Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi
Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science
2021, 16(1): 121-128
DOI: 10.29233/sdufeffd.806065
Atıf için / For Citation: B. B. Koca-Eskişehirli, "Polidiskte tek bir eleman tarafından üretilen değişmez alt uzaylar için operatör teorik bir kuruluş," *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 16(1), 121-128, 2021.

Polidiskte Tek Bir Eleman Tarafından Üretilen Değişmez Alt Uzaylar için Operatör Teorik Bir Kuruluş

Beyaz Başak KOCA-ESKİŞEHİRLİ[*1]

[1]İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 34134, İstanbul, Türkiye

**yazışılan yazar e-posta: basakoca@istanbul.edu.tr*

(Alınış / Received: 05.10.2020, Kabul / Accepted: 23.03.2021, Yayımlanma / Published: 27.05.2021)

Özet: Birim disk D üzerindeki $H^2(D)$ Hardy uzayının değişmez alt uzaylarının tek bir fonksiyon tarafından üretilen alt uzaylar olduğu ve bu fonksiyonların bir iç fonksiyon olduğu A. Beurling'in [2] çalışmasından bilinmektedir. Birim diskteki bu durumun aksine, polidisk durumunda değişmez alt uzayların yapısı daha karmaşıktır. Öyle ki W. Rudin'in "Function Theory in Polydiscs" kitabında verdiği "Polidisk üzerindeki değişmez alt uzayların sınıflandırılması ya da kesin bir tanımının verilmesi" problemi yoğun bir şekilde çalışılmasına rağmen bugün hala operatör teori ve kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinin en önemli açık problemlerindendir. Bu çalışmada, Beurling-Lax-Halmos Teoremi kullanılarak, polidisk D^n üzerindeki $H^2(D^n)$ Hardy uzayının tek bir eleman tarafından üretilen değişmez alt uzayları için bir karakterizasyon verilecektir. Ek olarak, Beurling-tipli değişmez alt uzaylar için [12]'de verilen bir karakterizasyon da elde edilecektir.

***Anahtar kelimeler**:* Değişmez alt uzay, Hardy uzayı, Polidisk, İç fonksiyon, Operatör-değerli fonksiyon.

An Operator Theoretic Setting of Singly-Generated Invariant Subspaces in the Polydisc

Abstract: It is known from A. Beurling's work [2] that any invariant subspace of the Hardy space $H^2(D)$ on the unit disc D is singly-generated and generated by an inner function. In contrast to the unit disc case, the structure of invariant subspaces in the polydisc is much more complicated. The problem of classification or explicit description of all invariant subspaces in the polydisc given by W.Rudin in his book "Function Theory in Polydiscs" is still one of the most important open problems of operator theory and function theory of complex variables, although it has been extensively studied. In this study, we give a characterization for singly-generated invariant subspaces of Hardy space $H^2(D^n)$ on the polydisc D^n by using the Beurling-Lax-Halmos Theorem. Moreover, it is also obtained the characterization of Beurling-type invariant subspaces given in [12].

***Key words**:* Invariant subspace, Hardy space, Polydisc, Inner function, Operator-valued function.

1. Giriş

Polidisk D^n üzerindeki $H^2(D^n)$ Hardy uzayının kapalı bir M alt uzayı, her $f \in M$ için $z_i f \in M,\ i = 1,\ldots,n$ koşulunu sağlıyorsa bu alt uzaya $H^2(D^n)$'nin değişmez alt uzayı denir. M_f, $H^2(D^n)$ Hardy uzayının verilen bir f elemanını içeren en küçük değişmez alt

