Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi / Karaelmas Science and Engineering Journal 4 (2), 59-63, 2014

Karaelmas Science and Engineering Journal
Journal home page: http://fbd.beun.edu.tr

Araştırma Makalesi

Hiperbolik Türden Bir Denklem İçin Bir Katsayı Ters Problemi

A Coefficient Inverse Problem for a Hyperbolic Type Equation

Mustafa Yıldız

Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Zonguldak, Türkiye

Özet

Bu çalışmada hiperbolik tipten bir denklem için bir katsayı ters problemi ele alınmıştır. Problemin çözümünün varlığı Fourier dönüşümü ve Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Hiperbolik tip denklem, Ters problem, Schauder sabit nokta teoremi

Abstract

In this work, a coefficient inverse problem for a hyperbolic type equation is considered. The existence of the solution of the problem is proven by using Fourier transform and Schauder fixed point theorem.

Keywords: Hyperbolic type equation, Inverse problem, Schauder fixed point theorem

1. Giriş

Ters problem, bir diferensiyel denklemin katsayılarının, sağ tarafının, başlangıç koşullarının veya sınır koşullarının çözüm için verilen bir ek bilgi kullanılarak belirlenmesi problemidir. Bu tür problemler fizik, jeofizik ve tıp gibi bir çok alanda ortaya çıkmaktadır. Örneğin tıpta, teknik tomografide; sismolojide, uydudan alınan bilgilere göre bir bölgenin alt yapısının araştırılması, faydalı yer altı kaynaklarının yerinin ve miktarının tespitinde; ekolojide, çevre kirliliğinin belirlenmesi ve benzeri bir çok problemde oldukça önemlidir. Bu nedenle ters problemlerin araştırılması günceldir. Ters problemler temel olarak non-lineerdir ve çoğunlukla kararlı değildir yani Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerdir (Lavrent'ev vd. 1980, Romanov 1987).

Kötü konulmuş problemler için genel teori ve uygulamalar A. N. Tikhonov, V. K. Ivanov, M. M. Lavrent'ev ve onların öğrencileri tarafından geliştirilmiştir (Anikonov 1978, Ivanov vd. 1978, Tikhonov ve Arsenin 1979, Tikhonov vd. 1987). İntegral geometri problemleri ve kinetik denklemler için ters problemler hem teorik hem de uygulama açısından çok önemlidir. Bu alandaki ilginç sonuçlar Lavrent'ev ve Anikonov (1967), Romanov (1978), Amirov (1983, 1986, 1987, 2001), Amirov vd. (2009), Amirov ve Pashaev (1992), Anikonov (2001), Anikonov ve Amirov (1983), Kireitov (1975, 1983), Pestov ve Sharafutdinov (1988), Hamaker vd. (1980) tarafından elde edilmiştir. Diferensiyel denklemler için çeşitli ters problemlerin sonlu-fark yöntemi ile sayısal çözümlerine ilişkin çalışmalar Antonenko (1967), Kabanikhin ve Abdiev (1986) ve Karchevsky (1998) tarafından yapılmıştır. Ters ve kötü konulmuş problemlerin optimizasyon metodu ile çözümü Tikhonov (1963), Marchuk (1964) ve Alekseev (1967)'in çalışmalarında görülmektedir. Konjuge gradient metodu Bamberger (1979, 1982) tarafından bir boyutlu dinamik sismik ters probleminin çözümü için kullanılmıştır. Alifanov (1988a, 1988b)'un çalışmasında ısı ve kütle transferi için lineer ve lineer olmayan ters problemlerin sayısal çözümleri için bazı metotlar karşılaştırılmalı olarak verilmiştir. Tabakalı ortamda geoelektrik ters problemi için optimizasyon yaklaşımı Dmitriev ve Fedorova (1983) tarafından geliştirilmiştir. Ayrıca Vasil'ev (1981), İskenderov (1984), Kabanikhin (1992), Kabanikhin ve Karchevsky (1992, 1995), Romanov ve Kabanikhin (1991, 1994) bu alanda önemli çalışmalar yapmışlardır. Tam Maxwell denklem sisteminin katsayılarının bulunması ters probleminin çözümü de sonlu fark metodu ile mümkündür (Kabanikhin ve Abdiev 1982, Kabanikhin ve Martakov 1988). Diskret dinamik ters problemin çözümü için değişik metotlar Symes (1981), Sacks ve Santosa (1985), Ursin ve Berteussen (1986) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Klibanov ve

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: mustafa.yildiz@beun.edu.tr

Timonov (2004) ters problemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesine ilişkin önemli bir çalışmadır.

