



Küçük Dünya Ağ Topolojisine Dayalı Kuramoto Osilatöründe Senkronizasyonun İncelenmesi

Observation of Synchronization at Kuramoto Oscillators Based on Small World Network Topology

Rukiye Uzun*, İrem Şenyar, Zehra Saraç

Bülent Ecevit Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik- Elektronik Mühendisliği Bölümü, Zonguldak, Türkiye

Öz

Bu makalede Watts-Strogatz küçük dünya ağ yapısına dayalı Kuramoto osilatörlerinin oluşturduğu senkronizasyon araştırılmıştır. Öncelikle zayıf bağlantılı bir sistemde bağlantı kuvvetinin, ağ parametrelerinin (bağlantı kurma olasılığı ve ortalama bağlantı derecesi) ve osilatör sayısının senkronizasyon üzerinde yaratmış olduğu etkiler incelenmiştir ve daha sonra kuvvetli bağlantılı bir sistemde de bu osilatörlerin senkronizasyonu araştırılmıştır. Ağ parametreleri ve zayıf bağlantı kuvvetinin artmasıyla sistemin senkronizasyon davranışı gelişme göstermiş ancak kuvvetli bağlantılı sistemde bağlantı kuvveti arttıkça senkronizasyon performansı düşmüştür. Ayrıca bu çalışmada sistemdeki osilatör sayısının artmasıyla senkronizasyonun başlangıcı olan kritik eşik kuvveti net bir şekilde gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuramoto osilatör, Küçük dünya ağ yapısı, Senkronizasyon

Abstract

In this article, created synchronization of Kuramoto oscillators based on Watts-Strogatz small-world network structure was investigated. First, the effects of network parameters (the average connectivity degree and possibility of setting up a connection) and the number of oscillators on synchronization were examined in a weakly connected system. Then, the synchronization of these oscillators was investigated in a strongly connected system. With increase of the weak link strength and network parameters, the system showed an increase in synchronization, but since a strongly correlated system connection strength increased, synchronization performance decreased. Also in this study, by increasing number of oscillators in the system, critical threshold strength that was the beginning of synchronization was clearly observed.

Keywords: Kuramoto oscillator, Small world network, Synchronization

1. Giriş

Geçmişten günümüze önemini koruyan senkronizasyon doğada ve günlük hayatta sıkça karşılaşılan bir olgudur. Senkronizasyon; fen bilimlerinden sosyal bilimlere, sınır bilimden iklim bilimine kadar pek çok farklı bilim alanında önemli rol oynamaktadır (Hadley et al. 1988, Kuramoto 2003, Arenas et al. 2008, Traxl et al. 2014). Bu konuda verilebilecek örneklerden bazıları; bir sürüdeki ateş böceklerinin ışıklarını birlikte yakıp söndürmeleri (Jeong et al. 2001), bisikletin ön ve arka tekerlek hareketinin uyumu, hayvanların içsel ritimleri, kalbimizin atış sesidir. Senkronizasyonun bu kadar geniş bir alana yayılmış olması bilim adamlarının senkronizasyon konusuna ilgisini artırmış ve senkronize

davranış oluşumunu açıklayabilmek için çok sayıda matematiksel model geliştirilmiştir. Geliştirilen modellerden Yoshiki Kuramoto tarafından önerilen Kuramoto Modeli yapılan çalışmalarda en çok tercih edilendir.

Kuramoto modeli kullanılarak yapılan çalışmalarda başlangıçta global ağ yapısına dayalı sistemler analiz edilmiştir (Montoya et al. 2001, Pikovsky et al. 2003, Arenas et al. 2008, Buck 1988). Gerçek dünyadaki sistemleri tam yansıtan karmaşık ağ topolojilerinin ortaya çıkması, senkronizasyon üzerine yapılan çalışmalarını bu alana doğru yönlendirmiştir. Bu bağlamda küçük dünya (Strogatz et al. 1992, Bonilla 1998) ve ölçeksiz (Dorfler and Bullo 2012, Acebron 2005) ağ topolojilerinin yapısal özelliklerinin senkronizasyon üzerine etkileri incelenmiştir. Ayrıca bu ağ topolojilerinde senkronizasyon performansının nasıl geliştirilebileceği konusunda araştırmalar yapılmıştır (Hong et al. 2002, Medvedev 2014).

