

Elastik Zemine Oturan Plaklar için Parametreler

Ayşe DALOĞLU*

ÖZ

Bu çalışmada, elastik zemine oturan plakların analizinde kullanılmak üzere boyutsuz parametreler tanımlanmıştır. Elastik zemine oturan, tekil yüke maruz plak problemini Winkler modeliyle çözmek için gerekli olan eşdeğer zemin modülünü, k , elde etmek üzere bir yöntem geliştirilmiştir. Tekil yükün merkezde, köşede ve kenar ortasında etkimesi halleri incelenmiştir. Çalışmada sabit bir poisson oranı kullanılmış ve elastik zemin için bu değer $\nu_s=0.25$ alınmıştır. Winkler modelinde kullanılacak olan zemin modülünün elde edilmesi için grafikler sunulmuştur. Yapının ve zeminin özellikleri ve yükleme durumu bilindiği anda zemin modülü sunulan grafikler yardımıyla belirlenebilecektir. Sayısal örnekler verilerek yöntemin uygulanabilirliği gösterilmiş ve Vlasov yönteminden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmıştır.

Anahtar sözcükler: Elastik zemin, Zemin modülü, Winkler modeli, Vlasov modeli, Zemin parametreleri.

ABSTRACT

Parameters for Plates on Elastic Foundations

In this study, a nondimensional analysis of parameters has been performed for the analysis of a plate on an elastic foundation. An attempt is made to develop a method to evaluate the modulus of subgrade reaction, k , to be used in the Winkler model for the analysis of plates subjected to a concentrated load. The concentrated load can be placed at the center, at the corner, or at the midpoint of the edge of the rectangular plate. This numerical effort is made for a constant value of Poisson's ratio for the soil, $\nu_s=0.25$. Equations and graphs are provided from which a value of k can be computed as soon as the complete geometry and the properties of the overall system are known. Numerical examples were solved to verify the applicability of the method and the results obtained were compared with those obtained from the modified Vlasov method.

Keywords: Elastic foundation, modulus of subgrade reaction, Winkler model, Vlasov model, Parameters of foundation.

Not: Bu yazı

- Yayın Kurulu'na 07.08.2002 günü ulaşmıştır.
- 30 Eylül 2004 gününe kadar tartışmaya açıktır.

* Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Trabzon - aysed@ktu.edu.tr

1. GİRİŞ

Elastik zemine oturan kiriş ve plak problemlerinin çözümünde matematiksel formülasyonu kolaylaştırmak için değişik kabuller yapılmaktadır. Winkler modelinde zeminin birbirine komşu olan noktalarında her hangi bir etkileşimin söz konusu olmadığı kabul edilmektedir. Diğer bir ifadeyle, zemin aralarında etkileşim olmayan bir seri yaylarla temsil edilmektedir. Winkler modelinde yapılan ve gerçekçi olmayan bu kabule rağmen, söz konusu yöntem uygulamadaki basitliği nedeniyle hala kullanılmaktadır. Yöntemi kullanmadaki esas sorun, zemin modülü olarak tanımlanan yay katsayısının, k , ampirik bağıntılardan elde edilmesidir. Aynı zamanda model her ne kadar tekil yük durumunda tatminkar sonuç verse de yayılı yük durumunda gerçekçi olmayan sonuçlara götürmektedir. Bununla birlikte zemin modülü k 'nın doğru değerini bilmeden hesaplanan yer değiştirmelerde, eğilme momentlerinde ve kesme kuvvetlerinde yapılan hata oranını da hesaplamak mümkün olmamaktadır.

Bu çalışmada elastik zemine oturan plakların analizi için boyutsuz parametreler elde edilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, tekil yükle yüklü elastik zemine oturan plakların analizini Winkler yöntemiyle gerçekleştirmek için gerekli olan zemin modülü k 'yı elde etmek için bir metod geliştirilmiştir. Tekil yükün plağın merkezinde, köşesinde ve kenarında etkimesi durumları incelenmiştir. Bu sayısal çalışma zemin Poisson oranının sabit bir değeri için yapılmış ve $\nu_s=0.25$ alınmıştır. Elastik zemine oturan plak probleminin geometrisi ve malzeme özellikleri bilinmesi halinde, zemin modülü k 'nın hesaplanmasında kullanılan grafikler ve denklemler sunulmuştur. Son olarak sayısal örnekler verilmiş ve karşılaştırmalar yapılmıştır.

