

Elektronik Tablolar ile Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Günay ÖZMEN*

ÖZ

Bilimsel ve teknik problemlerin pek çoğunda karşılaşılan "Kısmi Diferansiyel Denklemler" in "Sonlu Farklar" kullanılarak çözümünde çoğu kez ardışık yaklaşım yöntemleri uygulanmaktadır. Bu çalışmada, bu ardışık yaklaşım düzenlerinin Elektronik Tablolara nasıl aktarılabileceği gösterilmiş ve Poisson denklemi ile ilgili sayısal örnekler verilmiştir. Elektronik Tablo yazılımlarının döngüsel başvuru ve yeniden hesaplama olanaklarından yararlanarak geliştirilen "Tek Tablolu" hesap düzeni, ardışık yaklaşım uygulamalarının çok daha pratik olarak yapılmasını sağlamaktadır.

ABSTRACT

Partial Differential Equation Solutions

"Partial Differential Equations" which are encountered in many scientific and technical problems, are solved by applying "Finite Difference" and "Successive Approximation" techniques, in many cases. In this paper, Spreadsheet application of successive approximation techniques is explained and numerical examples for Poisson's equation are carried out. The "Single-Table" procedure, which is developed by utilising circular reference and recalculation features of Spreadsheet software, facilitates more practical application of successive approximation techniques.

1. GİRİŞ

Günümüzde, *Elektronik Tablo* (Spreadsheet) yazılımları, bilgisayar kullanımının en önemli öğelerinden biri haline gelmiştir. Özellikle kişisel bilgisayar kullanıcıları için en popüler olan programların Elektronik Tablo yazılımları olduğu söylenebilir. Bu yazılımlar *Genel Amaçlı* oldukları için, *Ekonomik Analizler*'den *Matris Hesapları*'na yayılan geniş bir yelpazede kullanım olanağı sağlamaktadırlar ve bu sayede, tüm çalışanlar için, gün geçtikçe vazgeçilmez bir yardımcı haline gelmektedirler. Böylece, kişisel bilgisayar kullanıcıları, geniş bir programlama bilgisine gerek duymadan, bilgisayarı etkin bir biçimde kullanabilmekte ve bazen profesyonel programcılara taş çıkartan sonuçlar elde edebilmektedirler.

Not: Bu yazı

- Yayın Kurulu'na 11.07.2002 günü ulaşmıştır.
- 30 Eylül 2004 gününe kadar tartışmaya açıktır.

* İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İstanbul – gunayozmen@hotmail.com

Elektronik Tablolar ile Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bilindiği gibi, gerek mühendislikte gerekse bilimsel araştırmalarda, trigonometrik veya üstel fonksiyonlar içeren çözümlerden matris yöntemlerine kadar pek çok uygulamada, sayısal sonuçlar tablo biçiminde hesap düzenleri ile elde edilmektedir. Bu nedenle, bu tür uygulamaların hemen tümünde Elektronik Tablolar başarı ile kullanılabilir. Bilimsel ve teknik uygulamalarda, özellikle lineer olmayan pek çok problemin çözümü, ardışık yaklaşım yöntemleri ile elde edilmektedir. Çeşitli yayınlarımızdaki örnekler arasında da, *Ardışık Yaklaşım* uygulamalarına yer verilmiş bulunmaktadır, [1], [2], [3], [4]. Özellikle [4] No.lu çalışmada Ardışık Yaklaşım uygulamalarının Elektronik Tablolar yardımı ile nasıl yapıldığı açıklanmış ve geliştirilen *Tek Tablolu* hesap düzeninin bazı örneklerle uygulama biçimi gösterilmiştir. Bu çalışmanın amacı, Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklar kullanılarak çözümünde uygulanan Ardışık Yaklaşım hesap düzeninin Elektronik Tablolar üzerinde nasıl gerçekleştirildiğini açıklamaktır. Benzer uygulamalar, ardışık yaklaşım gerektiren başka mühendislik problemleri için de kolaylıkla yapılabilir. Günümüzdeki Elektronik Tablo uygulamalarında, hemen sadece *Excel* kullanıldığı için, aşağıdaki açıklamalarda bu yazılımın özellikleri ile ilgili bilgiler verilecektir.

