

Sabit Katsayılı Diferansiyel-Fark Denklemlerinin Yaklaşık Çözümü İçin Müntz-Legendre Matris Yöntemi

Müntz-Legendre Matrix Method for the Approximate Solution of the Differential-Difference Equations with Constant Coefficient

Sedat Çevikel^{1*}, Şuayip Yüzbaşı², Emrah Gök³

¹Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Zonguldak, Türkiye

²Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya, Türkiye

³Celal Bayar Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Manisa, Türkiye

Öz

Bu çalışmada sabit katsayılı diferansiyel-fark denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için matris yöntemine dayalı bir yöntem uygulanmıştır. Elde edilen yaklaşık çözümlerin de rezidüel hata fonksiyonu yardımıyla iyileştirilmesi sağlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel-fark denklemleri, Müntz-Legendre polinomları, matris yöntemi

Abstract

In this paper, a matrix method is applied to obtain the approximate solutions of the differential-difference equations with constant coefficients. Also by the same method the approximate solutions are improved due to residual error function.

Keywords: Differential-difference equations, Müntz-Legendre polynomials, matrix method

1. Giriş

Son yıllarda yapılan çalışmalarda diferansiyel-fark denklemlerinin çözümü için farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bunlar arasında diferansiyel dönüşüm yöntemi (Arikoğlu vd. 2006) ayrıştırma yöntemi (Arikoğlu vd. 2005), Taylor polinom yaklaşımı (Gülsu vd. 2006), Chebyshev kollokasyon yöntemi (Akyüz vd. 1999), Adomian ayrıştırma yöntemi (Evans vd. 2005), Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2012) ve homotopy pertürbasyon yöntemi (Shakeri vd. 2008) gibi çeşitli yöntemler sayılabilir. Bu çalışmada,

$$\sum_{j=0}^J \sum_{i=0}^m p_{ij} y^{(i)}(\alpha_{ij}t + \beta_{ij}) = g(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

formunda m . mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denkleminin (Shahmorad 2005, Oliveira 1980, Çelik 2006, Arikoğlu ve Özkol 2006),

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{ij} y^{(j)}(0) + b_{ij} y^{(j)}(1)) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (2)$$

koşulları altında yaklaşık çözümlerini elde etmek için Müntz-Legendre polinomlarını kullanarak bir matris yöntemi sunulacaktır. Burada $y(t)$ bilinmeyen fonksiyon; $g(t)$ Maclaurin serisine açılabilir bir fonksiyon; p_{ij} , α_{ij} , β_{ij} , a_{ij} , b_{ij} ve λ_i 'ler uygun sabitlerdir.

(1)-(2) probleminin bu yöntem ile yaklaşık çözümleri,

$$y(t) \cong y_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3)$$

formunda olacaktır. Burada a_n 'ler ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) katsayıları bilinmeyen Müntz-Legendre katsayıları ve $L_n(t)$ 'ler aşağıdaki gibi tanımlı Müntz-Legendre polinomlarıdır:

$$L_n(t) = \sum_{j=n}^N (-1)^{N-j} \binom{N+1+j}{N-n} \binom{N-n}{N-j} t^j, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4)$$

Temel Matris Bağlıları

Öncelikle (1) denklemini ele alarak, denklemdeki her bir terimin matris formları elde edilebilir. Yukarıda (3) ile ifade edilen $y(t)$ fonksiyonunu ve $y^{(i)}(t)$ türevlerinin matris formu

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: scevikel@karaelmas.edu.tr

$y(t) = \mathbf{L}(t) \mathbf{A}$ ve $y^{(i)}(t) = \mathbf{L}^{(i)}(t) \mathbf{A}$, $i = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{L}(t) = [L_0(t) \ L_1(t) \ \dots \ L_N(t)], \tag{5}$$

$$\mathbf{L}^{(i)}(t) = [L_0^{(i)}(t) \ L_1^{(i)}(t) \ \dots \ L_N^{(i)}(t)],$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbf{L}(t)$ matrisi de,

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{D}^T \tag{6}$$

şeklinde yazılabilir ki burada $\mathbf{T}(t) = [1 \ t \ \dots \ t^N]$ şeklinde tanımlı ve \mathbf{D} matrisi de Müntz-Legendre polinomlarının katsayılarından oluşmaktadır ve