Beyaz Başak KOCA-ESKİŞEHİRLİ, basakoca@istanbul.edu.tr, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6481-6020

uzayını göstermek üzere, $M_f = fH^2(D^n)$ formunda ise M_f alt uzayına f tarafından üretilen değişmez alt uzay denir. Birim disk durumunda, $H^2(D)$ Hardy uzayının değişmez alt uzaylarının yapısı A. Beurling [2] tarafından verilmiştir. Beurling, birim disk üzerindeki her değişmez alt uzayın tek bir eleman tarafından üretildiğini ve bu elemanın bir iç fonksiyon olduğunu göstermiştir, yani birim disk D üzerindeki $H^2(D)$ Hardy uzayının bir M değişmez alt uzayı, f bir iç fonksiyon olmak üzere

$$M = fH^2(D)$$

formundadır. Bu formdaki değişmez alt uzaylara Beurling-tipli değişmez alt uzaylar denir. Bir değişkenlideki durumun aksine, polidisk durumunda değişmez alt uzayların yapısı sadece Beurling-tipli değildir. Beurling-tipli alt uzayların polidisk durumunda da değişmez alt uzay olduğu açıktır. Bununla birlikte $H^2(D^n)$ Hardy uzayında tek bir fonksiyon tarafından üretilen Beurling-tipli olmayan değişmez alt uzayın varlığı gösterilmiş ve bu uzaylar için bir kuruluş verilmiştir [6]. Bunun yanında polidisk durumunda tüm değişmez alt uzaylar sadece tek bir eleman tarafından üretilmemektedir. $H^2(D^2)$ Hardy uzayında iki fonksiyon tarafından üretilen fakat tek bir fonksiyon tarafından üretilemeyen değişmez alt uzay vardır [4]. Hatta sonlu eleman tarafından üretilen değişmez alt uzayların varlığı da bilinmektedir [11]. Anlaşılacağı üzere, polidisk durumundaki değişmez alt uzayların yapısı biraz daha karmaşıktır, öyle ki W. Rudin'in [11] kitabında yer alan "$H^2(D^n)$ Hardy uzayının tüm değişmez alt uzaylarının sınıflandırılması yada kesin bir tanımının verilmesi" problemi yoğun bir şekilde çalışılmasına rağmen bugün hala çok değişkenli operatör teorisi ve çok değişkenli kompleks fonksiyonlar teorisinin en önemli açık problemlerinden biridir. Polidiskte değişmez alt uzayların kesin bir tanımının verilmesi zor gözükmekle birlikte değişmez alt uzayların sınıflandırılması ile ilgili çok sayıda önemli çalışmalar vardır. Örneğin, Radlow [10] Beurling-tipli değişmez alt uzaylar için geometrik anlamda bir karakterizasyon verirken, Agrawal, Clark, and Douglas [1] birimsel denklik anlamında bir karakterizasyon vermiştir. Mandrekar [7] ise aynı türdeki değişmez alt uzaylar için öteleme operatörlerinin çift-değişmeliliği anlamında bir karakterizasyon verirken Yang [16] üretici çekirdekler bakımından benzer bir Beurling karakterizasyonu vermiştir. Koca ve Sadık [6] ise tek bir fonksiyon tarafından üretilen değişmez alt uzayların tam bir karakterizasyonunu vermiş ve tek bir fonksiyon tarafından üretilen fakat Beurling-tipli olmayan değişmez alt uzayların varlığını göstermiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalarda, Beurling-Lax-Halmos Teoremi kullanılarak değişmez alt uzaylar hakkında operatör teorik karakterizasyonların ve operatör teorik tabanlı bazı önemli değişmez alt uzay örneklerin verilmesiyle, sınıflandırma konusu ile ilgili oldukça dikkat çekici ilerlemeler elde edilmiştir. Beurling-Lax-Halmos Teoremi, Beurling'in teoreminin vektör-değerli Hardy uzaylarına genelleştirilmesidir. Bu teorem kullanılarak polidiskteki değişmez alt uzaylar için elde edilen önemli operatör teorik karakterizasyonlardan Qin ve Yang [8], Sarkar [13], Sarkar, Susane ve Wick [14], Seto ve Yang [15], Yang [17], Koca [5] çalışmaları ve bu çalışmalardaki referanslar örnek verilebilir. Bu çalışmada ise, tek bir fonksiyon tarafından üretilen değişmez alt uzaylar için operatör-teorik bir yaklaşım verilecektir. Bu yaklaşım için kullanılan yöntem, [12]'deki gibi polidisk üzerindeki Hardy uzayına, birim disk üzerinde vektör-değerli bir analitik fonksiyon uzayı gözüyle bakılarak Beurling-Lax-Halmos Teoremi'ni kullanmaktır. Aynı zamanda elde edeceğimiz karakterizasyondan Beurling-tipli değişmez alt uzaylar için Sadıkov tarafından [12]'de verilen karakterizasyon da elde edilecektir.