Hiperbolik tip denklemler için ters problemlerin büyük çoğunluğu Volterra operatör denklemlerine indirgenebilir. Böylece Volterra denklemler teorisindeki sayısal metotlar ve teorik sonuçlar ele alınan ters problemin çözümü için kullanılabilir. Volterra denklemleri için geliştirilen Picard ve Carathéodory ardışık yaklaşımları hiperbolik denklemler için ters problemler için de uygulanabilir. Ayrıca sonlu-fark, lineerleştirme, Newton-Kantorovich, regülerleştirme, optimizasyon, Gel'fand-Levitan metotları sayısal çözüm için sıkça kullanılan, ayrıntılı olarak incelenmiş ve test edilmiş yöntemlerdir. Diğer taraftan ters problemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği ve kararlılığının araştırılması, yaklaşık çözümlerinin hesaplanması aşamalarında kullanılan bazı araçlar şunlardır: Fourier dönüşümü, Carleman eşitsizlikleri, sabit nokta teoremi ve Galerkin yöntemi.

2. Problemin İfadesi

Bu çalışmada,

$$D=\{(x,t):0\le x\le x_0, -\infty<t<+\infty\}$$

bölgesinde verilen

$$\omega_{tt}=c^2\omega_{xx}+\mu(x)\omega_t+\lambda(x)\omega+a(x)\omega_x \tag{1}$$

denkleminin

$$\omega|_{t=0}=0,\quad \omega_t|_{t=0}=\varphi(x)\neq 0 \tag{2}$$

ve

$$\omega|_{x=0}=\psi_1(t),\quad \omega_x|_{x=0}=\psi_2(t)\neq 0 \tag{3}$$

koşullarını sağlayan $(\omega(x,t),\mu(x),\lambda(x))$ vektör fonksiyonunun bulunması ters probleminin çözümünün varlığı araştırılmaktadır.

Burada $0\le x\le x_0$, $\varphi(x)\in C^2(0,x_0)$, $0<\varphi_0\le\varphi(x)$ $\|\varphi\|_{C^2}\le c_1$, $\psi_1(t),\psi_2(t)\in C^3(R^1)$ ve φ_0, c, c_1 sabitlerdir. Ayrıca (3), μ ve λ katsayılarını bulmak için verilen ek koşullar olup, $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$ fonksiyonları $(-N,N)$ aralığında t argümanına bağlı olarak sonludur.

3. Problemin Çözümünün Varlığının İspatı

(1)-(3) probleminin çözümünün varlığı araştırılırken

$$\omega_k(x)=\frac{\partial^k\omega}{\partial t^k}\Big|_{t=0},\ k=0,1,2,3$$

gösterimi kullanılacaktır. Bu durumda t=0 için

$$\omega_2(x)=\mu(x)\varphi(x)$$
$$\mu(x)=\frac{\omega_2(x)}{\varphi(x)}$$

yazılabilir. $A=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ve $B=\frac{\partial}{\partial x}$ olmak üzere (1) denkleminin t'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial^3\omega}{\partial t^3}=A\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mu(x)\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+\lambda(x)\varphi(x)+a(x)B\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda(x)=\frac{\omega_3(x)-A\varphi(x)-a(x)B\varphi(x)-\mu(x)\omega_2(x)}{\varphi(x)}$$

olup, son eşitliğin sağ tarafı $\varphi(x)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\lambda(x)=\frac{[\omega_3(x)-A\varphi(x)-a(x)B\varphi(x)]\varphi(x)-\omega_2^2(x)}{\varphi^2(x)} \tag{4}$$

eşitliği bulunur. (1) denkleminde (4) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}&=A\omega+\frac{\omega_2(x)}{\varphi(x)}\frac{\partial\omega}{\partial t}\\&+\frac{[\omega_3(x)-A\varphi(x)-a(x)B\varphi(x)]\varphi(x)-\omega_2^2(x)}{\varphi^2(x)}\omega\\&+a(x)B\omega\end{aligned} \tag{5}$$