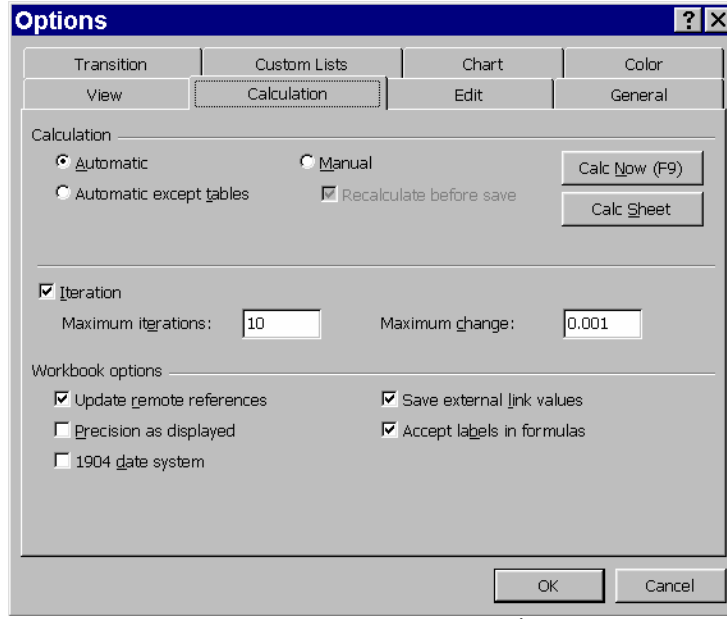
2. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bilindiği gibi, *Akışkanlar Mekaniği*'nden *Termoelastisite*'ye, *Plak ve Kabuklar Teorisi*'nden *Burulma Problemleri*'ne kadar pek çok mühendislik alanında Kısmi Diferansiyel Denklemlerle karşılaşmaktadır. Bu denklemlerin çözümünde çoğu kez Sonlu Farklar idealleştirilmesi kullanılmaktadır, [5], [6]. Özellikle günümüz bilgisayar olanakları göz önünde tutulursa, Sonlu Farklar uygulaması sonunda elde edilen lineer denklem takımının çözümü kolayca gerçekleştirilen basit bir adım olarak ortaya çıkar. Bu tür problemlerin çözümünde karşılaşılan en zaman alıcı faktör ise, özellikle karmaşık biçimli ortamlar için, ilgili denklem takımının kurulmasıdır. Elektronik Tablo uygulamalarında ve özellikle *Tek Tablolu* uygulamada ise, denklem takımının kurulması ve çözülmesi tek bir tablo üzerinde yapılabilir, [4]. Bunun için, Elektronik Tablonun sınırlarına sınır koşulları, diğer hücrelerine de ilgili sonlu farklar operatörüne karşı gelen formüllerin yazılması ve istenen sayıda *Yeniden Hesaplama* (Recalculation) yapılması yeterlidir. Böylece, karmaşık biçimli ortamlar için bile, denklem takımı ekran üzerinde ve görsel olarak kurulup çözülebilmektedir. Bu tür uygulamanın ilginç bir yönü de, lineer olmayan problemlerin de hemen hemen aynı kolaylıkla çözülebilmesidir.

3. SONLU FARKLAR DENKLEMLERİNİN TEK TABLOLU UYGULAMA İLE ÇÖZÜMÜ

Elektronik Tabloların *Döngüsel Başvuru* (Circular Reference) ve *Yeniden Hesaplama* (Recalculation) özelliklerinden yararlanarak, Sonlu Farklar denklemlerinin kurulmasını ve çözümünü tek bir tabloda gerçekleştirmek mümkün olmaktadır. Bunun için önce, Elektronik Tablonun hücrelerine ilgili Sonlu Farklar formülleri ve sınırlarına da sınır koşulları yazılır. Bu durumda, sınırların dışında kalan tüm hücreler birbirine bağımlı formüller içerirler. Böyle bir durum olduğu zaman, *Excel* ekranında bir uyarı belirir ve kullanıcıya bazı seçenekler sunulur. BU durumda kullanıcının *Tools* menüsünden *Options* komutunu seçtikten sonra *Calculation* seçeneğini tıklaması ve ekrana gelen *Options* ileti kutusundaki *Iteration* kutusunu seçili duruma getirmesi gerekmektedir, Şekil 1.

Ardışık yaklaşımı bir adım daha sürdürmek için klavyedeki [F9] (Recalculation) tuşuna bir kez basmak yeterlidir. Bu tuşa ardışık olarak basılıp hesaplar istenildiği kadar yinelenir. Ayrıca, *Options* ileti kutusundaki *Maximum Iterations* yazı kutucuğuna bir rakam yazılarak da ardışık yaklaşım sayısı saptanabilir. Bu durumda, örneğin bu sayı 10 olarak seçilirse, [F9] tuşuna her basışta hesaplar 10 kez yinelenir, yani ardışık yaklaşımın 10 adımı gerçekleştirilmiş olur.