Bu çalışmanın sonuçları verilmeden önce çalışma boyunca ihtiyaç duyulacak bazı tanım ve önbilgiler verilecektir.

n pozitif bir tamsayı olmak üzere polidisk

$$D^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1, i = 1, \ldots, n\}$$

şeklinde tanımlanırken, polidiskin sınırının bir kısmı olan torus ise

$$T^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1, i = 1, \ldots, n\}$$

şeklinde tanımlanır. D^n üzerinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu için $0 < r \leq 1$ olmak üzere T^n üzerinde $f_r(w) = f(rw)$ şeklinde bir f_r fonksiyonu tanımlansın. Her $w \in T^n$ noktasında

$$f^*(w) = \lim_{r \to 1} f_r(w)$$

şeklinde tanımlanan radyal limit vardır.

Polidisk D^n üzerindeki Hardy uzayı $H^2(D^n)$, D^n üzerinde tanımlı ve

$$\|f\|_2 = \sup_{0 \leq r < 1} \left\{ \int_{T^n} |f_r|^2 dm_n \right\}^{1/2} < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm f analitik fonksiyonların uzayıdır. Her $f \in H^2(D^n)$ fonksiyonunun $f^*(w) = \lim_{r \to 1} f_r(w)$ radyal limiti hemen her $w \in T^n$ için vardır ve

$$\lim_{r \to 1} \int_{T^n} |f_r - f^*|^2 dm_n = 0$$

dır. $H^\infty(D^n)$ ise D^n üzerinde tanımlı ve

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D^n} |f(z)| < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm f sınırlı ve analitik fonksiyonların uzayıdır.

T^n üzerinde hemen her yerde $|f^*| = 1$ koşulunu sağlayan $f \in H^\infty(D^n)$ fonksiyonuna iç fonksiyon denir. $1/f^* \in L^\infty(T^n)$ koşulunu sağlayan $f \in H^\infty(D^n)$ fonksiyonuna ise genelleştirilmiş iç fonksiyon denir ([6]'da tanımlanmıştır.).

Aşağıdaki teorem bir genelleştirilmiş iç fonksiyon tarafından üretilen alt uzayların değişmez olduğunu ve polidiskteki tek bir fonksiyon tarafından üretilen tüm değişmez alt uzayların bir genelleştirilmiş iç fonksiyon tarafından üretildiğini göstermektedir.

Teorem 1.1. [6, Theorem 1] $f \in H^\infty(D^n)$ olmak üzere $H^2(D^n)$ nin $fH^2(D^n)$ alt uzayının değişmez olması için gerek ve yeter koşul f nin genelleştirilmiş iç fonksiyon olmasıdır.

Polidisk üzerindeki Hardy uzayları hakkında daha detaylı bilgi için [11]'e bakılabilir.