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: rukiyeuzun67@gmail.com

Bu çalışmada öncelikle Kuramoto modeli hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Daha sonra küçük dünya ağ yapısına dayalı Kuramoto osilatör sisteminde senkronizasyon performansı üzerinde ağ parametreleri ($\langle k \rangle$: ağın ortalama derecesi ve p : yeniden bağlantı yapma olasılığı), bağlantı kuvveti (K) ve osilatör sayısının etkileriirdelenmiştir. Bu doğrultuda yapılan simülasyon çalışmalarında faz denkleminin çözümü Runge-Kutta metodu kullanılarak Matlab programıyla gerçekleştirilmiştir.

2. Gereç ve Yöntem

2.1. Kuramoto Model

Kuramoto modeli; yalnızca fazları birbirleriyle bağlantılı N tane osilatörden meydana gelen çoklu bir sistemdir. Bu sistemde her bir osilatör kendi içsel (doğal) frekansına göre hareket eder. Sistemdeki her bir osilatörün sahip olduğu içsel frekans belirli bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna (Lorentzian, uniform, Gauss vb.) göre dağılım gösterir.

Çoklu sistemde salınım yapan osilatörlerin birbirleriyle etkileşim halinde olmalarından dolayı aralarında oluşan etkileşim bağlantı, etkileşimin kuvveti ise bağlantı kuvveti (K) olarak tanımlanır. Böyle bir sistemde senkronizasyonun oluşabilmesi için gerekli olan en küçük bağlantı kuvveti kritik eşik kuvveti (K_c) olarak adlandırılır. Kritik eşik kuvveti

$$K_c = \frac{2}{g(0)} \quad (1)$$

ifadesi ile verilir. Sistemde bağlantı kuvveti kritik eşik kuvvetinden küçük ($K < K_c$) olduğunda senkronizasyon oluşmaz ve her bir osilatör kendi içsel frekansı ile birbirlerinden bağımsız olarak hareket eder. Bağlantı kuvveti kritik eşik kuvvetinden büyük ($K > K_c$) olduğunda ise osilatörler ortak bir faz değerinde kilitlenir ve senkronize hareket gerçekleşir (Moreno and Pacheco 2004, Shriki et al. 2003).

Sistemdeki osilatörlerin faz zaman değişim denklemi:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (2)$$

ile ifade edilir. Burada θ_i , i . osilatörün fazını, K ($K \geq 0$) bağlantı kuvvetini ve ω_i 'de i . osilatörün açılmal frekansını göstermektedir.

Sistemin t zamanındaki senkronizasyon derecesi düzen parametresi ile belirlenir. Kompleks bir parametre olan düzen parametresi:

$$r(t) e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad (3)$$

ile verilir. Burada $\psi(t)$ sistemin ortalama fazı ve $r(t)$ osilatörlerin düzen parametresinin genlik değeridir. Düzen parametresi 0 ile 1 arasında bir değer alır. Sistemde $r(t)=0$ olduğunda senkronize hareket oluşmamaktadır. $r(t)>0$ olduğunda ise $r(t)$ nin değerine bağlı olarak sistemde kısmi ($0 < r(t) < 1$) ya da tam ($r(t)=1$) senkronizasyon görülür (Strogatz and Mirollo 1991).

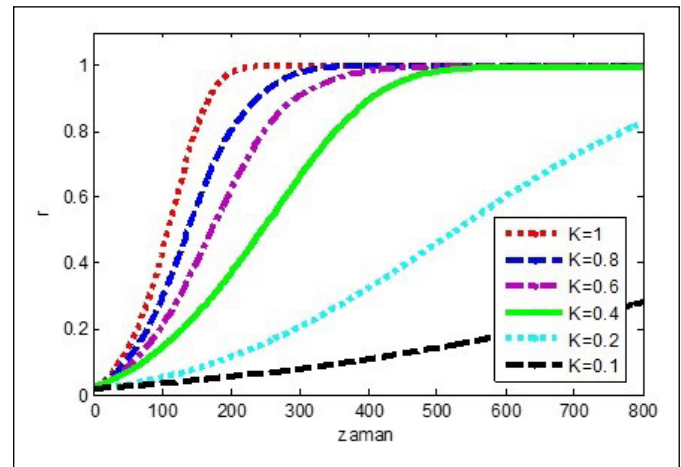
Sistemde osilatörlerin faz-zaman değişim denklemi, düzen parametresinin kullanımıyla, her bir osilatörün faz değeri r ve ψ parametrelerine bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr(t) \sin(\psi(t) - \theta_i) \quad (4)$$