Şekil 1: Ardışık Yaklaşım Düzenleme İleti Kutusu

Genel olarak, dögüsel başvuru uygulamaları Elektronik Tabloların doğal hesap düzenine aykırıdır ve ekranda uyarı görünmesinin başlıca nedeni de, kullanıcın gereken önlemleri almak üzere uyarılmasıdır. Bu nedenle, bu tür uygulamalarda çok dikkatli davranmak ve olası hatalara karşı önlem almak gereklidir. Çeşitli örnekler üzerinde yapılan incelemeler, *Dögüsel Başvuru* uygulamalarında, formüller arasındaki bağımlılıkların, ele alınan problemin türüne göre, *Zayıf* ya da *Kuvvetli* olduğunu göstermiştir, [4]. Homojen denklemlerde bu bağımlılık kuvvetli türdendir ve tehlikeli gibi görünmektedir. Ancak bu durumda bile, uygulamalarda herhangi bir sorun ortaya çıkmaması için gerekli önlemler alınabilmektedir, [4]. Aşağıda, ardışık yaklaşım uygulamasının nasıl gerçekleştirildiği, seçilen bir örnek üzerinde açıklanacaktır.

4. POISSON DENKLEMİ

Pek çok fizik ve mühendislik probleminde karşılaşılan ve Poisson denklemi adı verilen kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1)$$

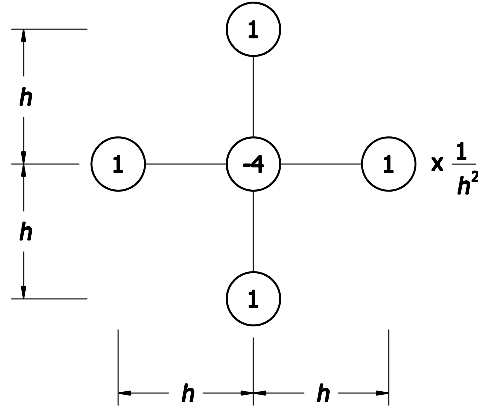
biçimindedir. Bu denklemin sonlu farklar ile çözümü için, her noktada

$$\frac{1}{h^2}(-4\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j}) = f(x, y) \quad (2)$$

sonlu farklar denklemi yazılmaktadır, [5], [6]. Burada i ve j herhangi bir noktanın konumunu gösteren satır ve kolon numaraları, h ise x ve y doğrultularında aynı olduğu varsayılan noktalar arası uzaklıktır. Bu denklemin hatası h^2 mertebesindedir. (2) denklemi yerine

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4}[-h^2 f(x, y) + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j}] \quad (3)$$

kullanılabilir. Görüldüğü gibi, bu denklem, her noktadaki değerlerin komşu 4 noktadaki değerler cinsinden hesaplanabildiğini göstermektedir ve denklem takımının ardışık yaklaşım yöntemleri ile çözümü için çok uygun bir yapıdadır. (2) denkleminin sol tarafındaki *Sonlu Farklar Operatörü*, Şekil 2'de gösterildiği gibi, molekül biçiminde de ifade edilebilmektedir.



Şekil 2: Sonlu Farklar Operatörü Molekülü

Yukarıda belirtildiği gibi, Elektronik Tablo uygulamasında, sınırlardaki hücelere sınır koşulları, diğer tüm hücelere de, (3) denkleminin karşı gelen formül yazılır. Daha sonra, [F9] yeniden hesaplama tuşuna yeteri kadar basarak sonuç elde edilir.

4.1. Örnek 1

İlk örnek olarak kare bir kesitin elastik burulması problemi ele alınmıştır. Bu durumda Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 = 0 \quad (4)$$

biçimindedir,[7]. Sınır koşulları, kesitin tüm çevresinde $\nabla\varphi=0$ olarak belirlenmiştir. Karenin bir kenarı a ile gösterildiğine göre, boyutsuz değişkenler ve boyutsuz burulma fonksiyonu

$$\xi = \frac{x}{a} \quad , \quad \eta = \frac{y}{a} \quad (5)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{a^2} \psi(x, y) \quad (6)$$

olarak tanımlanabilir. Poisson denkleminin yeni şekli

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 2 = 0 \quad (7)$$

olur. Bu durumda (3) denkleminin karşı gelen sonlu farklar ifadesi de

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4} (2h^2 + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j}) \quad (8)$$

olarak yazılabilir.Çözümde karenin bir kenarı 8 parçaya bölünecek, yani $h=1/8$ alınacaktır. Problemin Elektronik Tablo yardımı ile çözümü için yapılan hazırlıklar Çizelge 1 üzerinde gösterilmiştir.