Vektör değerli analitik fonksiyon uzaylarını da hatırlayalım. K ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere, D birim diski üzerinde tanımlı tüm K-değerli analitik fonksiyonların uzayı $H^2(K)$,

$$H^2(K) = \left\{f(z): z \in D, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n, x_n \in K, \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_K^2 < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|\,.\,\|_K$, K uzayının normudur. $H^2(K)$ uzayı

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \text{ , } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n$$

iç çarpımı altında bir Hilbert uzayıdır. D üzerinde tanımlı tüm $B(K)$-değerli analitik fonksiyonların uzayı $H^\infty(B(K))$ ise

$$H^\infty(B(K)) = \left\{\Theta(z): z \in D, \Theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, A_n \in B(K), \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|_{B(K)}^2 < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\|\Theta\|_\infty = \sup_{z \in D} \|\Theta(z)\|_{B(K)} < \infty$ dır. Her $\Theta \in H^\infty(B(K))$ elemanı T üzerinde hemen her yerde $B(K)$ üzerindeki güçlü topolojiye göre

$$\Theta^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} \Theta(re^{i\theta})$$

şeklinde bir sınır değerine sahiptir. Ayrıca her $\Theta \in H^\infty(B(K))$ elemanı $H^2(K)$ üzerinde

$$(\hat{\Theta}\varphi)(z) = \Theta(z)\varphi(z), z \in D$$

olacak şekilde bir $\hat{\Theta}$ operatörü tanımlar ve bu operatöre Θ ile çarpım operatörü denir.

Teorem 1.2. [9, sf. 50] $H^2(K)$ üzerinde bağımsız değişken ile çarpım operatörü ile değişmeli olan tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $H^\infty(B(K))$ dır.

Vektör değerli analitik fonksiyon uzayları hakkında daha detaylı bilgi için [9]'a bakılabilir.

Bir K Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer $V: K \to K$ operatörünün çekirdeğinin ortogonal tamlayanı izometri ise V operatörüne kısmi izometri denir. Bu ortogonal tamlayana V nin birincil uzayı, $V(K)$ ya ise son uzayı denir.

Klasik Beurling-Lax-Halmos Teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Teorem 1.3. [9, Beurling-Lax-Halmos Theorem, sf.53] $H^2(K)$ nın M alt uzayının bağımsız değişken ile çarpım operatörü altında değişmez olması için gerek ve yeter koşul M nin $M = \hat{\Theta}H^2(K)$ formunda olmasıdır. Burada Θ, $H^\infty(B(K))$ nın bir elemanı ve sınır değeri, T üzerinde hemen her yerde N birincil uzaylı bir kısmi izometridir. Ayrıca Θ elemanı, M üzerinde son uzayı Nolan bir kısmi izometri ile sağdan çarpıma kadar tek türlü belirlidir.

2. Bulgular

Bu bölümde Beurling-Lax-Halmos Teoremi kullanılarak, $H^2(D^n)$ Hardy uzayının tek bir fonksiyon tarafından üretilen değişmez alt uzayları karakterize edilecektir. Bunun için ilk olarak aşağıdaki iyi bilinen önermeye ihtiyaç duyulmaktadır (Örnek olarak [12]'ye bakılabilir).

Önerme 2.1. $n > 1$ olmak üzere $H^2(D^n)$ Hardy uzayı, $H^2(H^2(D^{n-1}))$ vektör-değerli analitik fonksiyon uzayına izometrik olarak izomorftur. Benzer şekilde, $H^\infty(D^n)$ uzayı da $H^\infty(H^\infty(D^{n-1}))$ uzayına izometrik olarak izomorftur.

Genelliği bozmaksızın $n = 2$ alınsın, yani $D^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ olsun. Önerme 2.1. den $H^2(D^2)$ uzayı, $H^2(H^2(D_w))$ uzayına izometrik olarak izomorftur. Burada $D_w = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ dir. Şimdi Beurling-Lax-Halmos Teoremi 1.3.'deki K uzayı $H^2(D_w)$ olarak düşünülsün. Bu sayede $H^2(D^2)$ nin z bağımsız değişkeni ile çarpım operatörü altında değişmez alt uzayları, aşağıdaki şekilde tamamen karakterize edilebilir.