olur. (5) denklemine t değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulandığında

$$\Im\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\right]=(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi),$$
$$\Im\left[\frac{\partial^2\omega(x,\xi)}{\partial x^2}\right]=\frac{d^2\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx^2},$$
$$\Im\left[\frac{\partial\widehat{\omega}(x,\xi)}{\partial x}\right]=\frac{d\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx},$$

bağıntılarından

$$\begin{aligned}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)&=c^2\frac{d^2\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx^2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_2(x)}{\varphi(x)}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}e^{-i\xi t}dt\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\omega_3(x)-A\varphi(x)-a(x)B\varphi(x)]\varphi(x)-\omega_2^2(x)}{\varphi^2(x)}\omega(x,t)e^{-i\xi t}dt\\&+a(x)\frac{d\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx}\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)&=c^2\frac{d^2\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx^2}+\frac{\omega_2(x)}{\varphi(x)}(i\xi)\widehat{\omega}(x,\xi)\\&+\frac{[\omega_3(x)-A\varphi(x)-a(x)B\varphi(x)]\varphi(x)-\omega_2^2(x)}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega}(x,t)\\&+a(x)\frac{d\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx}\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Diğer taraftan

$$\omega(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\omega}(x,\xi)e^{i\xi t}d\xi$$

şeklinde tanımlı ters Fourier dönüşümü kullanılırsa

$$\omega_2(x)=\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\Big|_{t=0}=\left[\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)e^{i\xi t}d\xi\right]\Big|_{t=0}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)d\xi$$

ve

$$\omega_3(x)=\frac{\partial^3\omega}{\partial t^3}\Big|_{t=0}=\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi)^3\widehat{\omega}(x,\xi)d\xi$$

elde edilir. O halde (1) denklemi

$$(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi) = c^2\frac{d^2\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx^2} + \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi}{\varphi(x)}(i\xi)\widehat{\omega}(x,\xi) + \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi)^3\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi - A\varphi - a(x)B\varphi(x)\right]\varphi(x)}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega}(x,\xi) - \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi\right)^2}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega}(x,\xi) + a(x)\frac{d\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx}$$

şeklinde yazılır.

Diğer taraftan (3) koşullarına da Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\widehat{\omega}(x,\xi)\big|_{x=0} = \widehat{\psi}_1(\xi),\ \widehat{\omega}_x(x,\xi)\big|_{x=0} = \widehat{\psi}_2(\xi)$$

bulunur. ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları kompakt supporta sahip olduğundan ($-N,N$) aralığında integralleri alınabilir ve dolayısıyla

$$(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi) = c^2\frac{d^2\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx^2} + \frac{\int_{-N}^{N}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi}{\varphi(x)}(i\xi)\widehat{\omega} + \frac{\left(\int_{-N}^{N}(i\xi)^3\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi - A\varphi(x) - a(x)B\varphi(x)\right)\varphi(x)}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega} - \frac{\left(\int_{-N}^{N}(i\xi)^3\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi\right)}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega}(x,\xi) + a(x)\frac{d\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx}$$

yazılabilir. Son denklem

$$A\widehat{\omega}(x,\xi) = (i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi) - \frac{\int_{-N}^{N}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi}{\varphi(x)}(i\xi)^2\widehat{\omega} - \frac{\left[\int_{-N}^{N}(i\xi)^3\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi - A\varphi(x) - a(x)B\varphi(x)\right]\varphi(x)}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega} - \frac{\left(\int_{-N}^{N}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi\right)^2}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega}(x,\xi) - a(x)\frac{d\widehat{\omega}(x,\xi)}{dx}$$

