

Kafes Kiriş Sistemlerde Aralık Değerlerle Sonlu Elemanlar Analizi

Ayşe ERDÖLEN*

ÖZ

Bu çalışmada, kafes kiriş sistemlerindeki olası fabrikasyon hatalarından ve/veya sıcaklık değişimlerinden oluşabilecek geometrik belirsizlikler üzerinde durulmuştur. Sistem bileşenlerinin tasarım boyutlarından sapmaları (uygun gelmeme- missfitting) aralık değerler (interval) olarak tanımlanmıştır. Bu tür geometrik belirsizlikler, belirsiz bir eşdeğer düğüm noktası yüküne dönüştürülmüştür. Kafes kiriş sistem durumunda, İnterval Sonlu Eleman formülasyonu lineer interval denklemlerden oluşmaktadır. Sonuçlar örnek problemlerde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Geometrik belirsizlik, aralık, aralık değerler, interval analiz, interval sonlu elemanlar, fabrikasyon hataları.

ABSTRACT

Interval Finite Element Analysis of Truss Systems

In this work, geometric uncertainties due to fabrication errors and/or thermal changes in truss structures are investigated. The system components' deviations from the nominal dimensions (misfitting) are defined as intervals. Such geometric uncertainties are converted into equivalent nodal loads. In the case of truss systems the Interval Finite Element formulation leads to a linear interval system of equations. The results are illustrated in the problems given as examples.

Keywords: Geometric uncertainty, interval analysis, interval finite elements, fabrication errors.

1. GİRİŞ

Mühendislik problemlerindeki belirsizliklerin kaynaklarını genel olarak; model ve modelin içerdiği parametreler, problemin çözüm hedeflerine ulaşılması sırasında algoritma işlem satırlarından kaynaklanan sayısal hatalar ve sistemin durumuna göre inşa veya imalat aşamasında oluşacak toleranslar olarak sıralayabiliriz. Söz konusu belirsizlikler genellikle olasılık teorisi ve istatistiksel yöntemler yardımıyla göz önüne alınmakta, belirsizlikler

Not: Bu yazı

- Yayın Kurulu'na 26.02.2009 günü ulaşmıştır.
- 31 Mart 2011 gününe kadar tartışmaya açıktır.

* Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul - erdolen@yildiz.edu.tr

Kafes Kiriş Sistemlerde Aralık Değerlerle Sonlu Elemanlar Analizi

altında ortaya çıkacak başarısızlıklar (risk) ise güvenilirlik analizi yardımıyla belirlenmektedir[1]. Dolayısıyla, yüksek derecede belirsizlik gösteren (karmaşık) mühendislik problemlerinin çözümünde belirsizliklerin azaltılmasına ve değerlendirilmesine yönelik klasik yaklaşımlar, çoğunlukla daha karmaşık ve zaman-maliyet açısından ekonomik olmayan çözümlere neden olabilmektedir [1].

Mühendislik sistemleri genellikle, hedef fonksiyonları karşılayacak şekilde önceden tanımlanmış bir geometriye göre tasarlanırlar. Bununla beraber, fabrikasyon hatalarından ve/veya sıcaklık değişimlerinden dolayı, sistem bileşenlerinin boyutları imalat/tasarım aşamasında uygunsuzluk doğuracak şekilde tanımlandıkları boyutlardan saparlar.

Yapıların ve yapı yük taşıyıcı elemanlarının hizmet süresi içinde kendinden beklenen fonksiyonu gösterebilmeleri için yeterli mukavemet ve rijitliğe sahip olmaları gerekmektedir. Boyutlandırma sırasında yapılara servis yüklerini taşıyabilmeleri için gerekenin üstünde bir miktar rezerv mukavemet sağlanmalıdır. Yani, yapı ve elemanları aşırı yüklemelere karşı yeterli dayanıma sahip olmalıdırlar. Aşırı yükleme hali, bir yapının boyutlandırıldığı amaç dışında kullanılmasından, yapının dış yükler altındaki analizinde yapılan aşırı basitleştirmelerden veya inşa yöntemlerinde boyutlandırma sırasında göz önüne alınanlardan farklı sapmalardan oluşabilir. Bütün bunlara ilaveten, inşa edilen yapı elemanlarının boyutlandırmada öngörülen seviyeden daha düşük mukavemete sahip olması ihtimali de mevcuttur. Örneğin, kabul edilen toleranslar içinde kalınsa bile yapı elemanlarının boyutlandırmada göz önünde tutulan boyutlarından sapmalar, boyutlandırmada varsayılan eleman mukavemetlerinin altında bir değere sahip olmalarına sebep olurlar. Boyutlandırma hesaplarında göz önünde tutulan çelik malzeme, bulon ve kaynak mukavemetlerinde gerçekte sapmalar meydana gelebilir. Çelik profiller, minimum saptanmış olan seviyenin altında, ancak istatistik olarak kabul edilebilir limitler içinde akma sınırına sahip olabilir [2]. Bu çalışma kapsamında çelik yapı sistemlerinin olası boyut sapmaları üzerinde durulacaktır. Mühendislik uygulamalarında, bu tür sapmalar tekil elemanlar veya montaj sonrası tamamlanmış sistem için maksimum izin verilebilir tolerans sınırları içinde kalacak şekilde tanımlanır. Dolayısıyla en uygun tasarım, üzerinde çalışılan bir sistemin geometrik elemanlarının geometrilerinin tümünün tolerans sınırları içinde tanımlanmış olacak şekilde, 'toplam toleranslı' bir tasarım olmalıdır [3]. İzin verilebilir fabrikasyon tolerans değerleri hakkında daha fazla bilgi için Amerikan Ulusal Standartlar Enstitüsü (ANSI) veya Uluslararası Standartlar Düzenlemesi (ISO) gibi diğer benzer uluslararası şartnamelere bakılabilir.