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (-1)^N \binom{N+1}{N} & (-1)^{N-1} \binom{N+2}{N-1} \binom{N}{N-1} & (-1)^{N-2} \binom{N+3}{N-2} \binom{N}{N-2} & \dots & (-1)^1 \binom{2N}{N} \binom{N}{1} & (-1)^0 \binom{2N+1}{N} \\ 0 & (-1)^{N-1} \binom{N+2}{N-1} & (-1)^{N-2} \binom{N+3}{N-2} \binom{N-1}{N-2} & \dots & (-1)^1 \binom{2N-1}{N-1} \binom{N-1}{N-1} & (-1)^0 \binom{2N-1}{N-1} \\ 0 & 0 & (-1)^{N-2} \binom{N+3}{N-2} & \dots & (-1)^1 \binom{2N-2}{N-2} \binom{N-1}{N-2} & (-1)^0 \binom{2N-2}{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^1 \binom{2N}{N} & (-1)^0 \binom{2N+1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^0 \binom{2N+1}{0} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca (6) eşitliğinden,

$$\mathbf{L}^{(i)}(t) = \mathbf{T}^{(i)}(t) \mathbf{D}^T \tag{7}$$

yazılabilir. $\mathbf{T}^{(i)}(t)$ matrisi $\mathbf{T}(t)$ matrisi cinsinden,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(1)}(t) &= \mathbf{T}(t) \mathbf{B} \\ \mathbf{T}^{(2)}(t) &= \mathbf{T}^{(1)}(t) \mathbf{B} = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^2 \\ \mathbf{T}^{(3)}(t) &= \mathbf{T}^{(2)}(t) \mathbf{B} = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^3 \\ &\vdots \\ \mathbf{T}^{(i)}(t) &= \mathbf{T}^{(i-1)}(t) \mathbf{B} = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^i \end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliklerde \mathbf{B} matrisi,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbf{T}(\alpha_{i,j}t + \beta_{i,j})$ matrisi ve $\mathbf{T}(t)$ arasındaki bağıntı

$$\mathbf{T}(\alpha_{i,j}t + \beta_{i,j}) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}) \tag{9}$$

şeklinde dir. Bu eşitlikteki $\mathbf{B}(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$ matrisi $\alpha_{i,j} \neq 0, \beta_{i,j} \neq 0$ için,

$$\mathbf{B}(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} (\alpha_{i,j})^0 (\beta_{i,j})^0 & \binom{1}{0} (\alpha_{i,j})^0 (\beta_{i,j})^1 & \binom{2}{0} (\alpha_{i,j})^0 (\beta_{i,j})^2 & \dots & \binom{N}{0} (\alpha_{i,j})^0 (\beta_{i,j})^N \\ 0 & \binom{1}{1} (\alpha_{i,j})^1 (\beta_{i,j})^0 & \binom{2}{1} (\alpha_{i,j})^1 (\beta_{i,j})^1 & \dots & \binom{N}{1} (\alpha_{i,j})^1 (\beta_{i,j})^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} (\alpha_{i,j})^2 (\beta_{i,j})^0 & \dots & \binom{N}{2} (\alpha_{i,j})^2 (\beta_{i,j})^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} (\alpha_{i,j})^N (\beta_{i,j})^0 \end{bmatrix}$$

ve $\alpha_{i,j} \neq 0$ ve $\beta_{i,j} = 0$ için,

$$\mathbf{B}(\alpha_{i,j}, 0) = \begin{bmatrix} (\alpha_{i,j})^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\alpha_{i,j})^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\alpha_{i,j})^N \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır.

(8) ve (9) matris bağıntılarından, $\mathbf{T}^{(i)}(\alpha_{i,j}t + \beta_{i,j})$ ile $\mathbf{T}(t)$ arasındaki bağıntı aşağıdaki biçimde olur:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(i)}(\alpha_{i,j}t + \beta_{i,j}) &= \mathbf{T}(\alpha_{i,j}t + \beta_{i,j}) \mathbf{B}^i \\ &= \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}) \mathbf{B}^i \end{aligned} \tag{10}$$

(7) denklemini (5) de yerine yazılırsa,

$$y^{(i)}(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \mathbf{A} \tag{11}$$

elde edilir. (11) denkleminde t yerine $\alpha_{i,j}t + \beta_{i,j}$ yazarak ve (10) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} y^{(i)}(\alpha_{i,j}t + \beta_{i,j}) &= \mathbf{T}(\alpha_{i,j}t + \beta_{i,j}) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \mathbf{A} \\ &= \mathbf{T}(t) \mathbf{B}(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \mathbf{A}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{12}$$

matris bağıntısı elde edilir. Burada $g(t)$ fonksiyonunun Maclaurin serisine açılabilir bir fonksiyon olduğundan yola çıkarak, $g(t)$ fonksiyonunun Taylor açılımı

$$g(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{G}_T \tag{13}$$

şeklinde matris formunda yazılabilir ve burada

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=0}^N \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k = \mathbf{T}(t) \mathbf{G}_T, \\ \mathbf{G}_T &= \begin{bmatrix} g^{(0)}(0) & g^{(1)}(0) & \dots & g^{(N)}(0) \\ 0! & 1! & \dots & N! \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

