(0,\vec{x})$ split kuaterniyon çarpımından elde edildiği görülür. (3) ve (4) denklemlerindeki iki saf split kuaterniyonun çarpım özelliğinden

$$d_fx = \langle \psi, x \rangle_L + \psi \times_L x$$

olduğu görülür.

$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ile Lorentziyen birim küre üzerinde gösterilen P noktası ani dönme polüdür. Yani P ani dönme polü, sürüklenme hızının sıfır olması ile karakterize edilmiştir. P dönme polü ile onun $\hat{P}$ karşı noktası $t \in (t_0, t_1)$ anında sabit kalırlar. Böylece küre hareketi esnasında pol eğrilerinin split kuaterniyon interpolasyonu ile gösterimi P ve $\hat{P}$ pol noktalarından geçen kürenin büyük daireleri olan $Mslerp(P,\hat{P},t)$ eğrisinden oluştuğu düşünülebilir. Burada split kuaterniyon interpolasyonu için tanımlanan $Mslerp$ gösterimi ilk defa (Kula ve Yaylı 2007) kaynağında tanımlanmıştır.

Teorem 3.7. Lorentziyen birim küre hareketinde özel bir seçim olarak $p=q_3$ ve p nin q_1 ve q_2 ye dik olduğu durumu ele alındığında Lorentz küre hareketinin izafe sistemine ait türev denklemleri:

$$\begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} = \frac{v(t)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & 0 \\ \omega_z & \omega_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d'q_0 \\ d'q_1 \\ d'q_2 \\ d'q_3 \end{bmatrix} = \frac{v(t)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega'_y & \omega'_z \\ 0 & 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_y & -\omega'_z & 0 & 0 \\ \omega'_z & \omega'_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

İspat. Lorentz küre hareketinin izafi sistemini tespit edebilmek için alternatif bir yöntem olarak split kuaterniyonik çatının q_1 ve q_2 elemanlarını q_3 etrafında φ kadar döndürelim. Kuaterniyonların kullanım kolaylığından yararlanılmasıyla bu dönme işlemi $q=c\,h\frac{\varphi}{2}+q_3 s\,h\frac{\varphi}{2}$ split kuaterniyonu ile gösterildiğinde split kuaterniyonik çatının elemanlarını

$$q_1^* = q.q_1.q^{-1}$$
$$q_2^* = q.q_2.q^{-1}$$
$$q_3^* = q_3$$

bağıntıları ile hesaplayabiliriz. Burada döndürülmüş olan split kuaterniyon çatısı $\{q_0^*=1, q_1^*, q_2^*, q_3^*\}$ ile gösterilmiştir. Sonuç olarak (5) ve (6) denklemlerinde $\omega_x=0$ alındığında kanonik izafe sistemine ait türev denklemlerinin K ya göre matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} = \frac{v(t)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & 0 \\ \omega_z & \omega_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

K' ye göre

$$\begin{bmatrix} d'q_0 \\ d'q_1 \\ d'q_2 \\ d'q_3 \end{bmatrix} = \frac{v(t)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega'_y & \omega'_z \\ 0 & 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_y & -\omega'_z & 0 & 0 \\ \omega'_z & \omega'_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

denklemleri ile ifade edilir.

4. Sonuçlar ve Öneriler

Kanonik izafe sisteminde hareketli Lorentziyen birim K küresi üzerinde bir parametreli D_{H^1} hareketi ile hareketli pol eğrisi denilen bir (P) eğrisi çizilir. K' üzerinde ise (P') sabit pol eğrisi çizilir. P dönme polü hareketli ve sabit küreler üzerinde sırası ile (P) ve (P') pol eğrilerini çizerken sahip olduğu hız vektörleri her anda birbirinin aynıdır. Bir parametreli küresel bir D_{H^1} hareketinde K nın küresel (P) hareketli pol eğrisi K' nün (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

5. Kaynaklar

Blaschke, W. 1958. Applications of dual quaternions to kinematics. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 2(1958): 1-13.

Ghadami R., Rahebi J., Yaylı Y. 2013. Spline Quaternion Interpolation in Minkowski Space. *Adv. App. Cliff. Algb.* 23(4): 849-862.

Hanson, AJ. 2006. Visualizing Quaternion, Morgan-Kaufmann, Elsevier, London, 500pp.

Hamilton, W. 1853. Lectures on Quaternions. Hodges Smith&Co.Dublin 350pp.

Kula, L., Yayli, Y. 2007. Split quaternions and rotations in semi Euclidean space. *J. Korean Math. Soc.,* 44(6): 1313-1327.

Özdemir, M., Ergin AA. 2006. Rotations with timelike quaternions in Minkowski 3-space. *J. Geo. Phy.,* 56(2): 322-336.

Tosun, M., Güngör, MA., Okur, I. 2007. On the one parameter Lorentzian spherical Motions and Euler Savary formula. *J. Appl, Mech.*,74(5): 972-977.

Yang, AT., Freudenstein F. 1964. Application of dual number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanism. *Amer. Soc. Mech.Eng.,* 31(2):300-308.