Belirsizliğin temel nedenlerinden biri olan toleranslar, daha yüksek performans, daha yüksek verimlilik ve daha büyük güvenilirlik için, analiz ve tasarım aşamalarında, sonucu (ürünü) etkileyebilecek tüm muhtemel faktörler için dikkate alınmalıdır. Toleranslar, genellikle, tanımlanan değerlerden toplam sapma olarak tanımlandığından dolayı, bir analiz ve tasarımda, sınır değerleri belirli olarak verilen bir aralıktaki olası bir değer gibi bir toleransı kapsamak, bu tür belirsizlikleri tanımlamanın gerçekçi ya da doğal bir yolu olabilir. Bu çalışmada, toleranslar geometrik belirsizlik olarak, gerçek değerlerin iki sınır değer arasında tanımlandığı aralık değerler (interval) olarak tanımlanmıştır.

Kesin (belli) bir büyüklük sayısal olarak ifade edilebilen, bilinen bir değere sahiptir. Belirsiz bir değer tanımlanırken, bir tanım aralığı bu sayısal ifadenin yerini alır. Aralık değerler (interval), belirsiz bir değer olan x 'i, $1 \leq x \leq 2$ olduğu yerde, alt sınır olarak 1 ve üst sınır olarak 2 ile tanım aralığı olarak [1, 2] şeklinde ifade eder. Aralık değerlerle

işlemler sayısal uygulamalarda klasik matematiksel işlemlerle uyumlu olarak kullanılır. Algoritmanın her işlemünde bir sayının alabileceği en küçük ve en büyük değerlerini kullanma esasına dayanan *aralık (interval) analizi yöntemi*, sınırın alt ve üst değerleri olarak, anlamlı gerçek sayı dizilerinin sınır değerlere yaklaşarak sıfır hata fikrine yakınsaması olarak tanımlanabilir. Aralık değerleri, belirsizliği sayısal sınırlarla modelleyen deterministik bir yöntem olarak da tanımlayabiliriz.

İnterval sayılarını neden kullanmaya ihtiyaç duyduğumuzu somut bir örnekle açıklayalım. Kenar uzunlukları $a=10.3 \pm 0.1$ ve $b=4.4 \pm 0.2$ olan bir dikdörtgenin alanını için;

$$A_1 = (10.3-0.1) \times (4.4-0.2) = 42.84$$

$$A_2 = 10.3 \times (4.4-0.2) = 43.26$$

$$A_3 = (10.3+0.1) \times (4.4-0.2) = 43.68$$

.....

.....

$$A_9 = (10.3+0.1) \times (4.4+0.2) = 47.84$$

şeklinde 9 tane olasılık önermemiz gerekecektir. Hangisi doğru cevaptır? Hangi alanı hesaplamamızda kullanmamız gerekir? Şüphesiz ki söz konusu dikdörtgen alanı için en doğru cevap; $42.84 \leq A \leq 47.84$ sınır değerleri arasındaki bir değerdir. Bu alanın değerini aralık değerleri kullanarak, kenar uzunlukları $10.2 \leq a \leq 10.4$ ve $4.2 \leq b \leq 4.6$ olan bir dikdörtgenin alanı;

$$[10.2, 10.4] \times [4.2, 4.6] = [42.84, 47.84]$$

şeklinde ifade etmekteyiz. Maksimum duyarlılık gerektiren uygulamalarda aralık değerler gerçek değeri içeren bir çözüm aralığına olanak sağlamaktadır. Böylelikle hata kaynağına bakılmaksızın doğru sonucun içeriği garanti edilmektedir.

Aralık analizin ilk somut uygulamaları yirmili yıllara kadar uzanmaktadır [4, 5, 6]. Günümüz uygulamalarına en büyük katkıyı kuşkusuz Ramon E. Moore yapmıştır [7, 8]. Daha fazla referans/kaynak için interval analize dayalı dokümanlarda da yer alan ilgili başlıklara bakılabilir [9, 10, 11, 12, 13, 14].