2. Çözüm Yöntemi

(12) ve (13) ile ifade edilen matris bağıntıları (1) denkleminde yerine yazılarak gerekli basitleştirmeler yapılırsa temel matris denklemini olan,

$$\left\{ \sum_{j=0}^J \sum_{i=0}^m p_{i,j} \mathbf{B}(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}_T, \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{14}$$

denkleminde ulaşılır. Bu denklem de kısaca,

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ veya } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \tag{15}$$

şeklinde ifade edilebilir öyle ki,

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= [w_{p,q}] = \sum_{j=0}^J \sum_{i=0}^m p_{i,j} \mathbf{B}(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T, \\ p, q &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

(1) denkleme karşılık gelen (15) temel matris denklemleri bilinmeyenleri a_0, a_1, \dots, a_N şeklindeki Müntz-Legendre katsayıları olan $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemidir.

Diğer taraftan (2) ile belirtilen koşullara karşılık gelen matris formları da,

$$\left\{ \sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j} \mathbf{T}(0) + b_{i,j} \mathbf{T}(1)) \mathbf{B}^j \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = [\lambda_i],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

şeklinde ya da

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j} \mathbf{T}(0) + b_{i,j} \mathbf{T}(1)) \mathbf{B}^j \mathbf{D}^T$$

$$= u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots$$

olmak üzere kısaca

$$\mathbf{U}_i \mathbf{A} = [\lambda_i] \text{ veya } [\mathbf{U}_i; \lambda_i], i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (16)$$

biçiminde yazılabilir. (1) denkleminin (2) koşulları altındaki çözümünü bulmak için, (16) daki genişletilmiş matrisdeki m tane satır matrisi ile (15) deki genişletilmiş matrisin herhangi m satırını yer değiştirerek $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ genişletilmiş matrisini elde edilir. Kolaylık için, eğer $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisin son m satırını yer değiştirilirse,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & g_0 \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & g_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & ; & \dots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \dots & w_{N-m,N} & ; & g_{N-m,N} \\ u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & ; & \dots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \dots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

elde edilir. Eğer $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank } [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N+1$ ise,

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (18)$$

yazılabilir. Böylece \mathbf{A} matrisi yani a_0, a_1, \dots, a_N katsayıları tek türlü tanımlanmış olur. Aynı zamanda (1) denklemleri de (2) koşulları altında tek bir çözüme sahip olacaktır. Bu belirlenen katsayılar, (3) denkleminde yerine yazılarak

$$y_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(t)$$

yaklaşık çözümü elde edilir. Diğer taraftan $|\tilde{\mathbf{W}}| = 0$ olduğunda, eğer $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank } [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] < N+1$ ise problem için özel bir çözüm bulunabilir. Aksi takdirde eğer $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} \neq \text{rank } [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] < N+1$ ise problemin çözümü yoktur.

Hata tahmini ve rezidüel iyileştirme

Bu bölümde rezidüel hata fonksiyonu yardımıyla hata analizi yapılarak sonuçların iyileştirilmesi sağlanacaktır. $y_N(t)$ fonksiyonu (1)-(2) probleminin yaklaşık çözümü ve tam çözümü de $y(t)$ olmak üzere $e_N(t) = y(t) - y_N(t)$ yazılabilir. Burada, $e_N(t)$ hata fonksiyonunu gösterir. Yaklaşık çözüm olan $y_N(t)$ fonksiyonu (1)-(2) probleminde yerine yazıldığında,

$$\sum_{j=0}^J \sum_{i=0}^m p_{i,j} y_N^{(i)}(\alpha_{i,j} t + \beta_{i,j}) = g(t) + R_N(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (19)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j} y_N^{(j)}(0) + b_{i,j} y_N^{(j)}(1)) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (20)$$

denklemlerine ulaşılır. Burada $R_N(t)$ rezidüel fonksiyondur. (1) denklemden (19) denklemi ve (2) denklemden de (20) denklemi taraf tarafa çıkarıldığı takdirde homojen koşullara sahip,