3. Bulgular

Bu çalışmada senkronizasyon Watts-Strogatz tarafından geliştirilen küçük dünya ağ yapısındaki bir sistemde incelenmiştir. Watts-Strogatz ağ modeli başlangıçta N tane sabit düğümden oluşmakta olup; düğümlerin her biri en yakın birinci ve en yakın ikinci komşuları ile bağlantılı olacak şekilde tek boyutlu kafes yapısındadır. Daha sonra ağdaki bağlantılar belirli bir p olasılığına göre yeniden oluşturulur. p olasılığının değerliliğine bağlı olarak; düzenli bir ağ ($p=0$), düzensiz bir ağ ($p=1$) veya küçük dünya ($0 < p < 1$) ağı elde edilir. Ancakbu ağ yapısında yeni bağlantıların oluşumunda, düğümler arasında birden fazla bağlantı olmamasına ve düğümlerin kendi kendilerine bağlantı oluşturmamasına dikkat edilir (Barabasi and Albert 1999, Watts and Strogatz 1998).

Şekil 1'de zayıf bağlantılı ($0 \leq K \leq 1$) bir sistemde farklı bağlantı kuvveti değerleri için düzen parametresinin zamanla

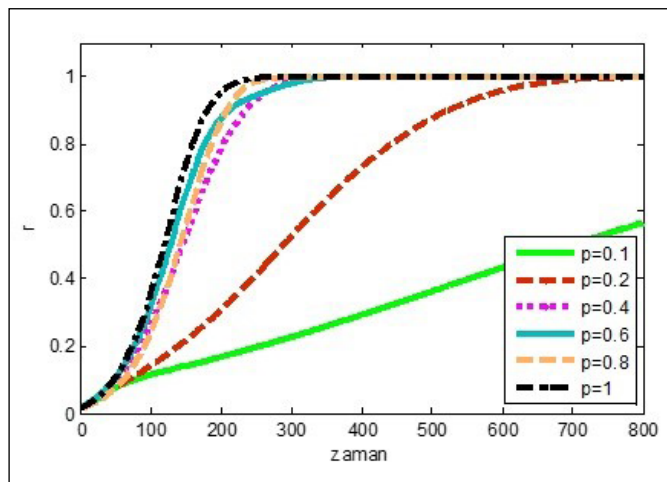


Şekil 1. Zayıf bağlantılı bir sistemde farklı bağlantı kuvveti değerleri için düzen parametresinin zamanla değişimi ($N=2000$, $p=0.4$, $\langle k \rangle=10$).

değişimi verilmiştir. Sistemde $N=2000$, $\langle k \rangle=10$ ve $p=0.4$ olarak sabit kabul edilmiştir. Böyle bir sistem için (1) denklemi ile hesaplanan kritik bağlantı eşik değeri $K_c=0.16$ 'dır. Sistemde bağlantı kuvvetinin değerine bağlı olarak kısmi veya tam senkronizasyon elde edilmiştir. Bağlantı kuvvetinin değeri $K_c < K < 0.4$ olduğu durumlarda sistemde kısmi senkronizasyon; $K \geq 0.4$ olduğu durumlarda ise sistemde tam senkronizasyon gözlenmiştir. Bağlantı kuvvetinin değerinin artmasıyla sistemin tam senkronizasyona dahakisa sürede ulaştığı görülmüştür. Bağlantı kuvvetinin değeri kritik eşik kuvvetinin değerinden ne kadar büyük olursa, sistem bileşenlerinin birbirlerini etkileme oranı artarak sistemin tam senkronize olarak hareket etmesini sağlar.