Önerme 2.2. [12] $H^2(D^2)$ $(= H^2(H^2(D_w))$) nin M alt uzayının z bağımsız değişkeni ile çarpım operatörü altında değişmez olması için gerek ve yeter koşul M nin $M = \hat{\Theta} H^2(H^2(D_w))$ formunda olmasıdır. Burada Θ, $H^\infty(B(H^2(D_w)))$ nın bir elemanı ve sınır değeri $\Theta^*(z)$, hemen her $z \in T$ için $N \subset H^2(D_w)$ birincil uzaylı bir kısmi izometridir. Ayrıca Θ elemanı, M üzerinde son uzayı N olan bir kısmi izometri ile sağdan çarpıma kadar tek türlü belirlidir.

Önerme 2.2. deki koşulları sağlayan operatör-değerli Θ fonksiyonlarının sınıfı $\{\Theta_M\}$ ile gösterilsin ve $H^2(D^2)$ nin M değişmez alt uzayının tek bir eleman tarafından üretildiği varsayılsın. M değişmez alt uzay olduğu için, tanımı gereği, z bağımsız değişkeni ile çarpım operatörü altında değişmezdir. Dolayısıyla Önerme 2.2'den M, $\{\Theta_M\}$ sınıfındaki fonksiyonlar tarafından tanımlanabilir. Bununla birlikte, $\{\Theta_M\}$ sınıfındaki fonksiyonlar tarafından tanımlanan tüm değişmez alt uzayların tek bir fonksiyon tarafından üretilemeyeceği açıktır. Aşağıda verilen ve bu çalışmanın esas sonucu olan teorem, [12] deki ispat yolu kullanılarak, $\{\Theta_M\}$ sınıfındaki fonksiyonlar tarafından tanımlanan tüm değişmez alt uzayların tek bir fonksiyon tarafından üretilmesi için bir gerek ve yeter koşul vermektedir. Bu sayede $H^2(D^2)$ Hardy uzayının tek bir fonksiyon tarafından üretilen tüm değişmez alt uzayları karakterize edilmiş olacaktır.

Teorem 2.3. $H^2(D^2)$ nin M değişmez alt uzayının tek bir eleman tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartları sağlayan en az bir operatör-değerli $\Theta \in \{\Theta_M\}$ analitik fonksiyonunun var olmasıdır:

i) Her $h \in H^2(D_w)$ ve hemen her $z \in T$ için $\|\Theta(z)h\| \geq c\|h\|$ koşulunu sağlayan bir $c > 0$ sabiti vardır.
ii) Belirlenmiş herhangi bir $z_0 \in D_z$ için $\Theta(z_0)$ operatörü, $H^2(D_w)$ üzerinde w bağımsız değişkeni tarafından çarpım operatörü ile değişmelidir.

İspat: (⇐): (i) ve (ii) şartlarını sağlayan bir operatör-değerli $\Theta \in \{\Theta_M\}$ analitik fonksiyonu var olsun. M değişmez alt uzayının tek bir eleman tarafından üretildiğini göstermek için Teorem 1.1'e göre $M = fH^2(D^2)$ olacak şekilde bir f genelleştirilmiş iç fonksiyonu bulunmalıdır. (ii) şartına göre belirlenmiş herhangi bir $z_0 \in D_z$ için $\Theta(z_0)$ operatörü $H^2(D_w)$ üzerinde w bağımsız değişkeni tarafından çarpım operatörü ile değişmeli olduğundan ve $H^2(D_w)$ üzerinde w bağımsız değişkeni tarafından çarpım operatörü ile değişmeli olan tüm operatörlerin kümesi $H^\infty(D_w)$ ile tanımlandığından [3, Problem 116], $\Theta(z_0) \in H^\infty(D_w)$ dur. $z \to \Theta(z)I$ fonksiyonu ele alınsın. Burada I fonksiyonu değerlerini $H^2(D_w)$ üzerinden alan z nin analitik bir fonksiyonudur ve 1 değerine eşittir. Aranılan f fonksiyonu $f = \Theta I$ olarak alınırsa, $\Theta(z_0)$ ile $f(z_0, w)$ fonksiyonları aynıdır ve $w \in D_w$ olmak üzere $w \to \Theta(z_0)(w)$ fonksiyonlarının sınıfı, f