Bu çalışmada sayısal çözümleme yöntemi olarak sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. İnterval Sonlu Eleman Metodları özellikle son on beş yıl içerisinde yapı sistemlerinin çözümlenmesinde oldukça çeşitlilik kazandırılarak kullanılmıştır. Çeşitli belirsizliklerin çalışıldığı çalışmalara örnek olarak; [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] no' lu kaynaklara bakılabilir. Adı geçen bu çalışmalarda yük, rijitlik, ve kesit alanları için belirsizlik tanımlamaları yapılmıştır. Bununla beraber, bileşenlerin uzunluğundaki belirsizlik çalışılmamıştır. Bu çalışmada, elastik kafes giriş sistemlere yapılan bir uygulama ile sistem bileşenlerindeki fabrikasyon hataları ve/veya sıcaklık değişiminden meydana gelen geometrik belirsizlikler için yeni bir formülasyon geliştirilmiştir.

Çalışmanın 2. bölümünde aralık analizinde kullandığımız aralık sayılarının ve operatörlerin tanımları yapılarak hesap esaslarına kısaca değinilecektir. 3. bölümde geometrik belirsizlikler için geliştirilen formülasyon gösterilecektir. Örnek hesaplamalar ve sonuçları 4. bölümde verilmiştir. 5. bölümde sonuçlar kısmı yer almaktadır.

2. ARALIK DEĞERLER

Çalışmanın tümünde, kalın karakter olarak yazılanlar, aralık değerlerin sayı, vektör ve matris şeklinde gösterimidir. Normal karakter olarak yazılanlar gerçek (kesin) miktarları belirtmektedir.

\mathbf{R} gerçel sayılar kümesi olmak üzere bir aralık değerler kümesi

$$\mathbf{x} \equiv [a, b] = \{\tilde{x} \in \mathbf{R} \mid a \leq \tilde{x} \leq b\} \quad (1)$$

olarak tanımlanabilir. Bu bağıntıda; a ve b \mathbf{R} gerçel kümesinin elemanları olup her koşulda $a \leq b$ şartı sağlanmalıdır. Aralık değerler, \mathbf{R} gerçel kümesinin alt sınır a ve üst sınır b olmak üzere bir alt kümesini oluşturmaktadır. Bundan sonra aralıkların ait olduğu sayılar kümesi \mathbf{IR} olarak sembolize edilecektir. “ $\tilde{}$ ” sembolü aralık değerler kümesinde yer alan sayıların her birinin gösterimi için kullanılacaktır ($\tilde{x} \in \mathbf{x}$). Eğer bir aralığın alt ve üst sınırları birbirine eşit ise $a=b$ böyle aralıklar ince aralıklardır ve tek bir gerçel sayıyı ifade eder. Böyle bir aralık değeri $\mathbf{x} = [a, a]$ şeklinde gösterilir.

2.1 Aralık değerler işlem operatörleri

Matematikte kullanılan; toplama, çıkarma, çarpma ve bölme $\circ \in \{+, -, \times, /\}$ işlem operatörlerinin tümü aralık değerler analizinde kullanılmaktadır. $\mathbf{x} = [a, b]$ ve $\mathbf{y} = [c, d]$ iki aralık değeri, \tilde{x} ve \tilde{y} söz konusu aralıklarda ki herhangi iki değer olmak üzere;

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \{\tilde{x} \circ \tilde{y} \mid a \leq \tilde{x} \leq b, c \leq \tilde{y} \leq d\} \quad (2)$$

tanımı geçerlidir. \mathbf{y} aralık değerinin sınır değerlerinden birinin 0 olması durumunda \mathbf{x} / \mathbf{y} eşitliğinin gerçekleşmeyeceği açıktır.

Aralık sınırlarını dikkate alınarak temel işlemler olan toplama, çıkarma, çarpma ve bölme için şu kurallar yazılabilir;

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \quad (3)$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \quad (4)$$

Çarpma ve bölme için sonuçlar aralık sınırlarının işaretlerine bağlıdır. $x = [a, b]$ ve $y = [c, d]$ iki aralık değer olmak üzere x ve y aralık değerlerinin çarpımı için $(x \times y)$;

$$[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \quad (5)$$

x ve y aralıklarının bölümü için (x/y) ;

$$[a, b] / [c, d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)] \quad 0 \notin y \quad (6)$$

kuralları yazılabilir.