2. İKİ PARAMETELİ MODEL

İki parametrelili modelde eğilme rijitliği D olan bir plağa ait yük-yer değiştirme ilişkisi,

$$D\nabla^4 w - 2t\nabla^2 w + kw = q \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir [1]. Burada q plak üzerindeki yayılı yükü, k zemin modülünü, $2t$ ise Winkler modelinde ihmal edilen yaylar arasındaki kesme deformasyonunu temsil eden zemin parametresini göstermektedir. Diğer bir ifadeyle $2t$ sifıra eşit alındığında Winkler modeline ait denklem elde edilmektedir. Bu iki zemin parametresini hesaplayabilmek için Vlasov ve Leont'ev elastik zemin derinliğince düşey deplasman profilini temsil eden diğer bir parametre, γ , tanımlanmıştır [1]. Bu yaklaşımın avantajı zemin modülü k ile yaylar arası etkileşimi temsil eden $2t$ 'nin zemin ve plağın geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlı olarak hesaplanmasıdır.

Düzlem şekil değiştirme durumu olan elastik zemine oturan plak probleminin çözümü için, zeminin her hangi bir noktasındaki deplasman Vlasov ve Leont'ev tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [1].

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= 0 \\ w(x, y, z) &= w(x, y)\phi(z) \end{aligned} \quad (2)$$

burada $\phi(z)$ zemin yüzeyinden kaya tabakaya doğru yer değiştirmenin değişimini göstermektedir ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\phi(z) = \frac{\sinh \gamma \left(1 - \frac{z}{H}\right)}{\sinh \gamma} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2 = \frac{(1-2\nu_s)}{2(1-\nu_s)} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x,y) dx dy} \quad (4)$$

Yukarıdaki ifadelerde H zemin derinliği ve ν_s poisson oranıdır. γ ise yukarıda tanımlandığı üzere plak ve elastik zeminin yer değiştirmesine bağlıdır [2, 3, 4]. (1) denklemindeki, k ve $2t$,

$$k = \int_0^H \frac{(1-\nu_s)E_s}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 dz \quad (5)$$

$$2t = \int_0^H \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \phi^2 dz \quad (6)$$

olarak verilebilir, burada E_s zeminin elastisite modülünü göstermektedir.

3. BOYUTSUZ DENKLEMLER

Kalınlığı sabit olan bir plak için karakteristik uzunluk olarak yeni bir parametre, r , tanımlanabilir.

$$r = 4 \sqrt{\frac{D H}{E_s}} \quad (7)$$

Buna göre plağın koordinat eksenleri ve yer değiştirmesi boyutsuz olarak

$$X = \frac{x}{r}, \quad Y = \frac{y}{r}, \quad Z = \frac{z}{r}, \quad W = \frac{w}{r} \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikler (1) ile verilen denklemde yerine yazılırsa, alan denklemi

$$\nabla^4 W - 2T\nabla^2 W + K_\nu W = Q \quad (9)$$

Elastik Zemine Oturan Plaklar İçin Parametreler

olarak yazılabilir [5]. Burada K_v , Vlasov modeli için boyutsuz zemin modülü, $2T$ ise yaylar arası etkileşimi temsil eden boyutsuz parametrelerdir:

$$K_v = \frac{kr^4}{D}, \quad 2T = \frac{2tr^2}{D} \quad (10)$$

Boyutsuz düzgün yayılı yük terimi ise

$$Q = \frac{qr^3}{D} \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir. (9) denkleminde ∇^4 ve ∇^2 sırasıyla biharmonik ve Laplace operatörleridir ve türevlerin yeni koordinat sistemine, X ve Y , göre alınması gerekmektedir. Yukarıdaki denklemlerde kısa kenarı $2a$, uzun kenarı $2b$ olan dikdörtgen plağın boyutları işleme girmemektedir. Plağın boyutlarını da işleme katmak için yeni bir boyutsuz parametre, $2a/r$, tanımlanabilir.