şeklinde düzenlenir ve x değişkenine göre çift katlı integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^x\int_0^z \frac{d^2\widehat{\omega}}{dy^2}(y,\xi)\,dydz &= \int_0^x \frac{d\widehat{\omega}(y,\xi)}{dy}\Big|_{y=0}^{y=z} dz \\
&= \int_0^x\left(\frac{d\widehat{\omega}(z,\xi)}{dz} - \frac{d\widehat{\omega}(0,\xi)}{dy}\right)dz \\
&= \widehat{\omega}(y,\xi)\big|_0^z - x\frac{d\widehat{\omega}(0,x)}{dy} \\
&= \widehat{\omega}(x,\xi)\big|_0^x - \widehat{\omega}(0,\xi) - x\frac{d\widehat{\omega}(0,\xi)}{dy} \\
&= \widehat{\omega}(x,\xi) - \psi_1(\xi) - x\psi_2(\xi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x\int_0^z a(y)\frac{d\widehat{\omega}(y,\xi)}{dy}\,dydz &= \int_0^x a(y)\widehat{\omega}(y,\xi)\big|_0^z dz - \int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}(y,\xi)\frac{da(y)}{dy}\,dydz \\
&= \int_0^x\left(a(z)\widehat{\omega}(z,\xi) - a(0)\widehat{\omega}(0,\xi)\right)dz - \int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}(y,\xi)\,a_y(y)\,dydz \\
&= \int_0^x\left(a(z)\widehat{\omega}(z,\xi) - a(0)\widehat{\psi}_1(\xi)\right)dz - \int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}(y,\xi)\,a_y(y)\,dydz \\
&= \int_0^x a(z)\widehat{\omega}(z,\xi)\,dz - xa(0)\widehat{\psi}_1(\xi) - \int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}(y,\xi)\,a_y(y)\,dydz
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}(x,\xi) &= \frac{1}{c^2}(i\xi)^2\int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}\,dydz + \widehat{\psi}_1(\xi) + x\psi_2(\xi) \\
&- \frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z \frac{\int_{-N}^{N}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi}{\varphi(x)}(i\xi)\widehat{\omega}\,dydz \\
&- \frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z \frac{\left[\int_{-N}^{N}(i\xi)^3\widehat{\omega}\,d\xi - A\varphi(x) - a(x)B\varphi(x)\right]}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega}\,dydz \\
&+ \frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z \frac{\left(\int_{-N}^{N}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi\right)}{\varphi^2(x)}\widehat{\omega}\,dydz \\
&- \frac{1}{c^2}\int_0^x a(z)\widehat{\omega}(z,\xi)\,dz + \frac{1}{c^2}xa(0)\widehat{\psi}_1(\xi) + \frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}\,a_y(y)\,dydz
\end{aligned} \tag{6}$$

elde edilir. Şimdi de (6) denkleminin sağ tarafındaki her bir terimin normunu alalım: Bu durumda sırasıyla birinci terim

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{c^2}(i\xi)^2\int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}(x,\xi)\,dydz\right\| &\le \|\widehat{\omega}\|\frac{1}{c^2}\|\xi^2\|\left|\int_0^x\int_0^z dydz\right| \\
&\le \|\widehat{\omega}(x,\xi)\|\frac{1}{c^2}N^2\frac{x^2}{2} \\
&\le \|\widehat{\omega}(x,\xi)\|\frac{N^2}{c^2}\frac{x_0^2}{2},
\end{aligned}$$

ikinci ve üçüncü terim

$$\|\widehat{\psi}_1(\xi) + x\widehat{\psi}_2(\xi)\| \le \|\widehat{\psi}_1(\xi)\| + x_0\|\widehat{\psi}_2(\xi)\|,$$

dördüncü terim

$$\left\|-\frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z \frac{\int_{-N}^{N}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi}{\varphi(y)}(i\xi)\widehat{\omega}(x,\xi)\,dydz\right\| \le \frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat{\omega}(x,\xi)\|^2}{\varphi_0}N\frac{2N^3}{3}\frac{x_0^2}{2},$$

beşinci terim

$$\left\|-\frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}(x,\xi)\frac{\left[\int_{-N}^{N}(i\xi)^3\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi - A\varphi(x)\right]\varphi(x)}{\varphi^2(x)}dydz\right\| + \left\|\frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}(x,\xi)\frac{[a(x)B\varphi(x)]\varphi(x)}{\varphi^2(x)}dydz\right\|$$

$$+\left\| \frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z \widehat{\omega}(x,\xi)\frac{\left(\int_{-N}^{N}(i\xi)^2\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi\right)^2}{\varphi^2(x)}dydz \right\|$$