$$\sum_{j=0}^J \sum_{i=0}^m p_{i,j} e_N^{(i)}(\alpha_{i,j} t + \beta_{i,j}) = -R_N(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (21)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j} e_N^{(j)}(0) + b_{i,j} e_N^{(j)}(1)) = \lambda_i, \quad (22)$$

hata problemine ulaşılır. (21)-(22) problemi bir önceki bölümde anlatılan yöntem ile çözülecek olursa $e_N(t)$ hata fonksiyonuna $e_{N,M}(t)$ yaklaşımı elde edilmiş olur. Sonuç olarak $y_N(t)$ Müntz-Legendre yaklaşık çözümü ve $e_{N,M}(t)$ yaklaşımı yardımıyla

$$y_{N,M}(t) = y_N(t) + e_{N,M}(t) \quad (23)$$

düzeltilmiş Müntz-Legendre yaklaşık çözümüne ulaşılır.

Nümerik örnekler

Bu bölümde yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini göstermek amacıyla birkaç örnek verilecektir. Bu amaçla yapılan tüm hesaplamalar Intel Core 2 Duo 2 GHz 2 GB Ram özelliklerine sahip bilgisayarda MATLAB v7.6.0 (R2008a) programı yardımıyla yapılmıştır. Bu bölümde, $y(t)$: tam çözüm fonksiyonu, $y_N(t)$: yaklaşık çözümü, $|e_N(t)| = |y(t) - y_N(t)|$: mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}(t)|$: tahmin edilen hata fonksiyonunu ve $|\tilde{E}_{N,M}(t)| = |y(t) - y_{N,M}(t)|$: düzeltilmiş yaklaşık çözümün mutlak hata fonksiyonunu (düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonu) gösterir.

Örnek 1. İlk olarak,

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) = y^{(1)}(2t - 1) - y^{(1)}(t + 1) + 3y(t - 2) + 6e^t - 2e^{2t-1} + 2e^{t+1} - 6e^{t-2} \quad (24)$$

diferansiyel denklemini $y(0)=2$ ve $y^{(2)}(0)=2$ koşulları altında ele alalım. Bu problemin tam çözümünün $y(t)=2e^t$ olduğunu belirtelim. Bu probleme $N=8$ ve $M=10$ için yöntem uygulanırsa,

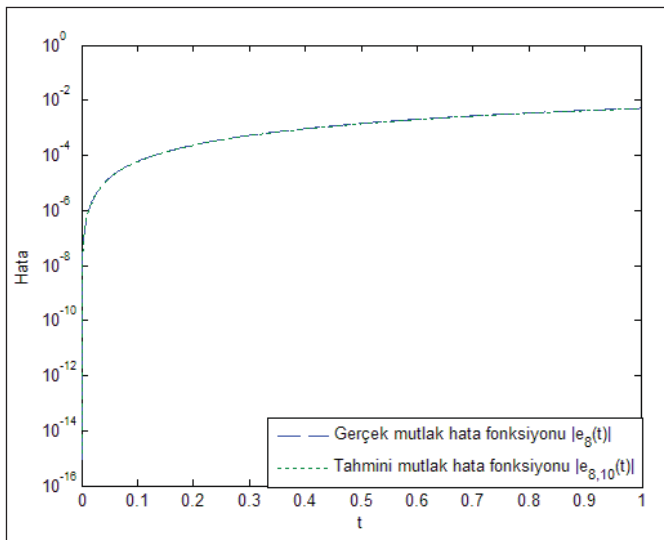
$$y_8(t) = 2 + 2t + 0.994093874849t^2 + 0.333349234356t^3 + (0.840068451774e-1)t^4 + (0.166946164876e-1)t^5 + (0.287074742864e-2)t^6 + (0.395834299506e-3)t^7 + (0.328464226838e-4)t^8,$$

yaklaşık çözümü ve

$$e_{8,10}(t) = (0.291492200996e-15)t + (0.176849815501e-4)t^5 + (0.456482220288e-5)t^7 - (0.899669865082e-4)t^6 - (0.372459225383e-4)t^5 - (0.663650780613e-3)t^4 - (0.102169409713e-4)t^3 + (0.573387658822e-2)t^2 - (0.877660335138e-16) + (0.522084204137e-5)t^9 + (0.324054094195e-6)t^{10}$$