4. SAYISAL MODELLEME

Burada açıklanan, elastik zemine oturan plak problemini çözmek üzere sonlu farklar veya sonlu elemanlar modellerinden biri kullanılabilir. Yeterli eleman sayısı kullanıldığı sürece her iki yöntemin de aynı sonucu vereceği aşikardır. Bu çalışmada sonlu elemanlar yöntemi tercih edilmiştir.

4.1. Sonlu Elemanlar Modeli

Sonlu elemanlar modelinde plağı temsil eden eleman rijitlik matrisi, $[k_p]$, yanında zemindeki aksel deformasyonları temsil eden rijitlik matrisi, $[k_k]$, ve zemindeki kesme deformasyonlarını temsil eden $[k_{2t}]$ matrisleri elde edilmiştir [3]. Standart sonlu elemanlar modelleme işlemlerini takip ederek eleman rijitlik matrislerini toplamak suretiyle global rijitlik matrisi elde edilir. $[K]$, global rijitlik matrisini göstermek üzere aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$[K] = \sum_{i=1}^{ne} ([k_p] + [k_k] + [k_{2t}]) \quad (12)$$

Burada ne sonlu eleman modellemesindeki toplam plak eleman sayısını göstermektedir. Sonuç denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[K]\{W\} = \{F\} \quad (13)$$

Bu ifadede $\{W\}$ ve $\{F\}$ sırasıyla global deplasman ve yük vektörleridir. (13) denklemini çözebilmek için sınır şartlarını uygulamak gerekmektedir. Sınır şartı olarak plağın etrafındaki elastik zeminin plak kenarlarına olan etkisi dikkate alınmaktadır [4, 5]. Bu

amaçla, plağı çevreleyen zeminin etkisi eşdeğer reaksiyon kuvvetleri olarak hesaplanmış ve plak kenarlarına etkittirilmiştir [6].

4.2. Winkler Modeli İçin Boyutsuz Zemin Modülü K_w 'nin Elde Edilişi

Vlasov modelindeki boyutsuz zemin parametresi K_v 'den Winkler modelinde kullanılan olan boyutsuz zemin modülü K_w 'nin elde edilişi aşağıdaki şekilde özetlenebilir. Plağın deplasmanları Vlasov modeliyle elde edilerek (10) denklemi yardımıyla zemin modülü K_v ve yük altındaki maksimum deplasman hesaplanmıştır. Elde edilen K_v değeri kullanılarak aynı plağın Winkler yöntemiyle analizi yapılmış ve yük altındaki maksimum deplasman değeri hesaplanmıştır. Her iki yöntemden elde edilen maksimum deplasman değerlerinin oranı belirlenmiş ve Vlasov modelinden elde edilen zemin modülü K_v bu değerle çarpılmıştır. Yeni bulunan değer kullanılarak plak Winkler modeli ile yeniden analiz edilmiştir. Bu adımda elde edilen yer değiştirme değeri Vlasov modeliyle elde edilen değere daha yakın olacaktır. Maksimum yer değiştirmeler arasındaki oran bir kez daha hesaplanarak zemin modülü K_v yeni oranla çarpılmıştır. Aynı işleme Vlasov ve Winkler modellerinden elde edilen maksimum yer değiştirme değerleri arasındaki fark sıfıra yaklaşıncaya kadar devam edilmiştir [7].

Boyutsuz Winkler zemini modülü K_w 'nin H/r oranı ile değişimi üç farklı yükleme durumu için Şekil 1 de verilmektedir. Herhangi bir elastik zemine oturan plak problemine ait r değeri (7) denklemiyle hesaplanır. H/r oranı belirlenip yükleme durumuna göre Winkler modelinde kullanılabilecek olan boyutsuz zemin modülü, K_w , Şekil 1'deki ilgili eğriden okunur veya aşağıdaki bağıntılar yardımıyla hesaplanabilir.

$$K_w = 0.7409 + 0.2997\left(\frac{H}{r}\right) + 0.0471\left(\frac{H}{r}\right)^2, \quad (14)$$

$$K_w = -0.2232 + 1.6875\left(\frac{H}{r}\right) + 0.1152\left(\frac{H}{r}\right)^2, \quad (15)$$

$$K_w = -2.4425 + 5.1822\left(\frac{H}{r}\right) + 0.2718\left(\frac{H}{r}\right)^2. \quad (16)$$