Çizelge 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	KARE KESİT BURULMA RİJİTLİĞİ									
2										
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	78							0	
5	0								0	
6	0								0	
7	0								0	
8	0								0	
9	0								0	
10	0								0	
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12										
13										
14		=(20000/64+B3+A4+B5+C4)/4								
15										
16										

Görüldüğü gibi, dış çevreye karşı gelen hücelere sınır koşulları (yani sıfır), çözüm bölgesinin sol üst köşesine (B4 hücresine) de, (8) formülünün Elektronik Tabloya aktarılmış biçimi yazılmıştır. Bu formülün ayrıntısı Çizelgenin içine yerleştirilmiş olan açıklama kutusunda gösterilmiştir. Formülde en yaygın Elektronik Tablo yazılımlarından biri olan Excel notasyonu kullanılmıştır. Çözüm sırasında sayıların çok küçük olmaması için, formüldeki 2 sabiti yerine 2×10^4 alınmış bulunmaktadır. Elektronik Tablolardaki tüm formüller, kullanıcı tarafından bilgisayar klavyesindeki oklar (veya mouse) ve cebrik işaretler kullanılarak yapılan tanımlara göre Elektronik Tablo yazılımı tarafından üretilmektedir. Genel olarak sadece bir veya birkaç hücre için üretilen formüller, kopyalandıktan sonra gereken yerlere yapıştırılır. Burada da B4 hücresindeki formülün,

Elektronik Tablolar ile Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Edit/Copy ve *Edit/Paste* komutlarını kullanılarak, tüm çözüm bölgesine yapıştırılması gerekir. Bu işlemlerin sonucu Çizelge 2'de gösterilmiştir.

Yukarıda belirtildiği gibi, kopyalama/yapıştırma işlemlerinden sonra çeşitli hücrelerdeki formüller bağımlı konuma gelirler. *Excel* uygulamalarında bağımlı formüllerin bulunması halinde, programın *Iteration* (Ardışık Yaklaşım) anahtarının seçili durumda olup olmamasına bağlı olarak, değişik sonuçlar elde edilmektedir. Bağımlı formüllerdeki işlemlerin yapılabilmesi için, yukarıda belirtildiği gibi, *Tools* menüsünden *Options* komutunu seçtikten sonra *Calculation* seçeneğinin tıklanması ve ekrana gelen *Options* ileti kutusundaki *Iteration* kutusunun seçili duruma getirmesi gerekmektedir. Ardışık yaklaşımı sürdürmek ve kesin değerleri elde etmek için, [F9] tuşuna birçok kez basmak gereklidir. Çizelge 2'de görülen değerler ilk birkaç adıma karşı gelen yaklaşık değerlerdir. Bu ilk aşamada, yapıştırma düzenine ve *Maximum Iterations* sayısına bağlı olarak, değişik değerler elde edilebilmektedir.

Çizelge 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	KARE KESİT BURULMA RİJİTLİĞİ									
2										
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	291	442	520	549	536	467	311	0	
5	0	443	698	836	889	864	742	479	0	
6	0	520	836	1011	1079	1047	892	566	0	
7	0	549	889	1080	1154	1118	948	598	0	
8	0	536	865	1047	1118	1081	917	579	0	
9	0	467	743	892	948	917	781	499	0	
10	0	312	479	566	598	579	499	327	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12										
13										

Yukarıda belirtildiği gibi, *Options* ileti kutusundaki *Maximum Iterations* yazı kutucuğuna 50, 100 gibi büyük bir rakam yazarak ardışık yaklaşım sayısını yükseltmek, işlemleri çabuklaştırır. Ardışık yaklaşımın sonuçlanmasından sonra elde edilen son değerler Çizelge 3'ün üst bölümünde görülmektedir.

4.1.1. Burulma Rijitliği Hesabı

Kare kesitin burulma atalet momenti

$$I_t = a_t a^4 \quad (9)$$

olarak ifade edilebilir. Burada, a_t katsayısı

$$a_t = 2 \iint \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (10)$$

olarak hesaplanmaktadır, [7]. Sonlu farklar kullanılarak elde edilen çözümde, burulma atalet momentini hesaplamak için sayısal integral yöntemlerinden birini kullanmak gerekir. Uygulamada en çok kullanılan yöntemlerden biri olan Simpson Yönteminin 2 boyutlu ortamdaki ifadesi

$$a_t = \frac{2h^2}{9} \sum \sum s_{i,j} \varphi_{i,j} \quad (11)$$

biçiminde yazılabilmektedir, [6]. Burada $s_{i,j}$ ile gösterilen Simpson katsayıları Çizelge 3'ün 14.-22. satırlarında gösterildiği gibidir.

Toplamı elde etmek için, önce A25 hücresine $s_{i,j}\varphi_{i,j}$ ifadesine karşı gelen formül yazılmış ve kopyalandıktan sonra, 25.-33. satırlar ile A-I kolonları arasına yapıştırılmıştır. a_t katsayısının hesabı I35 hücresi ile ilgili açıklama kutusunda gösterilmiştir. Başlangıçta 2 sabiti yerine 2×10^4 alınmış olduğundan

$$a_t = 0.1386$$

olarak elde edilmektedir. Kare kesit için a_t 'nin kesin değeri 0.1406 olarak verilmektedir, [7]. Bu durumda 8×8 parça için elde edilmiş olan bu sonuç -% 1.42 hatalıdır.