tahmini hata fonksiyonu elde edilmiş olur. Böylece, düzeltilmiş yaklaşık çözüm

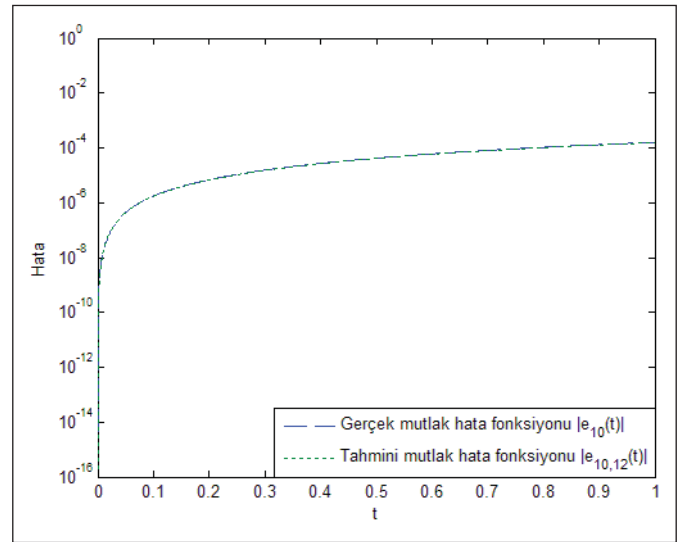
$$y_{8,10}(t) = 2 + 2t + (0.999827751438)t^2 + (0.333339017415)t^3 + (0.833431943968e-1)t^4 + (0.166573705650e-1)t^5 + (0.278078044213e-2)t^6 + (0.400399121709e-3)t^7 + (0.505314042339e-4)t^8 + (0.522084204137e-5)t^9$$



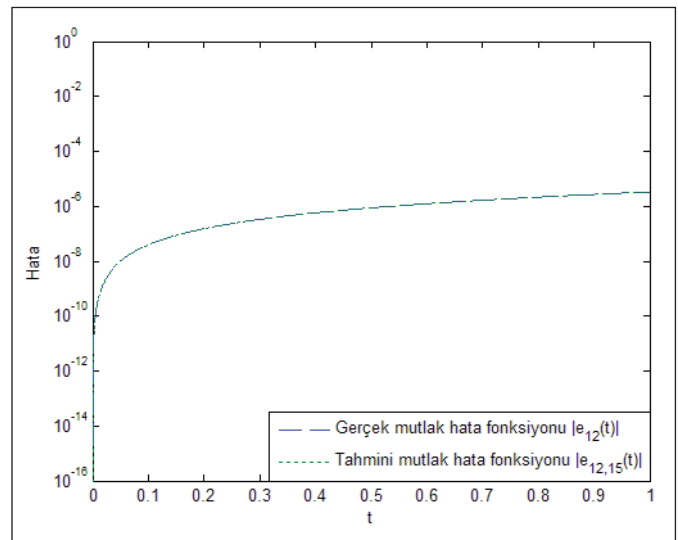
Şekil 1. Örnek 1'in $|e_8(t)| = |y(t) - y_8(t)|$ gerçeğe yakın mutlak hata fonksiyonu ve $|e_{8,10}(t)|$ tahmini hata fonksiyonunun karşılaştırılması.

$$+ (0.324054094195e-6)t^{10}$$

olur. $(N,M) = (8,10), (10,12), (12,15)$ için hesaplanan gerçeğe yakın ve tahmini mutlak hataları Çizelge 1'de verilmektedir. Şekil 1-3'de, N ve M 'nin bazı değerleri için $|e_N(t)| = |y(t) - y_N(t)|$ gerçeğe yakın mutlak hata fonksiyonları ve $|e_{N,M}(t)|$ tahmini mutlak hata fonksiyonları, Şekil 4-6'da, N ve M 'nin bazı değerleri için $|e_N(t)| = |y(t) - y_N(t)|$ gerçeğe yakın mutlak hata fonksiyonları ile $|E_{N,M}(t)| = |y(t) - y_{N,M}(t)|$ düzeltilmiş gerçeğe yakın mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır.