Aralık değerlerle ilgili temel matematiksel işlemlere uygulama olması açısından örneklemeler aşağıda verilmiştir.

$$[0, 2] + [2, 3] = [2, 5]$$

$$[-3, -2] + [1, 2] = [-2, 0]$$

$$-2 + [1, 2] = [-1, 0]$$

$$[0, 3] - [1, 2] = [-2, 2]$$

$$3 - [-2, -1] = [4, 5]$$

$$[2, 3] - [2, 3] = [-1, 1]$$

$$[-4, -2][-2, -1] = [2, 8]$$

$$[1, 2][1, 2] = [1, 4]$$

$$2[-1, 2] = [-2, 4]$$

$$[-2.1, -1.1][-2.1, -1.1] = [1.21, 4.41]$$

$$[-1, 1] / [-3, -2] = [-0.5, 0.5]$$

$$[-3, -2] / [-3, -2/3] = [0.667, 4.5]$$

Aralık değerlerle ilgili değişme, birleşme gibi işlemsel özelliklerin toplama, çıkarma, bölme ve de çarpma üzerine uygulamaları, 1 ve 0 sayılarının etkileri aşağıda örneklendiği şekilde kullanılmaktadır (x, y, z iki sınır değer arasında tanımlanmış aralık değerlerdir);

$$x+y = y+x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$(x+y) \pm z = x + (y \pm z)$$

$$(x \cdot y)z = x (y \cdot z)$$

$$x - (y \pm z) = (x - y) \pm z$$

$$(-x)(-y) = x \cdot y$$

$$x(y \pm z) \subseteq xy \pm xz$$

$$x - y \subseteq (x+z) - (y+z)$$

$$x/y \subseteq (xz)/(yz)$$

Kafes Kiriş Sistemlerde Aralık Değerlerle Sonlu Elemanlar Analizi

$$\begin{aligned} 0 \in \mathbf{x} - \mathbf{x} & & 1 \in \mathbf{x} / \mathbf{x} \\ -(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x} & & \mathbf{x}(-\mathbf{y}) = (-\mathbf{x})\mathbf{y} = -\mathbf{x}\mathbf{y} \\ \mathbf{x} + 0 = 0 + \mathbf{x} = \mathbf{x} & & 1 \times \mathbf{x} = \mathbf{x} \times 1 = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Aralık değerlerden oluşan $m \times n$ boyutundaki bir matrisi

$$A = (A_{ik}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \quad A_{ik} \in \mathbf{IR}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada tüm satır ve sütun değerleri aralık sayılarından oluşmaktadır. $\mathbf{IR}^{m \times n}$; $m \times n$ aralık değerler matrisinin geçerli olduğu alanı göstermek üzere, A matrisini genel bir ifade ile;

$$A = \left\{ \tilde{A} \in \mathbf{R}^{m \times n} \mid \tilde{A}_{ik} \in A_{ik} \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n \right\} \quad (7)$$

olarak tanımlayabiliriz. $A, B, C \in \mathbf{IR}^{m \times n}$ olmak üzere aralık değerler matrisi işlem özellikleri;

$$(A \pm B)_{ik} = A_{ik} \pm B_{ik} \quad ,$$

$$A + B = B + A \quad ,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad ,$$

$$A \pm B = \left\{ \tilde{A} \pm \tilde{B} \mid \tilde{A} \in A, \tilde{B} \in B \right\}$$

şeklinde özetlenebilir.

3. FORMÜLASYON

Kafes sistemler; doğru eksenli çubukların, mafsallar aracılığı ile birbirlerine bağlandığı ve yüklerin sadece düğüm noktası adı verilen mafsal noktalarına etkidiği kabul edilen çok çubuklu taşıyıcı sistemlerdir. Dolayısıyla, her bir doğrusal çubuk sadece eksenel basınç ya da çekme kuvvetinin etkisi altındadır.

Yapım kusurları ve/veya sıcaklık değişiminden dolayı söz konusu çelik çubuklar düzensiz uzunluklu (uygun olmayan) olabilirler. Artı/eksi toleransla tasarlanan değere eşit gelişigüzel bir değerde olan kafes giriş çubuklarının uzunlukları iki sınır değer arasındaki tüm değerleri alabilir ve L_o çubuğun tasarım boyu ve δL verilen tolerans değeri olmak üzere çubuk uzunluğu $L_o - \delta L$ alt sınır ve $L_o + \delta L$ üst sınır arasında tanımlanabilir. Bu

çalışmada geometrik belirsizlik olarak düşünülen çubuk tasarım boyu “ L ”, \underline{L} alt sınır \bar{L} üst sınır olmak üzere iki sınır değer arasında tanımlanan L aralık (interval) değerler olarak tanımlanmıştır.

$$L \in \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} \equiv [\underline{L}, \bar{L}] := \{L \in R \mid \underline{L} \leq L \leq \bar{L}\} \quad (8)$$

$$L = [L_o - \delta L, L_o + \delta L] \quad (9)$$

Yapının montajı sırasında fabrikasyon hataları sebebiyle düzensiz uzunlukta kesilen çelik çubuklar, büzülme veya ön genleşme uygulanarak iki düğüm noktası arasındaki konumuna zorlanır. Böyle bir koşul altında, dış yüklerin olmadığı durumda, çubuk içinde basınç veya çekme gerilmeleri oluşur, dolayısıyla çubuk serbest bırakıldığında, düğüm noktalarına eşit ve zıt basınç/çekme kuvvetleri uygulanır. Tüm çubuklarda etkili olan söz konusu basınç/çekme eksenel kuvvetleri sonlu elemanlar bağlantılarında kullanılmak üzere yük vektörünün elemanlarını oluşturmuş olurlar. Böylelikle, çubuk uzunluklarındaki geometrik belirsizlikler eşdeğer yük belirsizliklerine dönüştürülmüştür. Bir çubuk elemanı için eksenel kuvvet aralık değeri olarak,

$$F = EA \frac{\delta L}{L_o} \quad (10a)$$

bağıntısıyla tanımlanmaktadır. Bu bağıntıda, E elastisite modülü, A çubuğun kesit alanıdır.