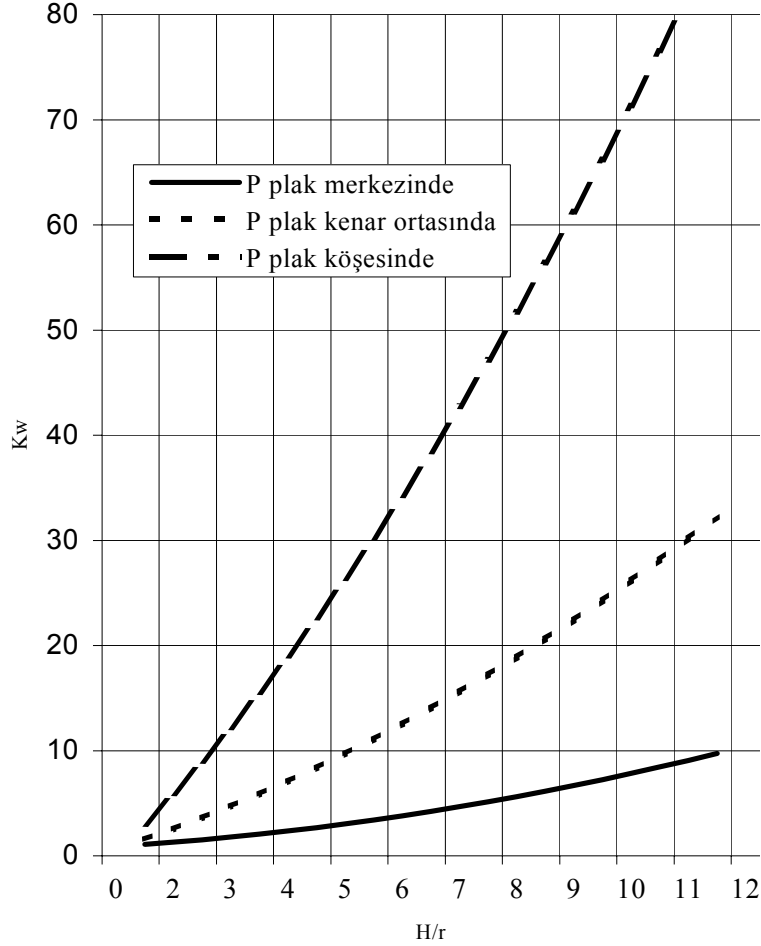
K_w değeri tekil yük plağın merkezinde ise (14) denklemi kullanılarak, yük plağın kenar ortasında ise (15) denklemi yardımıyla ve yük plağın köşesinde ise (16) denklemi ile hesaplanır. Daha sonra Winkler yönteminde kullanılacak zemin modülü

$$k = \frac{K_w D}{r^4} \quad (17)$$

ifadesi ile belirlenir. Elde edilen k değeri kullanılarak elastik zemine oturan plağın deplasmanları ve iç kuvvetleri Winkler yöntemi ile ve pratik açıdan yeterli hassasiyetle hesaplanabilir. Böylece hem zeminin hem de plağın geometrisi ve malzeme özellikleri

Elastik Zemine Oturan Plaklar İçin Parametreler

hesaba katılmış olur. Ancak elde edilen sonuçların Vlasov metoduyla elde edilecek değerleri tamamen yansıtmayacağına dikkat etmek gerekir [5].