$$\le \frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat{\omega}\|}{\varphi_0^2}\int_0^x\int_0^z \left\|\left(\int_{-N}^{N}(i\xi)^3\widehat{\omega}\,d\xi - A\varphi(x) - a(x)B\varphi(x)\right)\varphi(x)\right\|dydz$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat{\omega}\|}{\varphi_0^2}\int_0^x\int_0^z\left\|\left(\int_{-N}^{N}(i\xi)^3\widehat{\omega}(x,\xi)\,d\xi\right)^2\right\|dydz$$

$$\le \frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat\omega\|}{\varphi_0^2}\left[\int_0^x\int_0^z\left\|\int_{-N}^N (i\xi)^3\widehat\omega(x,\xi)\,d\xi\right\|dydz\right.$$

$$\left.+\int_0^x\int_0^z\left(\|A\varphi\|\|\varphi\|+\|a(x)\|\|B\varphi\|\|\varphi\|+\|\widehat\omega\|^2\left|\int_{-N}^N(i\xi)^2d\xi\right|^2\right)dydz\right]$$

$$\le \frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat\omega\|}{\varphi_0^2}\left[\|\widehat\omega(x,\xi)\|N^3\frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0^2}{2}c_1c_2+\frac{x_0^2}{2}c_1c_3a_0\right]$$

$$+\frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat\omega\|}{\varphi_0^2}\left[\|\widehat\omega(x,\xi)\|^2\frac{x_0^2}{2}\frac{4N^6}{9}\right]$$

$$=\frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat\omega(x,\xi)\|^2}{\varphi_0^2}N^3\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat\omega(x,\xi)\|}{\varphi_0^2}\frac{x_0^2}{2}c_1c_2$$

$$+\frac{1}{c^2}\frac{\|\widehat\omega(x,\xi)\|}{\varphi_0^2}\frac{x_0^2}{2}c_1c_3a_0+\frac{2}{c^2}\frac{\|\widehat\omega(x,\xi)\|^3}{\varphi_0^2}x_0^2\frac{N^6}{9}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\|\varphi\|_{c^2}\le c_1,\qquad \|A\varphi\|_{c^2}\le c_2,\qquad \|B\varphi\|_{c^2}\le c_3$$

olup c_1, c_2, c_3 sayıları pozitif sabitlerdir. Diğer taraftan benzer değerlendirmeler yapılarak

altıncı terim

$$\left\|-\frac{1}{c^2}\int_0^x a(z)\widehat\omega(z,\xi)\,dz\right\|\le\frac{1}{c^2}\|a(x)\|\|\widehat\omega(x,\xi)\|\frac{x_0^2}{2}$$

$$\le\frac{1}{c^2}a_0\|\widehat\omega(z,\xi)\|\frac{x_0^2}{2}$$

yedinci terim

$$\left\|\frac{1}{c^2}xa(0)\widehat\psi_1(\xi)\right\|\le\frac{1}{c^2}x_0a_0\|\widehat\psi_1(\xi)\|$$

ve son olarak,

$$\left\|\frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^z\widehat\omega(y,\xi)a_y(y)\,dydz\right\|\le\frac{1}{c^2}\|\widehat\omega\|a_1\frac{x_0^2}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$A_0=\|\widehat\psi_1(\xi)\|+x_0\|\widehat\psi_2(\xi)\|+\frac{1}{c^2}x_0\|\widehat\psi_1(\xi)\|$$

$$+\frac{1}{c^2}x_0a_0\|\widehat\psi_1(\xi)\|$$

$$=\|\widehat\psi_1(\xi)\|\left(\frac{1}{c^2}x_0+1+\frac{1}{c^2}x_0a_0\right)+x_0\|\widehat\psi_2(\xi)\|,$$

$$A_1=\frac{N^2}{c^2}\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{c^2}\frac{1}{\varphi_0^2}\frac{x_0^2}{2}c_1c_2$$

$$+\frac{1}{c^2}\frac{1}{\varphi_0^2}\frac{x_0^2}{2}c_1c_3a_0+\frac{1}{c^2}a_0\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{c^2}a_1\frac{x_0^2}{2}$$