analitik fonksiyonu ile üretilmiş bir sınıftır. Bir $g \in H^2(D^2)$ elemanı alınsın. Buradan $g(z,w) = g_z(w)$ için

$$\|g\|^2 = \int_T \int_T |g^*(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = \int_T \left\|g_\xi\right\|^2 d\xi$$

elde edilir. Aynı işlem $\varphi \in H^2(D^2)$ olmak üzere $f\varphi$ fonksiyonu için de uygulanırsa

$$\|f\varphi\|^2 = \int_T \left\|f_\xi \varphi_\xi\right\|^2 d\xi$$

elde edilir. f_ξ fonksiyonu ile çarpım operatörü, hemen her ξ için $H^2(D_w)$ üzerinde N birincil uzaylı bir kısmi izometri olduğundan hemen her ξ için N üzerinde bir izometri elde edilir, yani hemen her ξ için $\left\|f_\xi \varphi_\xi\right\| = \left\|\varphi_\xi\right\|$ ve buradan her $\varphi \in H^2(D^2)$ için $\|f\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$ dir. Bu yüzden Θ operatörü $H^2(H^2(D_w))$ uzayının bir elemanıdır ve $H^2(D^2)$ üzerindeki $f = \Theta I$ ile çarpım operatörü, $H^2(H^2(D_w))$ ile $H^2(D^2)$ arasındaki doğal izomorfizma altında $\{z^k w^l : k,l \geq 0\}$ vektörleri üzerinde sınırlıdır. Öte yandan, $\{z^k w^l : k,l \geq 0\}$ kümesi, $H^2(D^2)$ uzayında yoğun olduğundan $f = \Theta I$ ile Θ fonksiyonları birbirlerine karşılık gelirler. (i) şartından her $h \in H^2(D_w)$ ve hemen her $z \in T$ için $\|\Theta(z)h\| \geq c\|h\|$ koşulunu sağlayan bir $c > 0$ sabiti var olduğundan

$$c\|h\| \leq \|\Theta(z)h\| = \|fh\| \leq \|f\| \cdot \|h\|$$

elde edilir. Dolayısıyla T^2 üzerinde hemen her yerde $|f^*| \geq c$, yani $1/f^* \in L^\infty(T^n)$ dir, böylece f nin genelleştirilmiş iç fonksiyon olduğu görülür.

($\Rightarrow$): M tek bir fonksiyon tarafından üretilen değişmez alt uzay olsun. Teorem 1.1. den $M = fH^2(D^2)$olacak şekilde bir f genelleştirilmiş iç fonksiyonu vardır. Buradan hemen her $z \in D$ için $f_z(\cdot) = f(z,\cdot)$ fonksiyonunun da $H^\infty(D_w)$ uzayında genelleştirilmiş iç fonksiyon olduğu görülür, yani hemen her $\xi \in T$ için $1/f^* \in L^\infty(T)$ dir. $H^\infty(D_w)$ üzerinde f_z ile çarpım operatörü $\Theta(z)$ ile gösterilsin. $\Theta(z)$ nin sınır değeri (i) şartını sağlar. Gerçekten de, her $g \in H^2(D_w)$ için

$$\|g\|_2 = \left\|\frac{1}{f_\xi^*} f_\xi^* g\right\|_2 \leq \left\|\frac{1}{f_\xi^*}\right\|_\infty \cdot \left\|f_\xi^* g\right\|_2 = \left\|\frac{1}{f_\xi^*}\right\|_\infty \cdot \left\|M_{f_\xi^*} g\right\|_2 = \left\|\frac{1}{f_\xi^*}\right\|_\infty \|\Theta(\xi) g\|_2$$

elde edilir. □

Önerme 2.1. den yararlanarak Teorem 2.3., n değişkenli duruma genelleştirebilir. Bunun için Sadıkov [12] tarafından aşağıda verilen önermeye ihtiyaç vardır.