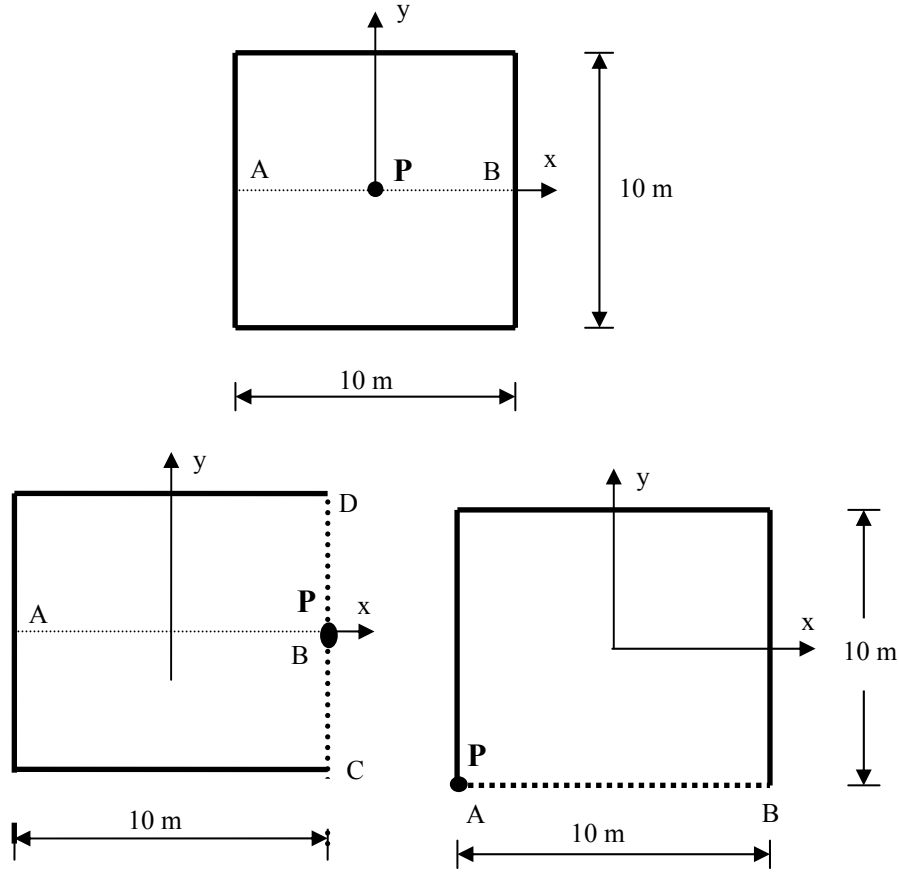


Şekil 1. Boyutsuz Winkler zemini modülünün H/r oranı ile değişimi.

5. SAYISAL ÖRNEKLER

Sayısal örneklerle hem Şekil 1'de verilen eğrilerin nasıl kullanılacağı gösterilmeye çalışılmış hem de elde edilen sonuçlar Vlasov modelinden elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Şekil 2'de görülen plak üç farklı yükleme durumu için çözülmüştür. $10m \times 10m$ lik plak $2.1 \times 10^7 kN/m^2$ lik elastisite modülü ve 0.15 lik Poisson oranına sahiptir. Zeminin elastisite modülü ise $9101 kN/m^2$ dir. Tekil yükün şiddeti $250 kN$ ve zemin derinliği $H = 9.144 m$ alınmıştır. Zemin ve plağa ait değerler yerine konulduğunda r

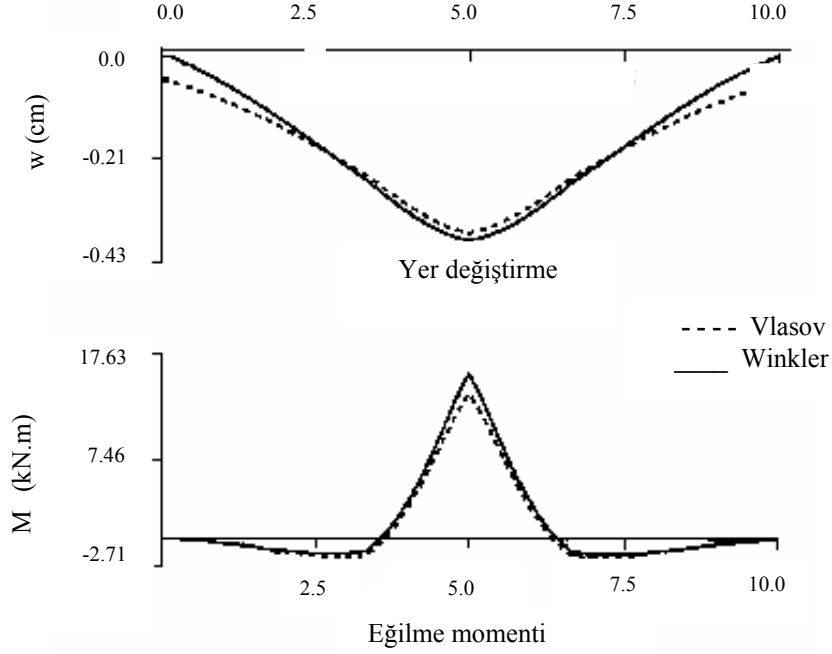
değeri $2.368 m$, H/r oranı ise 3.86 olarak elde edilmiştir. Tekil yükün plak merkezinden etkimesi durumunda boyutsuz Winkler zemini modülü K_w , ilgili eğriden veya (14) denkleminde 2.6 olarak hesaplanmıştır. Buna bağlı olarak k_w değeri elde edilmiş ve plak Winkler yöntemi ile analiz edilmiştir. Hesaplanan yer değiştirme ve eğilme momenti değerleri Vlasov metoduyla elde edilenlerle karşılaştırılmak üzere AB aksı boyunca çizilmiştir, Şekil 3.