Şekil 2'de zayıf bağlantılı bir sistemde sabit bir bağlantı kuvveti değerinde ($K=0.8$) ağın yeniden bağlantı kurabilme olasılığının senkronizasyon üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Sistemde $N=2000$ ve $\langle k \rangle=10$ olduğu durumda farklı p değerleri için düzen parametresinin (r) zamanla değişimi incelenmiştir. Sistemde ağdaki bir düğümün yeniden bağlantı yapma olasılığı yani ağın düzensizliği arttıkça, sistemin senkronizasyon performansının arttığı tespit edilmiştir. $p < 0.2$ olduğu durumda r 'nin 0 ile 1 arasında değer almasından dolayı kısmi senkronizasyon; $p \geq 0.2$ olduğunda ise r 'nin 1 değerine ulaşmasıyla berabertam senkronizasyon görülmüştür. Bunun yanı sıra $1 \geq p \geq 0.4$ olduğunda sistemin senkronizasyon performansında önemli bir değişim gözlenmemiştir.

Şekil 3'te $K=0.8$ olan zayıf bağlantılı bir sistemde ağın yeniden bağlantı kurma olasılığı $p=0.4$ değerinde sabit kabul edilerek, her bir düğümün ortalama komşu sayısını belirten

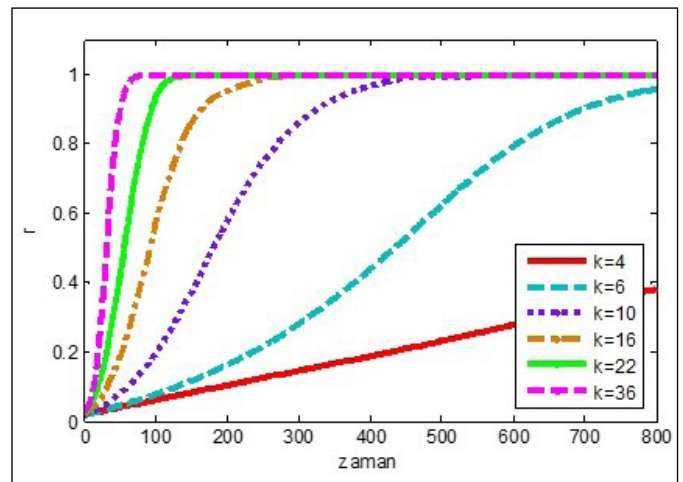


Şekil 2. Yeniden bağlantı yapma olasılığının (p) senkronizasyon üzerindeki etkisi ($N=2000$, $K=0.8$, $\langle k \rangle=10$).

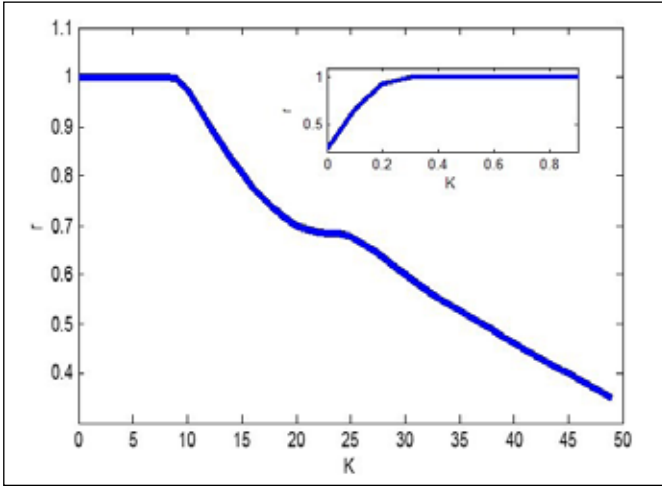
ağın ortalama bağlantı derecesinin ($\langle k \rangle$) senkronizasyon üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Sistemde ortalama bağlantı derecesinin artmasıyla senkronizasyon performansının arttığı tespit edilmiştir. $\langle k \rangle$ 'nin 10'dan küçük olan değerleri için sistemde kısmi senkronizasyon, 10 ve 10'dan büyük olanağlarında ise tam senkronizasyon gözlenmiştir. Düğümlerin komşu sayısındaki artışla beraber senkronizasyon performansı gelişme göstermiştir. Bu sonuçlardan küçük dünya ağ yapısındaki bir sistemde tam senkronizasyonun görülebilmesi için ortalama bağlantı derecesinin kritik eşik kuvveti değeri gibi bir alt sınır değerine sahip olması gerektiği belirlenmiştir. Sistemde bir düğümün sahip olduğu ortalama bağlantı derecesinin artması, sistemde birbirlerini etkileyen düğüm sayısının artmasını sağlayarak toplu senkronize hareketin oluşmasını kolaylaştırmıştır.