δL çubuğun tasarım boyundan sapma olarak tanımlanan aralık bir değerdir ve

$$\delta L = [-\delta L, +\delta L] = [\underline{\delta L}, \bar{\delta L}] \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

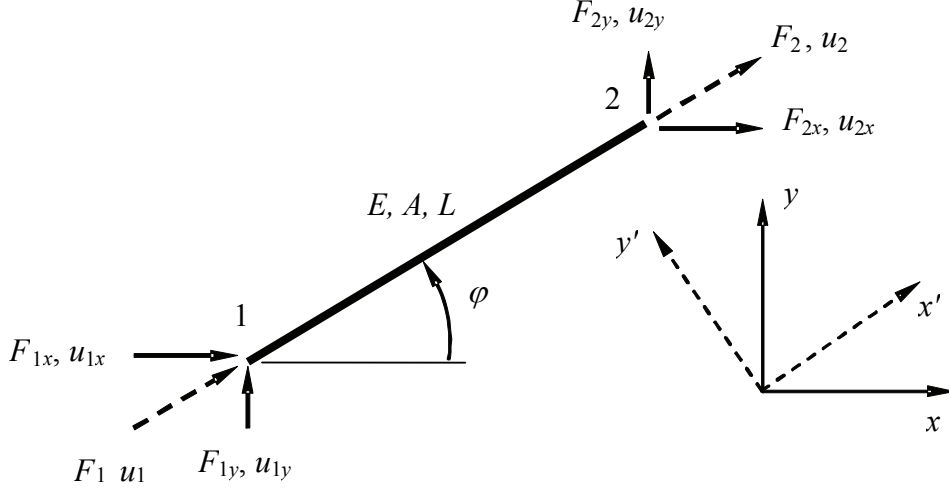
Sıcaklık değişiminin interval ifadesi $\delta T = [-\delta T, +\delta T] = [\underline{\delta T}, \bar{\delta T}]$, α ısı genleşme katsayısı olmak üzere bir çubuk elemanı için eksenel interval kuvvet bağıntısı;

$$F = EA\alpha\delta T \quad (10b)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Fabrikasyon hataları ile sıcaklık değişiminin aynı anda etkidiğinin düşünülmesi durumunda eşdeğer kuvvetlerin (10a ve 10b) toplamı kullanılmalıdır. Yukarıda bahsedilen izlekin (prosedürün) nasıl uygulanacağını göstermek için, Şekil 1’de gösterilen bir kafes giriş sistem çubuk elemanı göz önüne alalım.

Fabrikasyon hatası veya sıcaklık değişiminden dolayı bir çubuktaki eşdeğer basınç ya da çekme kuvvetlerinin bileşenleri aşağıdaki interval değerlerden oluşan \mathbf{P}_o vektörü ile düğüm noktası kuvvetleri olarak ifade edilmiştir [29, 30, 31]:

$$\mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{pmatrix} = EA \frac{\delta L}{L_o} \begin{pmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{pmatrix} \quad (11)$$



Şekil 1. Kafes Kiriş Çubuk Elamanı İçin Lokal (x', y') ve Global (x, y) Koordinat Sistemi

(11) bağıntısında $c = \cos\phi$ ve $s = \sin\phi$ olarak ifade edilmiştir. Dış yük etki etmemesi durumunda, tüm sistem için interval sonlu elemanlar genel bağıntısı;

$$KU = MF \quad (12)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu bağıntıda K , global koordinat sisteminde “ m ” sayıda elemandan oluşan tüm sistemin rijitlik matrisi olmak üzere;

$$K = \sum_{e=1}^m k_e \quad (13)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Global koordinat sisteminde e . çubuk elemanın rijitlik matrisi k_e ;

$$k_e = \frac{A_e E_e}{l_e} \begin{bmatrix} c_e^2 & c_e s_e & -c_e^2 & -c_e s_e \\ c_e s_e & s_e^2 & -c_e s_e & -s_e^2 \\ -c_e^2 & -c_e s_e & c_e^2 & c_e s_e \\ -c_e s_e & -s_e^2 & c_e s_e & s_e^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

olarak tüm sistemin rijitlik matrisinde işlemlere katılmaktadır. (12) Bağıntısında U , global koordinat sisteminde “ n ” tüm kafes sistemin düğüm noktası sayısı olmak üzere;