Şekil 2. Yükleme durumları ve grafiklerde kullanılan doğrultular.

Daha sonra aynı plak Şekil 2 de görüldüğü üzere yükün kenar ortasında etkimesi hali için çözülmüştür. Bu durumda K_w değeri ilgili eğri veya (15) ifadesi yardımıyla 6.064 olarak elde edilmiştir. Buna göre Winkler yöntemiyle analizde kullanılacak olan kN/m^3 boyutundaki zemin modülü (17) denklemi yardımıyla hesaplanmıştır. Hem Vlasov metoduyla hem de Winkler metoduyla elde edilen yer değiştirme ve eğilme momenti değerleri iki aks boyunca Şekil 4 ve 5'te verilmektedir.

Elastik Zemine Oturan Plaklar İçin Parametreler

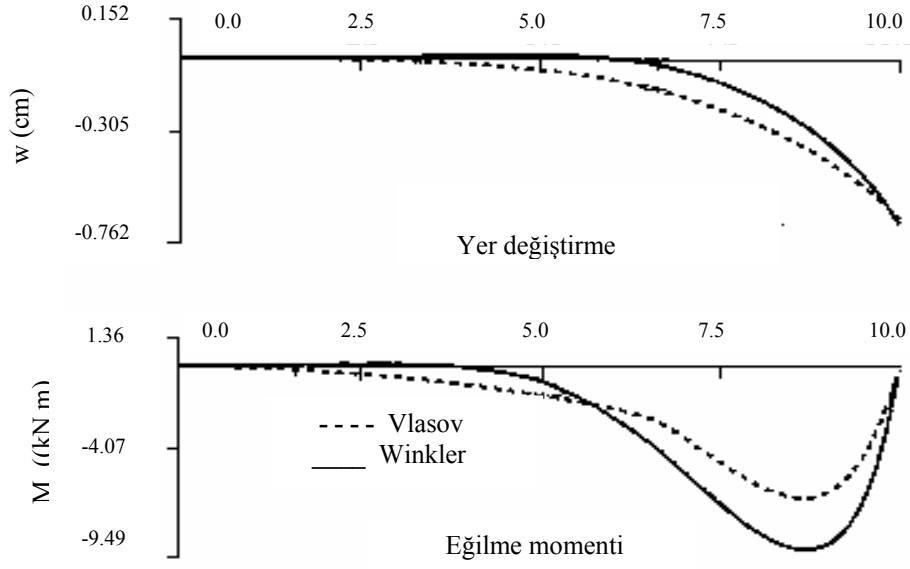


Şekil 3. Tekil yük plak merkezinde, doğrultu AB (Şekil 2).