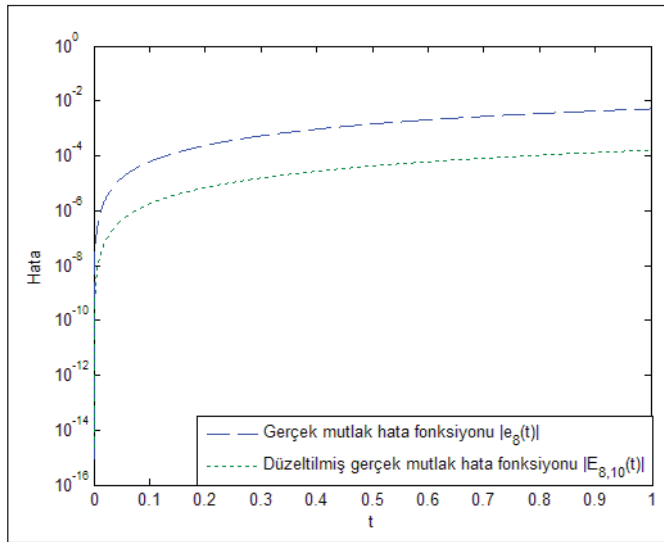
Şekil 2. Örnek 1'in $|e_{10}(t)| = |y(t) - y_{10}(t)|$ gerçeğe yakın mutlak hata fonksiyonu ve $|e_{10,12}(t)|$ tahmini hata fonksiyonunun karşılaştırılması.



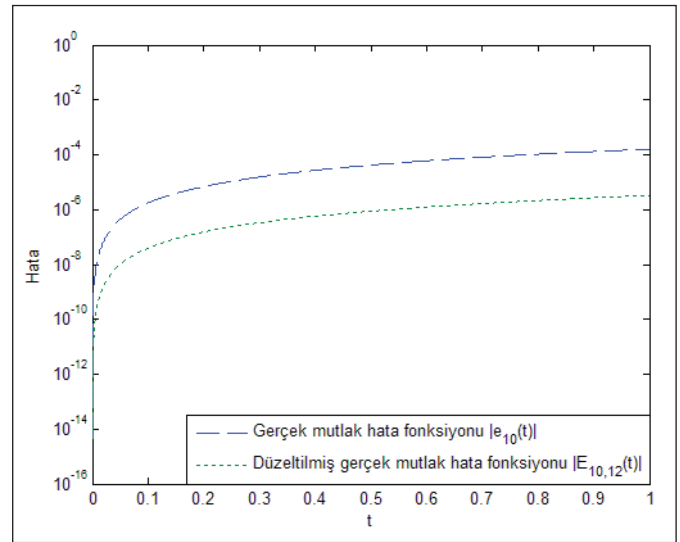
Şekil 3. Örnek 1'in $|e_{12}(t)| = |y(t) - y_{12}(t)|$ gerçeğe yakın mutlak hata fonksiyonu ve $|e_{12,15}(t)|$ tahmini hata fonksiyonunun karşılaştırılması.

Çizelge 1. (24) ile verilen denklemin gerçek mutlak hatalar ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması.

	N=8 için gerçek mutlak hatalar	N=8 ve M=10 için tahmini mutlak hatalar	N=10 için gerçek mutlak hatalar	N=10 ve M=12 için tahmini mutlak hatalar	N=12 için gerçek mutlak hatalar	N=12 ve M=15 için tahmini mutlak hatalar
t_i	$ e_8(t_i) $	$ e_{8,10}(t_i) $	$ e_{10}(t_i) $	$ e_{10,12}(t_i) $	$ e_{12}(t_i) $	$ e_{12,15}(t_i) $
0	8.8818e-016	8.7766e-017	4.6629e-015	4.0162e-016	1.9984e-015	1.1471e-017
0.2	2.3503e-004	2.2819e-004	6.8314e-006	6.6806e-006	1.5086e-007	1.5087e-007
0.4	9.2607e-004	8.9905e-004	2.7020e-005	2.6447e-005	5.7346e-007	5.7374e-007
0.6	2.0293e-003	1.9694e-003	5.9975e-005	5.8741e-005	1.2348e-006	1.2362e-006
0.8	3.4662e-003	3.3615e-003	1.0471e-004	1.0257e-004	2.1410e-006	2.1446e-006
1	5.1197e-003	4.9606e-003	1.5907e-004	1.5572e-004	3.3438e-006	3.3512e-006



Şekil 4. Örnek 1'in $|e_8(t)| = |y(t) - y_8(t)|$ gerçek mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{8,10}(t)| = |y(t) - y_{8,10}(t)|$ düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun karşılaştırılması.



Şekil 5. Örnek 1'in $|e_{10}(t)| = |y(t) - y_{10}(t)|$ gerçek mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{10,12}(t)| = |y(t) - y_{10,12}(t)|$ düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun karşılaştırılması.