$$U = \{U_1 U_2 U_3 \dots U_n\}^T \quad (15)$$

aralık değerlerden oluşan bir vektör olarak elde edilir. Global koordinat sisteminde e . çubuk elemanın 1 ve 2 noktalarında ki interval yer değiştirme vektörü U_e ;

$$U_e = \{u_1 v_1 u_2 v_2\}^T \quad (16)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. M ; sistemin serbestlik derecelerini gösteren matristir [32]. (12) Bağıntısı yardımıyla kafes kiriş sisteminin her bir düğüm noktasında ki yer değiştirmeler hesaplanarak tüm sistemin şekil değiştirmiş geometrisi elde edilir. Çalışmada sayısal çözümlene yöntemi olarak kullanılan sonlu elemanlar yöntemi Matlab programlama ortamında kullanılmıştır. Matematiksel işlemler için Matlab ortamına aralık değerlerle ilgili özel araç kutuları eklenerek reel sayılarla birlikte ifade edilebilmesi sağlanmıştır.

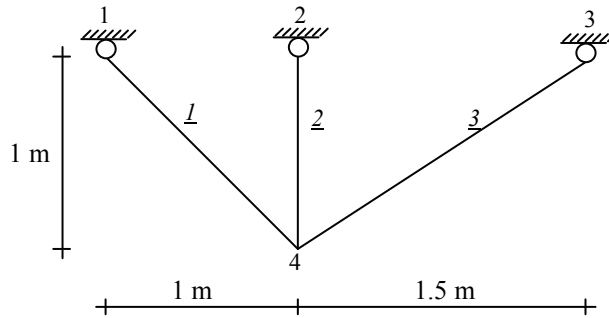
Tüm sisteme ait U düğüm noktası yer değiştirmeleri biliniyorken her bir çubuk elemana ait iç kuvvetler,

$$S_e = K_e B_e U_e \quad (17)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Bu bağıntıda S_e ve K_e sırasıyla kafes sistemin e . çubuk elemanının interval iç kuvveti ve rijitlik matrisini ifade etmektedir. B_e ise 1 ve 0 dan oluşan Boolean matrisidir.

4. ÖRNEKLER

Şekil 2 ve Şekil 3'de verilen, sırasıyla üç elemanlı bir kafes sistemin ve üç açıklıklı (16 elemanlı) bir kafes kirişin sayısal çözümü gösterilmiştir. Her iki örnekte de bütün çubuk elemanları için elastisite modülü $E=200 \text{ GPa}$, kesit alanları $A=0.01 \text{ m}^2$, fabrikasyon hatası



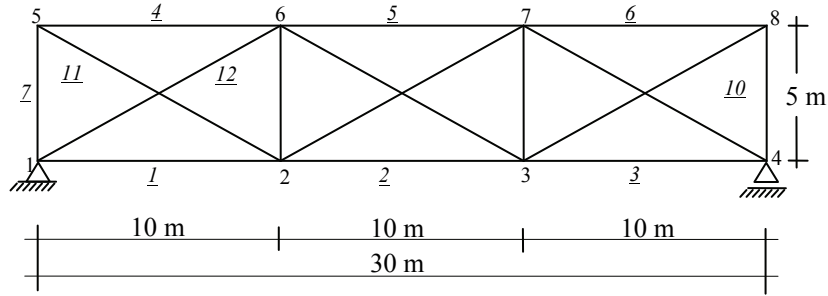
Şekil 2. Üç Elemanlı Kafes Sistem

Kafes Kiriş Sistemlerde Aralık Değerlerle Sonlu Elemanlar Analizi

sistemin tüm çubuklarda $\delta L = [-0.001, 0.001]$ olarak dikkate alınmıştır. Tüm düğüm noktaları yer değiştirmelerinin değerleri alt ve üst sınırlar halinde aralık değerler olarak Tablo 1 ve Tablo 2’de verilmiştir. Tablo 3’ ve Tablo 4’ de sırasıyla 16 elemanlı kafes sisteme ait, çubukların tasarım boyundan sapma olarak tanımlanan $\delta L = [-0.001, 0.001]$ aralık değerine karşılık gelen çubuk iç kuvvetleri ve düğüm noktası kuvvetleri hesaplanarak verilmiştir. Bulunan düğüm noktası kuvvetleri kafes sisteme uygulanarak tüm düğüm noktalarında ki yer değiştirmeler tekrar hesaplanmış ve Tablo 5’ de sunulmuştur.