Şekil 4 de Watts-Strogatz ağ topolojisine sahip çoklu bir sistemde bağlantı kuvvetinin senkronizasyon üzerindeki etkisini daha net görebilmek için düzen parametresinin bağlantı kuvvetine göre değişimi verilmiştir. Bu amaçla yapılan simülasyonlarda $N=2000$, $p=0.4$ ve $\langle k \rangle=10$ olarak alınmıştır. Sistemde düzen parametresinin belirli bir aralıktaki bağlantı kuvveti değerleri için bir değerini aldığı, bu aralığın dışında ise 0 ile 1 arasında bir değer aldığı tespit edilmiştir. Böylece sistemde tam senkronizasyonun meydana gelebilmesi için bağlantı kuvvetinin değerinin belirli bir aralıkta olması gerektiği ortaya konulmuştur.

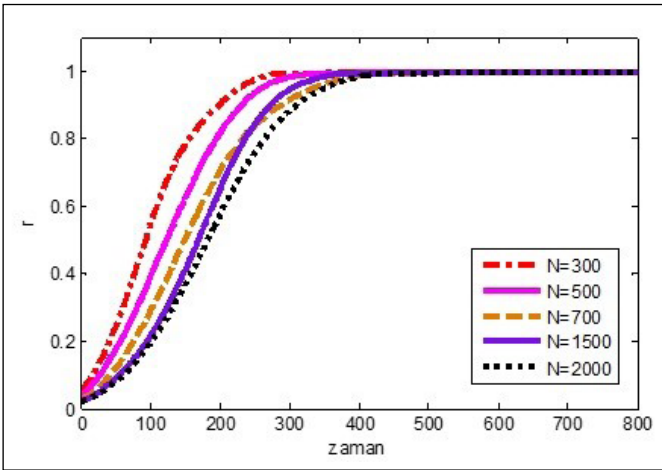
Çalışmada son olarak osilatör sayısının senkronizasyon üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu amaçla zayıf bağlantılı bir sistemde $K=0.8$, $p=0.4$ ve $\langle k \rangle=10$ alınarak, farklı osilatör sayıları için düzen parametresinin zamanla değişimi



Şekil 3. Ağın ortalama derecesinin (k) senkronizasyon üzerindeki etkisi ($N=2000$, $p=0.4$, $K=0.8$, $\langle k \rangle=10$).



Şekil 4. Bağlantı kuvvetine göre düzen parametresinin değişimi (N=2000, p=0.4, <k>=10).



Şekil 5. Osilatör sayısının senkronizasyon üzerindeki etkisi (K=0.8, p=0.4, <k>=10).

incelenmiştir (Şekil 5). Böyle bir sistemde osilatör sayısının artması sistemin tam senkronizasyona erişim zamanı üzerinde etkili olduğu belirlenmiştir. Diğer taraftan; sistemde tam senkronize hareketin oluşumunda bağlantı kuvvetinin osilatör sayısından daha baskın olduğu tespit edilmiştir. Elde edilen bir diğer sonuç da; osilatör sayısının artması ile sistemin senkronizasyona geçmesi için gerekli kritik eşik değerinin daha belirgin hale gelmesidir.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada küçük dünya ağ topolojisine sahip Kuramoto osilatörleriyle tanımlanan bir sistemin senkronizasyon performansı incelenmiştir. Bu doğrultuda öncelikle zayıf bağlantılı bir sistemde bağlantı kuvvetinin, ağ paramet-