Çizelge 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	KARE KESİT BURULMA RİJİTLİĞİ									
2										
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	356	555	658	690	658	555	356	0	0
5	0	555	893	1075	1133	1075	893	555	0	0
6	0	658	1075	1305	1378	1305	1075	658	0	0
7	0	690	1133	1378	1456	1378	1133	690	0	0
8	0	658	1075	1305	1378	1305	1075	658	0	0
9	0	555	893	1075	1133	1075	893	555	0	0
10	0	356	555	658	690	658	555	356	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12										
13										
14	1	4	2	4	2	4	2	4	1	
15	4	16	8	16	8	16	8	16	4	
16	2	8	4	8	4	8	4	8	2	
17	4	16	8	16	8	16	8	16	4	
18	2	8	4	8	4	8	4	8	2	
19	4	16	8	16	8	16	8	16	4	
20	2	8	4	8	4	8	4	8	2	
21	4	16	8	16	8	16	8	16	4	
22	1	4	2	4	2	4	2	4	1	
23										
24										
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26	0	5689	4439	10533	5524	10533	4439	5689	0	
27	0	4439	3573	8603	4531	8603	3573	4439	0	
28	0	10533	8603	20873	11020	20873	8603	10533	0	
29	0	5524	4531	11020	5823	11020	4531	5524	0	
30	0	10533	8603	20873	11020	20873	8603	10533	0	
31	0	4439	3573	8603	4531	8603	3573	4439	0	
32	0	5689	4439	10533	5524	10533	4439	5689	0	
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
34										
35									1386	
36	=A3*A14									
37										
38							=2/(9*64)*SUM(A25:I33)			
39										

5. EK BİLGİLER

Bu bölümde sonlu farklar uygulamasının geliştirilmesi ve özel hallere uygulanması ile ilgili bazı ek bilgiler verilecek ve örnek sonuçları irdelenecektir.

5.1. Richardson Ekstrapolasyonu

Yukarıda belirtildiği gibi, (8) formülü ile ifade edilen sonlu farklar operatörünün hata mertebesi h^2 'dir. Bu nedenle, h aralığı küçüldükçe, yani parça sayısı arttıkça, geçişe daha yakın sonuçlar elde edileceği açıktır. İki farklı parça sayısı ile elde edilmiş olan sonuçlara ekstrapolasyon uygulayarak da daha az hatalı sonuçlar elde edilebilmektedir. Çeşitli ekstrapolasyon formülleri arasında en kullanışlı olanlardan biri, Richardson Ekstrapolasyon formülüdür. Buna göre, n_1 ve n_2 parça sayıları için elde edilmiş olan A_1 ve A_2 değerleri kullanılarak daha az hatalı olan $A_{1,2}$ değeri

$$A_{1,2} = \frac{n_2^2 A_2 - n_1^2 A_1}{n_2^2 - n_1^2} \quad (12)$$

formülü ile elde edilebilmektedir, [6]. Yukarıdaki örnek, sırasıyla, 4, 6, 8, 12 ve 16 parça kullanılarak çözülmüş ve Çizelge 4'te gösterilen değerler bulunmuştur.

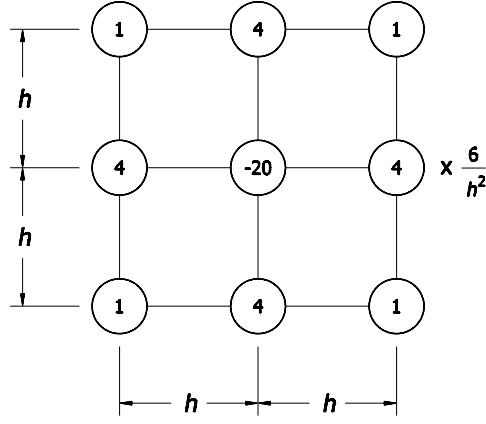
Çizelge 4

Parça Sayısı	α_t		Ekstrapolasyon Sonucu	
	Değer	Hata (%)	Değer	Hata (%)
4	0.1328	-5.55	-	-
6	0.1371	-2.49	0.1405	-0.07
8	0.1386	-1.42	0.1405	-0.07
12	0.1397	-0.64	0.1406	-
16	0.1401	-0.36	0.1406	-

Her satırdaki ekstrapolasyon sonuçları, o satırda ve bir üstteki satırda bulunan değerler kullanılarak (12) formülünün uygulanması ile elde edilmiştir. Görüldüğü gibi, çok az sayıda parça kullanılarak ekstrapolasyon uygulaması ile elde edilen değerler bile hemen hemen hatasızdır. Parça sayıları biraz arttırıldığında, kesin sonuçlar bulunmuştur.