Tablo 1. Üç Elemanlı Kafes Sistemin Düğüm Noktalarının Yatay ve Düşey Yer değiştirmeleri

Düğüm Noktası	U_x (m)	U_y (m)
1	[0,0]	[0,0]
2	[0,0]	[0,0]
3	[0,0]	[0,0]
4	[-0.0013854,0.0013854]	[-0.0011927,0.0011927]



Şekil 3. Üç Açıklıklı Kafes Kiriş

Tablo 2. Üç Açıklıklı (16 Elemanlı) Kafes Kirişin Düğüm Noktalarının Yatay ve Düşey Yer değiştirmeleri

Düğüm Noktası	U_x (m)	U_y (m)
1	[0, 0]	[0, 0]
2	[-0.0009, 0.0009]	[0, 0]
3	[-0.0017, 0.0017]	[0, 0]
4	[-0.0026, 0.0026]	[0, 0]
5	[0, 0]	[-0.0010, 0.0010]
6	[-0.0009, 0.0009]	[-0.0009, 0.0009]
7	[-0.0017, 0.0017]	[-0.0009, 0.0009]
8	[-0.0026, 0.0026]	[-0.0010, 0.0010]

Tablo 3. Üç Açıklıklı (16 Elemanlı) Kafes Kiriş Çubuk İç Kuvvetleri

<i>Eleman No</i>	<i>S(N)</i>	<i>Eleman No</i>	<i>S(N)</i>
1	[170429.82, 170429.82]	2	[171181.08, 171181.08]
3	[170429.82, 170429.82]	4	[170429.82, 170429.82]
5	[171181.08, 171181.08]	6	[170429.82, 170429.82]
7	[385214.91, 385214.91]	8	[370805.45, 370805.45]
9	[370805.45, 370805.45]	10	[385214.91, 385214.91]
11	[211945.89, 211945.89]	12	[211945.89, 211945.89]
13	[211105.96, 211105.96]	14	[211105.96, 211105.96]
15	[211945.89, 211945.89]	16	[211945.89, 211945.89]

Tablo 4. Üç Açıklıklı (16 Elemanlı) Kafes Kiriş Dügüm Noktası Kuvvetleri

<i>Dügüm Noktası</i>	<i>F_x (N)</i>	<i>F_y (N)</i>
1	[0, 0]	[0, 0]
2	[0, 0]	[-560000, -560000]
3	[0, 0]	[-560000, -560000]
4	[360000, 360000]	[0, 0]
5	[-360000, -360000]	[480000, 480000]
6	[0, 0]	[560000, 560000]
7	[0, 0]	[560000, 560000]
8	[360000, 360000]	[480000, 480000]

Tablo 5. Üç Açıklıklı (16 Elemanlı) Kafes Kiriş Dügüm Noktası Kuvvetlerine Göre Dügüm Noktalarının Yatay ve Düşey Yer değıştirmeleri

<i>Dügüm Noktası</i>	<i>U_x (m)</i>	<i>U_y (m)</i>
1	[0, 0]	[0, 0]
2	[0.000852, 0.000852]	[1.80x10 ⁻⁵ , 1.80x10 ⁻⁵]
3	[0.00170, 0.00170]	[1.80x10 ⁻⁵ , 1.80x10 ⁻⁵]
4	[0.00256, 0.00256]	[0, 0]
5	[-1.87x10 ⁻¹⁷ , 5.81x10 ⁻¹⁸]	[0.000963, 0.000963]
6	[0.00085, 0.00085]	[0.0009, 0.0009]
7	[0.00170, 0.00170]	[0.0009, 0.0009]
8	[0.00256, 0.00256]	[0.000963, 0.000963]

5. SONUÇLAR

Çalışmada, boyutsal toleranslar formuyla verilen geometrik belirsizliğe sahip kafes kiriş sistemlerin çözümü için aralık (interval) değerler kullanılarak yeni bir yaklaşım sunulmuştur. Bu yaklaşım, sonlu elemanlar metodu kapsamında aralık (interval) değerlerin kullanılmasına dayanır. Geometrik belirsizlikler eşdeğer belirsiz yüklere dönüştürülerek probleme dahil edilmiştir. Maksimum duyarlılık gerektiren uygulamalarda aralık değerler gerçek değeri içeren bir çözüm aralığına olanak sağlayarak, belirsizlik kaynağına bakılmaksızın doğru sonucun içeriği garanti edilmektedir.

Semboller:

L	: Çubuk tasarım boyu
F	: Eksenel çubuk kuvveti
E	: Elastisite modülü
A	: Çubuk kesit alanı
δL	: Çubuk tasarım boyundan sapma
α	: Isı genleşme katsayısı
δT	: Sıcaklık değişimi
P_o	: Düğüm noktası kuvvetleri interval vektörü
K	: Sistem rijitlik matrisi
U	: Düğüm noktaları yer değiştirme interval vektörü
M	: Sistemin serbestlik derecelerini gösteren matris
B_i	: Boolean matrisi

Teşekkür

Sayın Prof. Dr. Rafi Muhanna ve Sayın Dr. Ersun Yalçın'a çalışmalarına katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Kaynaklar

- [1] Koç, M. L., Balas, C. E., ve Arslan, A., Taş Dolgu Dalgakıranların Yapay Sinir Ağları ile Ön Tasarımı, İMO Teknik Dergi, 3351-3375, 2004.
- [2] Deren, H., Uzgider, E., Piroğlu, F., Çağlayan, Ö., Çelik Yapılar, İstanbul, 2008.
- [3] Henzold, Georg, Handbook of Geometrical Tolerancing, Design, Manufacturing and Inspection. John Wiley & Sons Ltd., England, 1995.