Önerme 2.4. [12] $H^2(D^n)$ üzerinde $z_1, \dots, z_n$ bağımsız değişkenleri tarafından çarpım operatörleriyle değişmeli olan tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $H^\infty(D^n)$ dir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.3.'ün genelleştirilmesidir ve Teorem 2.3. ile aynı şekilde ispatlanır. Genelleştirilmiş durumunda, $\{\Theta_M\}$, $M = \hat{\Theta} H^2(H^2(D^{n-1}))$ koşulunu sağlayan ve $|z_1| = 1$ deki sınır değerleri hemen her yerde $N \subset H^2(D^{n-1})$ birincil uzaylı kısmi izometri olan $\Theta \in H^\infty(B(H^2(D^{n-1})))$ elemanlarının kümesi olacaktır. Ayrıca Θ elemanları, M üzerinde son uzayı N olan bir kısmi izometri ile sağdan çarpıma kadar tek türlü belirlidir.

Teorem 2.5. $H^2(D^n)$ nin M değişmez alt uzayının tek bir eleman tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartları sağlayan en az bir operatör-değerli $\Theta \in \{\Theta_M\}$ analitik fonksiyonunun var olmasıdır:

i) Her $h \in H^2(D^{n-1})$ ve hemen her $z \in T$ için $\|\Theta(z)h\| \geq c\|h\|$ koşulunu sağlayan bir $c > 0$ sabiti vardır.
ii) Belirlenmiş herhangi bir $z_1^0 \in D_{z_1}$ için $\Theta(z_1^0)$ operatörü $H^2(D^{n-1})$ üzerinde $z_2, \ldots, z_n$ bağımsız değişkeni tarafından çarpım operatörü ile değişmelidir.

İç fonksiyonların genelleştirilmiş iç fonksiyonlar sınıfına ait olduğu açıktır. Bu sebeple Teorem 2.3. de verilen tek bir fonksiyon tarafından üretilen değişmez alt uzay karakterizasyonu kullanılarak bir iç fonksiyon tarafından üretilen değişmez alt uzaylar yani Beurling-tipli değişmez bir alt uzaylar için de bir karakterizasyon verilip verilemeyeceği sorusunu sormak oldukça doğaldır. Aşağıda Teorem 2.3.'ün bir sonucu olarak, Beurling-tipli değişmez alt uzaylar için Sadıkov [12] tarafından verilen bir karakterizasyon elde edilecektir.

Sonuç 2.6. $H^2(D^n)$ nin M değişmez alt uzayının Beurling-tipli olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartları sağlayan en az bir operatör-değerli $\Theta \in \{\Theta_M\}$ analitik fonksiyonunun var olmasıdır:

i) Hemen her $z \in T$ için $\Theta(z)$ izometridir.
ii) Belirlenmiş herhangi bir $z_1^0 \in D_{z_1}$ için $\Theta(z_1^0)$ operatörü $H^2(D^{n-1})$üzerinde $z_2, \ldots, z_n$ bağımsız değişkeni tarafından çarpım operatörü ile değişmelidir.