$$=\frac{x_0^2}{2c^2}\left(N^2+\frac{1}{\varphi_0^2}c_1c_2+\frac{1}{\varphi_0^2}c_1c_3a_0+a_0+a_1\right),$$

$$A_2=\frac{1}{\varphi_0}\frac{1}{c^2}N\frac{2N^3}{3}\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{c^2}\frac{1}{\varphi_0^2}N^3\frac{x_0^2}{2}$$

$$=\frac{1}{c^2}\frac{x_0^2}{2}\left(\frac{2N^4}{3\varphi_0}+\frac{N^3}{\varphi_0^2}\right),$$

$$A_3=\frac{2}{c^2}\frac{x_0^2}{\varphi_0^2}\frac{N^6}{9}$$

olmak üzere

$$\|\widehat\omega\|\le A_0+A_1\|\widehat\omega\|+A_2\|\widehat\omega\|^2+A_3\|\widehat\omega\|^3$$

bulunur. Sonuç olarak, eğer $\|\widehat\omega\|\le R$ alınırsa

$$\|\widehat\omega\|\le A_0+A_1\|\widehat\omega\|+A_2\|\widehat\omega\|^2+A_3\|\widehat\omega\|^3\le R$$

olmak şartıyla Schauder sabit nokta teoremine göre problemin $C^\infty(D)$'de çözümü vardır. Böylece (1)-(3) probleminin çözümünün varlığı ispatlanmış olur.

4. Kaynaklar

Alekseev, AS. 1967. Inverse dynamical problems of seismology. In Some Methods and Algorithms for Interpretation of Geophysical Data. Nauka, Moscow, pp. 9-84.

Alifanov, OM. 1979. Identification of Heat Transfer Processes in Aircraft (Introduction to the Theory of Inverse Heat Transfer Problems) (in Russian),Mashinostroenie, Moscow.

Alifanov, OM. 1988. Inverse Heat Transfer Problems *(*in Russian), Mashinostroeni*e*, Moscow.

Amirov, A. 1983. A class of multidimansional inverse problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 272(3): 265-267.

Amirov, A. 1986. Existence and uniqueness theorems for the solution of an inverse problem for the transport equation. *Sib. Math. J.*, 27: 785-800.

Amirov, A. 1987. A class of inverse problems for a special kinetic equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 295(2): 265-267.

Amirov, AK., Pashaev, RT. 1992. An inverse problem for the wave equation, *Soviet Math. Dokl.*, 44(1): 121-122.

Amirov, A. 2001. Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations, VSP, Utrecht The Netherlands.

Amirov, A., Yıldız, M., Ustaoğlu, Z. 2009. Solvability of a problem of integral geometry via an inverse problem for a transport-like equation and a numerical method. *Inverse Problems*, 25: 095002.

Anikonov, Yu.E. 1978. The solvability of a certain problem of integral geometry. *Mat. Sb.* 101(143): 271–279.

Anikonov, Yu.E., Amirov, A.Kh. 1983. A uniqueness theorem for the solution of an inverse problem for the kinetic equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, 272 (6): 1292-1293.

Anikonov, Yu.E. 2001. Methods for Investigating Multidimensional Inverse for Differantial Equations. *Nauka*, Novosibirsk (in Russian).

Anikonov, Yu.E. 2001. Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations, VSP, Utrecht The Netherlands.

Antonenko, OF. 1967. Finite-difference scheme inversion for solving a one-dimensional dynamical inverse problem of seismology. In: Some Methods and Algorithms for Interpretation of Geophysical *Data. Nauka, Moscow*, 92-98.

Bamberger, A., Chavent, G. 1979. Sur le probleme inverse en sismique.*Ann. Sc. Math.,* 1(2): 153–174.

Bamberger, A., Chavent, G., Hemon, C., Lailly, P. 1982. Inversion of normal incidence seismograms.

Geophysics 47, 5, 757–770.

Dmitriev, VI., Fedorova, EA. 1983. About inverse problem solution in the frequency testing method for layer medium. In: Biblioteka Program dlye Geophysiki, *Moscow*, pp. 11-18.

Hamaker, C., Smith, K., Solmon, D., Wagner, S. 1980. The divergent beam X-ray transform. Rocky Mountain J. Math., 10, No.1, 253-283.