Örnek 2. İkinci olarak tam çözümü mevcut olmayan

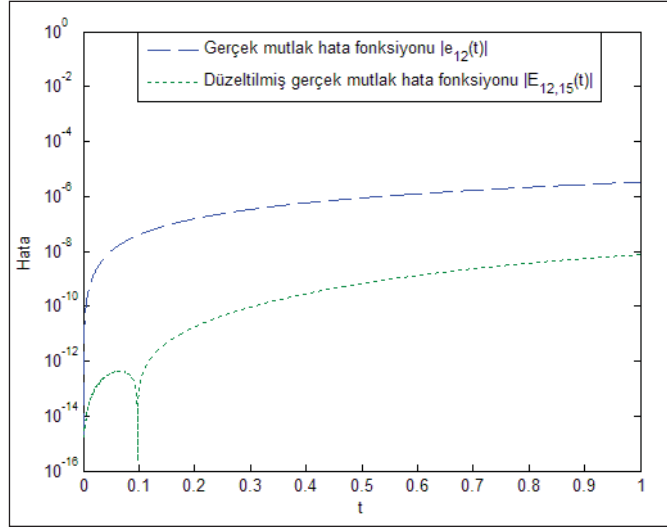
$$\begin{cases} y^{(1)}(t) + y(t) = -y(0.8t) \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (25)$$

probleminin çözümü için $(N,M)=(12,15)$ olarak düzeltilmiş yaklaşık çözümü elde edilmiştir ve bu çözümün numerik sonuçları ile bazı başka yöntemler ile elde edilen numerik sonuçları Çizelge 2'de karşılaştırılmıştır. Tahmin edilen mutlak hata fonksiyonlarının bazı numerik değerleri Çizelge 3'te verilmiştir. Ayrıca, tahmini mutlak hata fonksiyonları Şekil 7'den görülebilir. Tablodaki değerlerden sunulan yöntemin oldukça iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

3. Sonuçlar

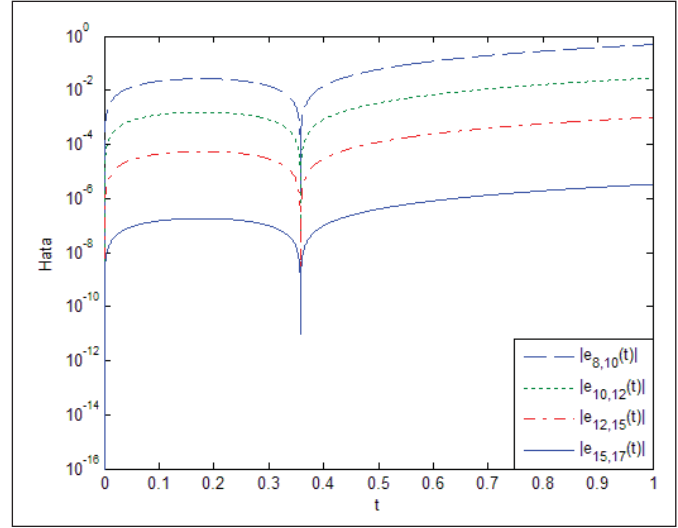
Bu çalışmada, Müntz-Legendre polinomlarını kullanarak diferansiyel-fark denklemlerinin yaklaşık çözümleri için bir numerik yöntem sunulmuştur. Bu yöntem, ele alınan diferansiyel-fark problemini bir cebirsel denklem sistemine indirgemıştır. Bu denklem sistemi de MATLAB programı yardımıyla çözümlenerek yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Ayrıca, rezidüel hata fonksiyonunu kullanarak elde edilen yaklaşık çözümler iyileştirilmeye çalışılmıştır. Örnek 1'de gerçek mutlak hata değerleri ile tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılarak sonuçların oldukça birbirine yakın olduğu gözlemlenmiştir. Örnek 1'de gerçek mutlak hata fonksiyonları ile tahmini mutlak hata fonksiyonları da Şekil 1-3'de karşılaştırıldı.

Bu grafiklerden de bu hata fonksiyonlarının birbirine yakın olduğu daha iyi bir şekilde görülebilir. İkinci bir örnek olarak, tam çözümü olmayan bir başlangıç değer problemi alınarak, sonuçların güvenilirliği tahmin edilen hata fonksiyonu kullanılarak ölçülmeye çalışılmıştır. Bu



Şekil 6. Örnek 1'in $|e_{12}(t)| = |y(t) - y_{12}(t)|$ gerçek mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{12,15}(t)| = |y(t) - y_{12,15}(t)|$ düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun karşılaştırılması.

ölçümde elde edilen sonuçlar Çizelge 3 ve Şekil 7 den görülebilir. N ve M değerleri artarken çözümlerin daha da düzeldiği Çizelge 3 ve Şekil 7' den görülür.