5.2. N Operatörü

Sayısal uygulamalarda, Şekil 2'de gösterilen Laplace operatörü yerine, Şekil 3'te gösterilen ve hata oranı h^4 olan N Operatörü'nü kullanarak çok daha gerçeğe yakın sonuçlar elde etmek mümkün olmaktadır, [6].



Şekil 3: N Operatörü Molekülü

Bu operatörün yukarıda verilen örneğe uygulanması için, Çizelge 1'de B4 hücresi için verilmiş olan formül yerine

$$=(12000/64+4*(A4+C4+B3+B5)+A3+A5+C3+C5)/20$$

formülünü yazmak ve bu formülü kopyalayıp tüm çözüm bölgesine yapıştırmak gereklidir. Görüldüğü gibi, bu formül öncekine göre biraz daha uzundur. Ancak formül sadece bir kez yazılacağından, yapılacak işlemlerde önemli bir artış söz konusu olmamaktadır. Kare kesitin burulma rijitliğini elde etmek için Çizelge 3 üzerinde gösterilmiş bulunan diğer işlemlerde bir değişiklik yoktur. Bu işlemlerden sonra

$$a_t = 0.1405$$

olarak elde edilmektedir. Bu değer hatası sadece % 0.07'dir. N Operatörü kullanılarak 4, 6, 8, 12 ve 16 parça için elde edilen değerler ve hataları Çizelge 5'te gösterilmiştir.

Çizelge 5

Parça Sayısı	α_t	
	Değer	Hata (%)
4	0.1399	-0.50
6	0.1404	-0.14
8	0.1405	-0.07
12	0.1406	-
16	0.1406	-

Görüldüğü gibi, çok az parça kullanılması halinde bile, N Operatörü ile elde edilen değerler hatasız sayılabilecek niteliktedir.

5.3. Simetrik Sistemler

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, pek çok kesitte bir (veya daha çok) simetri eksenini bulunmaktadır. Bu durumda hesapları, kesitin yarısı (veya dörtte biri) için yapmak mümkündür. Bunun için, simetri eksenleri boyunca yazılacak formüllerde simetri özelliklerini göz önüne almak yeterlidir. Kare kesitin burulma rijitliğini hesaplamak üzere, simetri özelliklerini de göz önüne alarak hazırlanmış olan Elektronik Tablo formülleri, Çizelge 6'da gösterilmiştir.

Çizelge 6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	KARE KESİT BURULMA RİJİTLİĞİ									
2										
3	0	0	0	0	0					
4	0	78			78	→	=(20000/64+E3+D4+E5+D4)/4			
5	0									
6	0									
7	0	78			78	→	=(20000/64+E6+D7+E6+D7)/4			
8										
9										
10		=(20000/64+B6+A7+B6+C7)								
11										
12										
13										

B4 hücresine yazılacak formülde bir değişiklik yoktur. Yani bu formül, yukarıda, Çizelge 1'de gösterildiği gibidir. B7 ve E4 hücrelerine yazılan formüllerde, sırasıyla, yatay ve düşey eksen boyunca simetri özellikleri göz önüne alınmış bulunmaktadır. E7 hücresindeki formül de, her iki eksene göre simetri bulunduğuna göre düzenlenmiştir. Bu hücelere formüller yazıldıktan sonra

B7 hücresindeki formül C7 ve D7 hücrelerine,

E4 hücresindeki formül E5 ve E6 hücrelerine,

B4 hücresindeki formül de, iç bölgedeki tüm diğer hücelere

yapıştırılacaktır. Burulma rijitliğinin hesabı için yapılacak diğer işlemlerde önemli bir değişiklik yoktur. Kare kesitin $\frac{1}{4}$ 'ü kullanılarak yapılan burulma rijitliği hesabı Çizelge 7 üzerinde gösterilmiştir.

Çizelgede görüldüğü gibi, kesitin $\frac{1}{4}$ 'ü ile hesap yapıldığı için, son toplam elde edildikten sonra sonuç 4 ile çarpılmıştır.

Yukarıdaki örnekte, köşegenler boyunca da simetri bulunduğundan, hesapları kesitin $\frac{1}{8}$ 'i için yapmak da mümkündür. Ancak bu durumda bazı formülleri kopyalayıp köşegen boyunca yapıştırmak gereklidir. Bu da Elektronik Tablo uygulamaları bakımından çok pratik değildir. Bu nedenle sadece yatay ve düşey simetri eksenlerini kullanılmakla yetinilmesi daha uygundur.