Iskenderov, AD. 1984. Variational formulations of multidimensional inverse problems of mathematical *Doklady*, 29, No.1, 52-55.

Ivanov, VK., Vasin, VV., Tanana, VP. 1978. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications. Nauka, Moskow.

Kabanikhin, SI. 1992. Method of solving dynamical inverse problems for hyperbolic equations Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. *Nauka. Novosibirsk*. 109-123.

Kabanikhin, SI., Abdiev, KS. 1982. Modeling the initial stage of electromagnetic current establishment and using this in the problem of defining the conductivity tensor. In: Questions of correctness of math. phys. and analysis problem. Computer Center, Sib. Br., Ac. Sci. *USSR*, *Novosibirsk*, 85-94.

Kabanikhin, SI., Abdiev, KS. 1986. Projection-difference method for solving three- dimensional problem of geoelectrics. Questions of Correctness of Mathematical Physics and Analysis Problem, 61-72.

Kabanikhin, SI., Karchevsky, AL. 1992. An optimization method for solving inverse problems of Geoelectrics. In: III-Posed Problems in Natural Science. *VSP/TVP*, *Moscow, pp*.312-325.

Kabanikhin, SI., Karchevsky, AL. 1995. An optimization method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation. Journal of inverse and III-Posed Problems. 3, No. 1, pp. 21-46.

Kabanikhin, SI.,, Martakov, SV. 1988. Investigation of the Projection-Difference Methods for Solving Direct and Inverse Problems of Geoelectrics.

Karchevsky, AL. 1998. Finite-Difference Coefficient Inverse Problem and Properties of the Misfit Functional. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 6, (5): 431-452.

Kireitov, VR. 1975. The problem of determining an optical surface from its representations. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*. 10 (3): 45–54.

Kireitov, VR. 1983. The inverse problems of photometry. VTS of the SOAN, Novosibirsk, Nauka.

Klibanov, MV., Timonov, A. 2004. Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications, VSP, Utrecht The Netherlands.

Lavrent'ev, MM., Anikonov, Yu.E. 1967. A certain class of problems in integral geometry. *Sov. Math. Dokl.*, 8: 1240-1241.

Lavrent'ev, MM., Romanov, VG., Shishatskii, SP. 1980. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Nauka, Moscow.

Marchuk, GI. 1964. On the formulation of certain inverse problems. Doklady Akad. Nauk SSSR, 156, 503-506.

Pestov, LN., Sharafutdinov, VA. 1988. Integral geometry of tensor fields on a manifold of negative curvature. *Soviet Math. Dokl.* 36(1): 203-204.

Romanov, VG. 1978. Integral geometry on geodesics of an isotropic Riemannian metric, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 241(2): 298-293.

Romanov, VG. 1987. Inverse Problems of Mathematical Physics, VSP, Utrecht The Netherlands.

Romanov, VG., Kabanikhin, SI. 1991. Inverse Problems for Geoelectrics. *Nauka*, Moscow.

Romanov, VG., Kabanikhin, SI. 1994. Inverse Problems for Maxwell's Equations. *VSP*, Utrecht.

Sacks, S. 1985. A simple computational scheme for determining the sound speed of an acoustic from its surface impulse responce. *Reports of Cornell University*, 32, New York.

Symes, WW. 1981. Stable solution of the inverse reflection problem for a smoothly stratified elastic medium. *SIAM J. Math. Anal.,* 12: 421-453.

Tikhonov, A. N. 1963. Solution of incorrectly formulated problems and regularization method. *Soviet Mathematical Doklady*, 4, 1035-1038.

Tikhonov, AN., Arsenin, VY. 1979. Methods of Solution of Ill Posed Problems. Nauka, Moscow.

Tikhonov, AN., Arsenin, VY., Timonov AA. 1987. Mathematical Problems of Computerized Tomography. Nauka, Moscow.

Ursin, B., Berteussen, KA. 1986. Comparison of some inverse methods for wave propagation in layered media. *Proceed. IEEE*, 74, No. 3, pp. 7-19.

Vasil'ev, FP. 1981. Methods of Solving Extremum Problems. *Nauka,* Moscow.