relerinin ve osilatör sayısının senkronizasyon üzerindeki etkileri düzen parametresinin genliğindeki değişime göre araştırılmıştır. Yapılan çalışmalar sonucunda zayıf bağlantılı bir sistemde ($K < 1$) düzen parametresinin değerinin ağ parametrelerinden herhangi birinin (p veya $\langle k \rangle$) artırılmasıyla arttığı belirlenmiştir. Bunun yanı sıra osilatör sayısı artışının tam senkronizasyona erişim zamanını arttırdığı görülmüştür. Sistemdeki osilatör sayısındaki artış bağlantı kuvvetinin kritik eşik değerini daha da belirginleştirmiştir. Sistemde osilatörler arasındaki bağlantı kuvvetinin artırılmasıyla senkronizasyon performansının arttığı gözlenmiştir. Benzer davranışı kuvvetli bağlantılı ($K > 1$) bir sisteminvermesi beklenirken, tam tersi bir durumla karşılaşmıştır. Kuvvetli bağlantı kuvveti, belli bir değere kadar senkronizasyon performansını artırırken belli bir değerden sonra performansı azaltıp senkronizasyonun ortadan kalkmasına yol açmıştır. Böylelikle bağlantı kuvvetinin belirli bir aralığında sistemin tam senkronizasyonun olduğu tespit edilmiştir. Son olarak sistemdeki osilatör sayısının senkronizasyon üzerinde etkili olmadığı, bağlantı kuvvet değerinin daha baskın olduğu ortaya konulmuştur.

5. Kaynaklar

- Acebrón, JA., Bonilla, LL., Pérez Vicente, CJ., Ritort, F., Spigler, R. 2005. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 77(1): 137-185.
- Arenas, A., Guiler, AD., Kurths, J., Moreno, Y., Zhou, C. 2008. Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.*, 469(3): 93-153.
- Barabasi, AL., Albert, R. 1999. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286(5439): 509-512.
- Bonilla, LL., Pérez Vicente, CJ., Ritort, F., Soler, J. 1998. Exactly solvable phase oscillator models with synchronization dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 81(17): 3643-3646.
- Buck J. 1988. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. *Q. Rev. Biol.*, 63(3): 265-289.
- Dorfler, F., Bullo, F. 2012. Synchronization and transient stability in power networks and non-uniform Kuramoto oscillators. *SICON*, 50(3): 1616-1642.
- Hadley, P., Beasley, MR., Wiesenfeld, K. 1988. Phase locking of Josephson junction series arrays. *Phys. Rev. B*, 38(13): 8712-8719.
- Hong, H., Choi, MY., Kim, BJ. 2002. Synchronization on small-world networks. *Phys. Rev. E*, 65(2): 026139.
- Jeong, H., Mason, SP., Barabasi, AL., Oltvai, ZN. 2001. Lethality and centrality in protein networks. *Nature (London)*, 411(6833): 41-42.

- Kuramoto, Y. 2003.** Chemical oscillations, waves, and turbulence. *Chemistry Series, Dover Publications.*
- Medvedev, GS. 2014.** Small-world networks of Kuramoto oscillators. *Physica D*, 266(1): 13-22.
- Moreno, Y., Pacheco, AF. 2004.** Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *Europhys. Lett.*, 68 (4): 603-609.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J. 2003.** Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. *Cambridge University Press.*
- Shriki, O., Hansel, D., Sompolinsky, H. 2003.** Rate models for conductance-based cortical neuronal networks. *Neural Comput.*, 15(8):1809-1841.
- Sol'e, RV., Montoya, JM. 2001.** Complexity and fragility in ecological networks. *Proc. R. Soc. London B*, 268(1480): 2039-2045.
- Strogatz, SH., Mirollo, RE., Matthews, PC. 1992.** Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: relaxation by generalized Landau damping. *Phys. Rev. Lett.*, 68(18): 2730-2733.
- Strogatz, SH., Mirollo, RE. 1991.** Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *J. Stat. Phys.*, 63(3-4): 613-635.
- Traxl, D., Boers, N., Kurths, J. 2014.** General scaling of maximum degree of synchronization in noisy complex networks. *New J. Phys.*, 16(11): 115009-115022.
- Watts, DJ., Strogatz, SH. 1998.** Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393(6684):440-442.