Çizelge 7

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	KARE KESİT BURULMA RİJİTLİĞİ (1/4)								
2									
3	0	0	0	0	0				
4	0	356	555	658	690				
5	0	555	893	1075	1133				
6	0	658	1075	1305	1378				
7	0	690	1133	1378	1456				
8									
9	1	4	2	4	1				
10	4	16	8	16	4				
11	2	8	4	8	2				
12	4	16	8	16	4				
13	1	4	2	4	1				
14									
15	0	0	0	0	0				
16	0	5689	4439	10533	2762				
17	0	4439	3573	8603	2266				
18	0	10533	8603	20873	5510				
19	0	2762	2266	5510	1456				
20									
21					1386				
22					↓				
23									
24					=4*2/(9*64)*SUM(A15:E19)				
25									

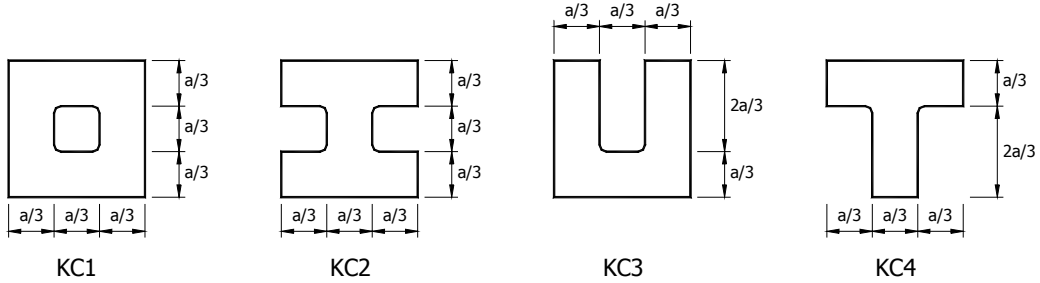
6. KALIN CİDARLI KESİTLERİN BURULMA ATALET MOMENTLERİ

Bilindiği gibi, "İnce Cidarlı" açık ve kapalı kesitlerin burulma rijitlikleri kolayca ve gerçeğe yakın olarak hesaplanabilmektedir. Dışbükey çokgen kesitlerin burulma atalet momentlerinin hesabı için de

$$I_t = \frac{F^4}{40I_0} \quad (13)$$

yaklaşık formülü, pratik uygulamalar için sağlıklı sonuçlar vermektedir, [8]. Burada F kesit alanını, I_0 da polar atalet momentini göstermektedir.

İçbükey bölümleri de bulunan "Kalın Cidarlı" kesitlerin burulma atalet momentlerinin hesabında bu tür yaklaşık yöntemlerin uygulanması, bazen %40'ı aşan mertebede hatalı sonuçlar verebilmektedir. Bu nedenle, bu tür kesitlerin burulma atalet momentlerinin hesabında Poisson denkleminin yararlanmak daha doğru olur. Yukarıdaki örnekte gösterildiği gibi, Poisson denkleminin Sonlu Farklar yöntemi ve Elektronik Tablolar aracılığı ile çözülmesi oldukça kolay ve pratiktir. Örnek olarak ele alınan ve KC1, KC2, KC3 ve KC4 olarak adlandırılan 4 adet kalın cidarlı kesit Şekil4'te gösterilmiştir.



Şekil 4: Kalın Cidarlı Kesit Örnekleri

Bilindiği gibi, içbükey köşelerde, kuramsal olarak, kayma gerilmeleri sonsuz olur, [8]. Bu nedenle, Şekil 4'te gösterilen kesitlerin iç köşelerinin yuvarlatılmış oldukları kabul edilmiştir. Burulma atalet momentinin değerine önemli bir katkıları olmayan bu yuvarlatmalar, sonlu fark düzeninde göz önüne alınmayacaktır. Bu kesitlerin de burulma atalet momentleri

$$I_t = \alpha_t a^4 \quad (9)$$

olarak ifade edilebilmektedir. Aşağıda gösterileceği gibi, Bu tip kesitler için α_t katsayıları da kare kesitler için uygulanan yöntemle benzer bir yolla kolayca elde edilebilmektedir. Tek değişiklik, ilgili sınır koşullarının geometrik biçime uygun olarak yazılmasıdır.

6.1. Örnek 2

İkinci bir sayısal örnek olarak Şekil 4'te gösterilen KC1 tipi kesitin burulma atalet momentini hesaplanacaktır. Kesit her iki yönde 12'şer parçaya bölünmüş ve iki simetri ekseninin varlığı nedeniyle, kesitin 1/4'ü kullanılmıştır. Simetri özelliklerini ve sınır koşullarını göz önüne alarak hazırlanmış olan Elektronik Tablo formülleri, Çizelge 8'de gösterilmiştir. Çözüm bölgesinin sol üst köşesine (B4 hücresine), (8) formülünün $h=1/12$ değerine karşı gelen biçimi yazılmıştır. Burada da 2 sabiti yerine 2×10^4 alınmış bulunmaktadır. B9 ve G4 hücrelerine yazılan formüllerde, sırasıyla, yatay ve düşey eksen boyunca simetri özellikleri göz önüne alınmış bulunmaktadır.