- [4] Burkil, J. C., Functions of Intervals, Proceedings of the London Mathematical Society, 22, 375-446, 1924.
- [5] Young, R. C., The Algebra of Many-Valued Quantities, Mathematische Annalen, 104, 260-290, 1931.
- [6] Sunaga, T., Theory of an Interval Algebra and its Application to Numerical Analysis, in RAAG Memoirs, Gaukutsu Bunkwen Fukeyu-kai, Tokyo, 29-46, 1958.
- [7] Moore, R. E., Interval Analysis, Prentice Hall, New Jersey, 1966.
- [8] Moore, R. E., Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [9] Hansen, E., Topics in Interval Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1968.
- [10] Nickel, K., Interval Mathematics, Springer, New York, 1975.
- [11] Nickel, K., Interval Mathematics, Proceedings of an International Symposium on Interval Mathematics, Academic Press, New York, 1980.
- [12] Nickel, K., Interval Mathematics, Proceedings of an International Symposium, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [13] Kearfott, R. B., Applications of Interval Computations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1996.
- [14] Garloff, J., Interval Mathematics: A Bibliography, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Freiburg, Germany, 1985.
- [15] Koyluoglu, U., Cakmak, S., Ahmet, N., and Soren R. K., Interval Algebra to Deal with Pattern Loading and Structural Uncertainty, Journal of Engineering Mechanics, November, 1149-1157, 1995.
- [16] Rao, S. S., Sawyer, P., Fuzzy Finite Element Approach for Analysis of Imprecisely Defined Systems, AIAA Journal, Vol. 33, No. 12, pp 2364-2370, 1995.
- [17] Rao, S. S., Berke, L., Analysis of Uncertain Structural Systems Using Interval Analysis, AIAA Journal, Vol. 35, No. 4, pp 727-735, 1997.
- [18] Rao, S. S., LI Chen, Numerical Solution of Fuzzy Linear Equations In Engineering Analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 43, pp 391-408, 1998.
- [19] Nakagiri, S. and Suzuki, K., Finite Element Interval analysis of external loads identified by displacement input uncertainty, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 168, pp. 63-72, 1999.
- [20] Muhanna, R. L. and Mullen, R. L., Development of Interval Based Methods for Fuzziness in Continuum Mechanics, Proc., ISUMA-NAFIPS'95, September 17-20, 145-150, 1995.
- [21] Mullen, R. L. and Muhanna, R. L., Structural Analysis with Fuzzy-Based Load Uncertainty, Proc, 7th ASCE EMD/STD Joint Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, WPI, MA, August 7-9, 310-313, 1996.

- [22] Muhanna, R. L. and Mullen, R. L., Formulation of Fuzzy Finite Element Methods for Mechanics Problems, Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering (Previously Microcomputers in Civil Engineering), Vol.14, pp 107-117, 1999.
- [23] Mullen, R. L. and Muhanna, R. L., Bounds of Structural Response for All Possible Loadings, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 125, No. 1, pp 98-106, 1999.
- [24] Garcia, O., Vehi, J. ve Rodellar, J., Interval Finite Element Method Applied to Modelling of Structures, AMAS Workshop on Smart Materials and Structures, pp 15-23, 2003.
- [25] Dessomz, O., Thouverez, F., Laine, J.-P., Jezequel, L., Analysis of Mechanical Systems Using Interval Computations Applied to Finite Element Methods, Journal of Sound and Vibration, 239(5), pp 949-968, 2001.
- [26] Corliss, G., C. Foley, and R.~B. Kearfott., “Formulation for Reliable Analysis of Structural Frames”, In R. L. Muhanna and R. L. Mullen, editors, Proceedings of NSF workshop on Reliable Engineering Computing}, Savannah, Georgia, September, USA, 2004.
- [27] Neumaier, A., A. Pownuk., Linear Systems with Large Uncertainties, with Applications to Truss Structures, 2006. <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/ms/linunc.pdf>
- [28] Muhanna, R.L., R.L. Mullen, Z. Hao, Penalty-Based Solution for the Interval Finite-Element Methods, Journal of Engineering Mechanics, 1102-1111, 2005.
- [29] Bathe, K., Finite Element Procedures, Printice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, New Jersey, 1996.
- [30] Gallagher, R., H., Finite Element Analysis Fundamentals, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Germany, 1975.
- [31] Zienkiewicz, O., C., and Taylor, R., L., Finite Element Method, London, 2000.
- [32] Mullen, R. L., Muhanna, R. L., Bounds of Structural Response for All Possible Loadings, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 125, No. 1, pp 98-106, 1999.
- [33] Neumaier, A., Interval Methods for Systems of Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [34] Hansen, E., Topics in Interval Analysis, Clarendon Pres, Oxford, 1969.
- [35] Schwartz, D., I., Deterministic Interval Uncertainty Methods for Structural Analysis, by UMI Company, 1999.