İspat: M değişmez alt uzayının Beurling-tipli olması için gerek ve yeter koşul $M = fH^2(D^n)$ olacak şekilde bir f iç fonksiyonunun olmasıdır. İç fonksiyonlar, genelleştirilmiş iç fonksiyonlar sınıfına ait olduğundan Teorem 2.5'ten belirlenmiş herhangi bir $z_1^0 \in D_{z_1}$ için $\Theta(z_1^0)$ operatörü $H^2(D^{n-1})$ üzerinde $z_2, \ldots, z_n$ bağımsız değişkeni tarafından çarpım operatörü ile değişmelidir. Öte yandan f fonksiyonunun iç fonksiyon olması için gerek ve yeter koşulun f ile çarpım operatörünün izometri olduğu da bilinmektedir. Ayrıca Teorem 2.3.'ün ispatında $H^2(D^n)$ uzayında $f = \Theta I$ ile Θ fonksiyonlarının birbirlerine karşılık geldiği gösterildiğinden Θ sınır değerinin hemen her yerde izometri olduğu elde edilir. □

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Beyaz Başak KOCA-ESKİŞEHİRLİ: Araştırma, Orijinal Taslak Yazımı, Doğrulama, İnceleme ve Düzenleme

Destek ve Teşekkür Beyanı

Bu çalışmanın yazarları olarak herhangi bir destek ve teşekkür beyanımız bulunmadığını bildiririz.

Çatışma Beyanı

Bu çalışmanın yazarları olarak herhangi bir çatışma beyanımız bulunmadığını bildiririz.

Etik Kurul Onayı ve/veya Aydınlatılmış Onam Bilgileri

Bu çalışmanın yazarları olarak herhangi bir etik kurul onayı ve/veya aydınlatılmış onam bilgileri beyanımız bulunmadığını bildiririz.

Kaynakça

[1] O.P. Agrawal, D.N. Clark and R.G. Douglas, "Invariant subspaces in the polydisk," *Pacific J. Math.*, 121(1), 1–11, 1986.

[2] A. Beurling, “On two problems concerning linear transformations in Hilbert space,” *Acta Math.*, 81, 17 pp., 1948.
[3] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
[4] C.A. Jacewicz, “A nonprincipal invariant subspace of the Hardy space on the torus,” *Proc. Amer. Math*. Soc., 31, 127–129, 1972.
[5] B.B. Koca, “Two types of invariant subspaces in the polydisc,” *Results Math*, 71, 1297–1305, 2017.
[6] B.B. Koca and N. Sadik, “Invariant subspaces generated by a single function in the polydisk,” *Math. Notes*, 102(1-2), 193–197, 2017.
[7] V. Mandrekar, “The validity of Beurling theorems in polydiscs,” *Proc. Amer. Math.* Soc., 103, 145–148, 1988.
[8] Y, Qin, R. Yang, “A characterization of submodules via Beurling-Lax-Halmos theorem,” *Proc. Amer. Math. Soc*, 142, 3505–3510, 2014.
[9] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant subspace*s, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
[10] J. Radlow, “Ideals of square summable power series in several variables,” *Proc. Amer. Math. Soc*., 38(2), 293–297, 1973.
[11] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, W. A. Benjamin, Inc., New York- Amsterdam, 1969.
[12] N.M. Sadikov, “Invariant subspaces in the Hardy space on a polydisk that are generated by inner functions,” *Akad. Nauk Azerbaidzhan. SSR Dokl*., 39 (3), 8–11, 1983 (Russian).
[13] J. Sarkar, “Submodules of the Hardy module over polydisc,” *Israel Journal of Mathematics.* 205, 317–336, 2015.
[14] J. Sarkar, A. Sasane and B. Wick, “Doubly commuting submodules of the Hardy module over polydiscs,” *Studia Mathematica*, 217(2), 179–192, 2013.
[15] M. Seto and R. Yang, “Inner sequence based invariant subspaces in $\mathrm{H}^2(\mathrm{D}^2)$,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135, 2519–2526, 2007.
[16] R. Yang, “Beurling’s phenomenon in two variables,” *Integr. Equ. Oper. Theory*, 48, 411–423, 2004.
[17] Y. Yang, “Two inner sequences based invariant subspaces in $\mathrm{H}^2(\mathrm{D}^2)$,” *Integr. Equ. Oper. Theory*., 77, 279–290, 2013.