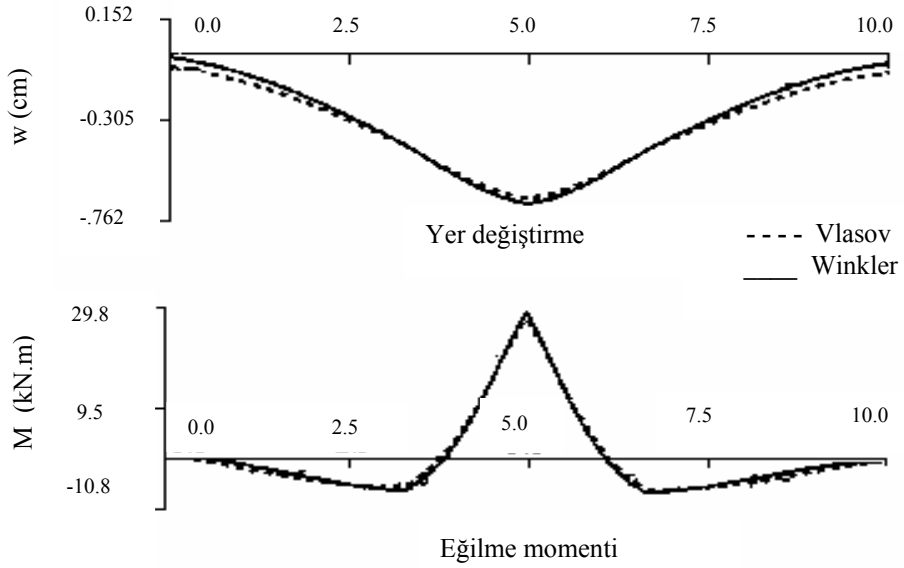
Son olarak tekil yükün köşede etkimesi hali için K_w değeri 21.61 olarak elde edilmiş ve buna bağlı olarak k , (16) denklemi yardımıyla hesaplanmıştır. Bu yükleme durumu için yer değiştirme ve eğilme momenti değerleri Şekil 6'da verilmektedir.

5.1. Sonuçların Değerlendirilmesi

Hem Vlasov hem de Winkler modelinden elde edilen sonuçlar Şekil 3, 4, 5 ve 6'da verilmektedir. Sonuçlar birbirine oldukça yakındır. Tekil yük durumunda Winkler modelinin gerçekçi zemin modülü kullanıldığında oldukça iyi sonuç verdiği söylenebilir. Grafiklerden de görüldüğü gibi iki metotla elde edilen sonuçlar arasında bir miktar fark vardır. Bunun nedeni Winkler modelinde ihmal edilen yaylar arası kesme etkisidir. Her iki yöntemle elde edilen maksimum yer değiştirmenin aynı olmasına rağmen, yükün kenarda ve köşede etkimesi hallerinde eğilme momentlerinde % 25'e varan hatalar gözlenmektedir. Bunun nedeni yer değiştirmenin açıklık boyunca değişiminden ziyade sadece maksimum yer değiştirmenin üst üste düşürülmeye çalışılmasındandır.

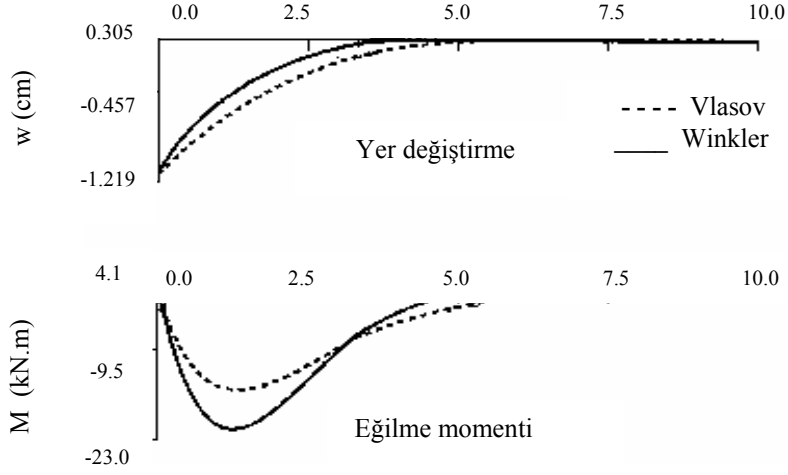


Şekil 4. Tekil yük plak kenar ortasında, doğrultu AB (Şekil 2).



Şekil 5. Tekil yük plak kenar ortasında, doğrultu CD (Şekil 2).