Şekil 7. Örnek 2'nin $|e_{N,M}(t)|$ tahmin edilen mutlak hata fonksiyonlarının grafiği.

Çizelge 2. (25) ile verilen problemin farklı metotlar ile elde edilen çözümlerin nümerik değerlerinin karşılaştırılması.

	Walsh seri Yöntemi (Rao, GP vd. 1982)	Hermite seri Yöntemi (Yalçınbaş, S. vd. 2011)	Taylor seri yöntemi (Sezer, M. vd. 2007)	DUSF seri yöntemi (Hwang, C. 1983)	Sunulan yöntem
t_i		N = 8	N = 8	m = 100, h = 0.01	N = 12, M = 15
0	1	1	1	1	1
0.2	0.665621	0.664691	0.664691	0.664677	0.664637119154
0.4	0.432426	0.433561	0.433561	0.433540	0.433589152822
0.6	0.275140	0.276482	0.276482	0.276460	0.276723259601
0.8	0.170320	0.171484	0.171484	0.171464	0.172054181793
1	0.100856	0.102670	0.102744	0.102652	0.103664996831

Çizelge 3. (25) ile verilen problemin tahmin edilen hata fonksiyonunun nümerik sonuçları.

	N=8 ve M=10 için tahmini mutlak hatalar	N=10 ve M=12 için tahmini mutlak hatalar	N=12 ve M=15 için tahmini mutlak hatalar	N=15 ve M=17 için tahmini mutlak hatalar
t_i	$ e_{8,10}(t_i) $	$ e_{10,12}(t_i) $	$ e_{12,15}(t_i) $	$ e_{15,17}(t_i) $
0	2.3935e-014	8.3104e-016	8.1833e-018	1.0826e-019
0.2	2.6374e-002	1.5202e-003	5.3882e-005	1.8033e-007
0.4	1.3925e-002	8.0089e-004	2.8374e-005	9.4952e-008
0.6	1.1804e-001	6.7985e-003	2.4093e-004	8.0630e-007
0.8	2.7924e-001	1.6086e-002	5.7007e-004	1.9078e-006
1	4.8728e-001	2.8071e-002	9.9486e-004	3.3294e-006

4. Kaynaklar

- Akyüz, A., Sezer, M. 1999.** A Chebyshev collocation method for the solution of linear differential equations. *Int. J. Comp. Math.*, 72: 491-507.
- Arikoglu, A., Özkol, İ. 2006.** Solution of difference equations by using differential transform method. *Appl. Math. Comput.*, 174: 1216-1228
- Arikoglu, A., Vahidi, AR., Asadi Cordshooli, GH. 2005.** Solving differential equations by decomposition method. *Appl. Math. Comput.*, 167: 1150-1155.
- Çelik, İ. 2006.** Collocation method and residual correction using Chebyshev series. *Appl. Math. Comput.*, 174: 910-920
- Evans, DJ., Raslan, KR. 2005.** The Adomian decomposition method for solving delay differential equation. *Int. J. Comp. Math.*, 82: 49-54.
- Gülsu, M., Sezer, M. 2006.** A Taylor polynomial approach for solving differential-difference equations. *J. Comput. Applied Math.*, 186: 349-364.
- Hwang, C. 1983.** Solution of a functional differential equation via delayed unit step functions. *Int. J. Syst. Sci.*, 14(9): 1065-1073.
- Oliveira, FA. 1980.** Collocation and residual correction, *Numerische Mathematik* 36: 27-31
- Rao, GP., Palanisamy, KR. 1982.** Walsh stretch matrices and functional differential equations. *IEEE T. Automat. Contr.*, 27: 272-276.
- Sezer, M., Akyüz, A., Daşcıoğlu, A. 2007.** A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *J. Comput. Applied Math.*, 200: 217-225.
- Shahmorad, S. 2005.** Numerical solution of the general form linear Fredholm-Volterra integro-differential equations by the Tau method with an error estimation. *Appl. Math. Comput.* 167: 1418-1429.
- Shakeri, F., Dehghan, M. 2008.** Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Math. Comput. Model.*, 48: 486-498.
- Yalçınbas, S., Aynigül, M., Sezer, M. 2011.** A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations. *J. Franklin Ins.*, 348: 1128-1139.
- Yüzbaşı, S., Sahin, N., Sezer, M. 2012.** A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Numer. Meth. Part. D. E.*, 28: 1105-1123.