İlgili hücelere formüller yazıldıktan sonra

B9 hücresindeki formül C9 ve D9 hücrelerine,

G4 hücresindeki formül G5 ve G6 hücrelerine,

B4 hücresindeki formül de, iç bölgedeki tüm diğer hücelere

yapıştırılacaktır. Burulma rijitliğinin hesabı için yapılacak diğer işlemlerde önemli bir değişiklik yoktur. Kesitin 1/4'ü kullanılarak yapılan burulma rijitliği hesabı Çizelge 9 üzerinde gösterilmiştir. Görüldüğü gibi bu kesit için

$$\alpha_t = 0.0343$$

olarak elde edilmektedir. Bu değer hatası -% 5.26'dır.

Çizelge 8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	KUTU KESİT BURULMA RİJİTLİĞİ								
2									
3	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	35					35		
5	0								
6	0								
7	0				0	0	0		
8	0				0				
9	0	35			0				
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									

Çizelge 9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	KUTU KESİT BURULMA RİJİTLİĞİ									
2										
3	0	0	0	0	0	0	0			
4	0	132	195	217	219	217	216			
5	0	195	290	316	303	293	290			
6	0	217	316	316	245	224	219			
7	0	219	303	245	0	0	0			
8	0	217	293	224	0					
9	0	216	290	219	0					
10										
11	1	4	2	4	2	4	1			
12	4	16	8	16	8	16	4			
13	2	8	2	8	2	8	2			
14	4	16	8	16	8	16	4			
15	2	8	4	8	2	4	1			
16	4	16	8	16	4					
17	1	4	2	4	1					
18										
19	0	0	0	0	0	0	0			
20	0	2112	1556	3475	1752	3467	862			
21	0	1556	580	2530	606	2346	580			
22	0	3475	2530	5050	1964	3588	878			
23	0	1752	1213	1964	0	0	0			
24	0	3467	2346	3588	0					
25	0	862	580	878	0					
26										
27							343			
28										
29										
30										
31										

6.2. N Operatörü Uygulaması

Şekil 4'te gösterilen kalın cidarlı kesit tiplerinin burulma rijitlikleri, kesitler her iki yönde 12'şer parçaya bölünüp N Operatörü kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen a_i katsayılarının değerleri, Çizelge 10'da gösterilmiştir.

Çizelge 10

Kesit Tipi	a_i	Kesin Değer	Hata (%)
KC1	0.0355	0.0362	-1.93
KC2	0.0295	0.0305	-3.28
KC3	0.0275	0.0279	-1.43
KC4	0.0196	0.0200	-2.00

Kesin değerler, h parça boyları küçültülerek hesaplanan sonuçlara, 4. Mertebeden Richardson ekstrapolasyonu uygulanması ile elde edilmiş bulunmaktadır, [6].

7. DİĞER UYGULAMALAR

Bilindiği gibi, Kısmi Diferansiyel Denklemler uygulamalarının kapsamı çok geniştir. Özellikle Poisson denkleminin homojen biçimi olan Laplace diferansiyel denklemi, pek çok fizik ve mühendislik probleminde ortaya çıkmaktadır. Elektronik Tablolar aracılığı ile Sonlu Farklar uygulamaları, bunların hemen tümünde kolayca ve başarı ile kullanılabilir. Elektronik Tabloların IF, MAX, MIN, VLOOKUP v.b. fonksiyonlarını kullanarak, doğrusal olmayan problemlerin çözümleri de oldukça kolay bir biçimde gerçekleştirilebilir. Ancak bu konuların ayrıntıları bu çalışmanın kapsamı dışında bırakılmıştır.

Kaynaklar

- [1] Özmen, G., Yapı Mühendisliğinde Elektronik Tablo Uygulamaları; İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı Sempozyumu, İstanbul, 1988.
- [2] Özmen, G., İnşaat Mühendisliğinde Elektronik Tablo Uygulamaları; İMO İstanbul Bülteni; İstanbul, Kasım-Aralık 1994.
- [3] Özmen, G., Elektronik Tablolar ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü; İMO Teknik Dergi; Ankara, Temmuz 1995.
- [4] Özmen, G., Elektronik Tablolar ile Ardışık Yaklaşım, İMO Teknik Dergi; Cilt 13, Sayı 3, Ankara, Temmuz 2002.
- [5] Collatz, L., The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [6] Salvadori, M.G. & Baron, M.L., Numerical Methods in Engineering, Prentice-Hall Inc., New Delhi, 1961.
- [7] Timoshenko, S. & Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951
- [8] İnan, M., Cisimlerin Mukavemeti, Ofset Matbaacılık Ltd. Şti., İstanbul 1970.