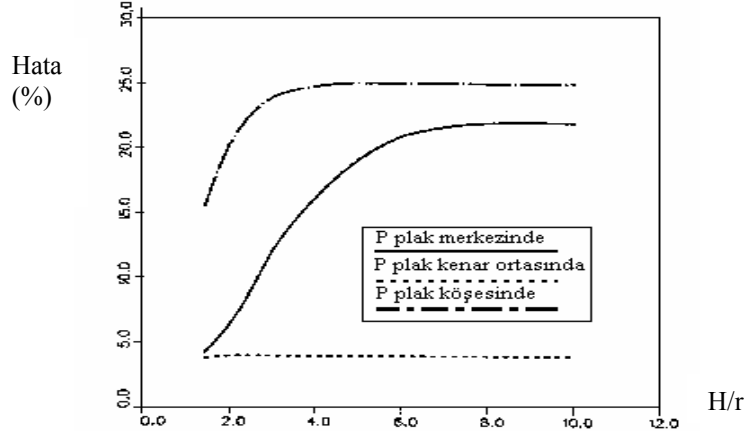
Elastik Zemine Oturan Plaklar İçin Parametreler



Şekil 6. Tekil yük plak köşesinde, doğrultu AB (Şekil 2).

5.2. Hata Analizi

Eğilme momentinin maksimum değerinde yapılabilecek olan hatanın dağılımını göstermek üzere hata analizi gerçekleştirilmiştir. Vlasov modeli kullanılarak değişik zemin derinlikleri için plağın eğilme momentleri hesaplanmıştır. Aynı işlemler Şekil 1'deki eğriler yardımıyla Winkler yöntemi kullanılarak da gerçekleştirilmiştir. İki çözüm arasındaki hata miktarının H/r ile değişimi çizilmiş ve Şekil 7'de sunulmuştur. Kenar ortasından yüklü plağın eğilme momentinde yapılabilecek hata H/r 'nin küçük değerleri için çok küçük olmaktadır, fakat H/r 'nin büyük değerleri için hata miktarı da artmaktadır. Köşeden yüklenmiş plak için hata %25 civarındadır.



Şekil 7. Eğilme momentindeki hata miktarının H/r oranı ile değişimi .

6. SONUÇLAR

Winkler yönteminde kullanılan zemin modülünü elde etmek için boyutsuz parametrik bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla grafikler sunulmuş ve denklemler önerilmiştir. Tekil yük durumunda, zemin modülü doğru hesaplandığı ölçüde Winkler modelinin tatminkar sonuç vereceği görülmektedir. Önerilen yöntem pratik mühendislik problemleri için yeterli doğrulukta sonuç verebilmektedir.

SEMBOLLER

| | |
|----------------------|--|
| D | : Plağın eğilme rijitliği |
| E_s, ν_s | : Zeminin elastisite modülü ve Poisson oranı |
| H | : Zemin derinliği |
| k | : Zemin modülü |
| r | : Plağın karakteristik uzunluğu |
| $2t$ | : Zemindeki kesme deformasyonunu temsil eden parametre |
| K_v | : Vlasov modeli için boyutsuz zemin modülü |
| K_w | : Winkler modeli için boyutsuz zemin modülü |
| $[K]$ | : Sistem rijitlik matrisi |
| $\{W\}, \{F\}$ | : Global deplasman ve yük vektörleri |
| ∇^4, ∇^2 | : Biharmonik ve Laplace operatörleri |

Kaynaklar

- [1] Vlasov, V.Z. and Leont'ev, N.N., Beams, plates and shells on elastic foundations, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, Israel, 1966.
- [2] Çelik, M., Saygun, A., A method for the analysis of plates on a two-parameter foundation, International Journal of Solids and Structures, 36, 629-637, 1991.
- [3] Vallabhan, C.V.G. and Das, Y.C., A refined model for beams on elastic foundations, International Journal of Solids and Structures, 27, 629-637, 1991.
- [4] Vallabhan, C.V.G: and Daloglu, A. T., Consistent FEM-Vlasov model for plates on layered soil, ASCE, *Journal of Structural Engineering*, 125, 108-113, 1999.
- [5] Turhan, A., A Consistent Vlasov Model for the Analysis of Plates on Elastic Foundations using Finite Element Method, PhD dissertation, Dept. of Civil Engrg., Texas Tech University, Lubbock Texas, 1992.
- [6] Kolar, V., and Nemeč, I., Modelling of Soil Structure Interaction, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [7] Daloglu, A. and Vallabhan, C.V.G., Values of k for slab on Winkler foundation, *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 126, 463-471, 2000.