

## Bir Eğri ve Üç Denklem Üzerine Bir Çalışma

Tuba AĞIRMAN AYDIN\*<sup>1</sup> , Mehmet SEZER<sup>2</sup> , Seda ÇAYAN<sup>3</sup> , Rabil AYAZOĞLU<sup>4</sup> 

<sup>1,4</sup>Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, 69000, Bayburt, Türkiye  
<sup>2,3</sup>Celal Bayar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 45000, Manisa, Türkiye

(Alınış / Received: 04.11.2020, Kabul / Accepted: 09.03.2021, Online Yayınlanma / Published Online: 15.08.2021)

### Anahtar Kelimeler

Bernstein polinom yaklaşımı,  
Hermite polinom yaklaşımı,  
Sabit genişlikli eğri,  
Frenet çatısı

**Özet:** Kinematik, mühendislik, sanat, cam dizayn ve geometri gibi birçok alanda çok özel bir yere sahip olan sabit genişlikli eğriler bu başlık altında özel olarak ele alınmıştır. Bu çalışmada sabit genişlikli eğrileri karakterize eden bir diferansiyel denklem sisteminin vasıtasıyla elde edilen üç diferansiyel denklem irdelenmiştir. Bu diferansiyel denklemler farklı değişkenlere bağlı üçüncü mertebeden, değişken katsayılı, homojen, lineer diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin farklı iki polinom yaklaşımı ile yaklaşık çözümleri hesaplanıp hata analizleri yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar sayısal bir örnek üzerinden analiz edilerek en iyi sonuç veren yaklaşım metodu tespit edilmiştir. Bu denklemler farklı uzaylarda farklı çatılara göre farklı eğri tipleri için de bir karakterizasyon teşkil edebilmektedir. Dolayısıyla bu çalışma sadece bu eğri tipi için değil benzer denklemlerle ifade edilebilen tüm eğrilerin geometrisi için önem arz etmektedir.

## A Study on a Curve and Three Equations

### Keywords

Bernstein polynomial  
approximation,  
Hermite polynomial  
approximation,  
Fixed-width curves,  
Frenet frame

**Abstract:** The fixed-width curves, which have a very special place in many fields such as kinematics, engineering, art, cam design and geometry, are specially discussed under this title. In this study, three differential equations obtained by means of a system of differential equations characterizing fixed-width curves are examined. These differential equations are third order, variable coefficient, homogeneous, linear differential equations based on different variables. Approximate solutions of these equations are calculated with two different polynomial approximations and error analysis is made for the solutions. Thus, the best approach method is determined for the most accurate result. Also, these equations can constitute a characterization for different types of curves according to different frames in different spaces. Therefore, this study is important not only for this curve type but also for the geometry of all curves that can be expressed with similar equations.

### 1. Giriş

Bir eğri üzerinde teğetlerin paralel ve zıt yönlü olduğu iki nokta, "karşit noktalar" olarak adlandırılır. Bu iki nokta arasındaki mesafe eğrinin genişliği olarak ifade edilir. Bir doğrultu ve bu doğrultuya dik, birine paralel bir çift destek doğrusu arasındaki mesafe de bir figürün seçilen doğrultuda genişliği olarak tanımlanır. Üzerindeki tüm karşit noktalar arasındaki mesafe sabit ve birbirine eşit olan eğri sabit genişlikli eğri olarak tanımlanırken her doğrultuda aynı genişliğe sahip olan şekiller de sabit genişlikli şekiller olarak adlandırılır [1, 2].

Bu özel eğri ve şekiller özelliklerinin bir kısmı ile birlikte uzun süredir bilinmektedir. İlk olarak Euler onları daire şeklindeki eğriler için Latince "orbiforms" adı altında inceledi. Euler sınırları bir

hiposikloidin evrimi olarak gösterilebilecek sabit genişlikli eğrilerle ilgilendi [3]. Sonrasında bir mühendis ve matematikçi olan Reuleaux, mühendislikteki kinematik üzerine yayınladığı kitabında sabit genişlikteki şekilleri de ele aldı. Bu kitapta, daireden sonra belki de en basit sabit genişlikli şekil olan ve bugün kendi adını taşıyan üçgeni tanımladı. Bu geometrik şekil zaten uzun zamandır biliniyordu ancak Reuleaux sabit genişlik özelliklerine ilk odaklanan kişi oldu [4]. Reuleaux üçgeni bir eşkenar üçgenden yola çıkılarak elde edilir, benzer mantıkla farklı düzgün çokgenler üzerine sabit genişlikli birçok şekil oluşturmak mümkündür.

Sabit genişlikli şekiller kendi yüzey alanından geçmeyen konveks şekillerdir. Onları farklı kılan özelliklerinden dolayı birçok geometrici bu eğri tipine ilgi göstermiştir [1, 5, 6]. Bilginin birçok

\*İlgili yazar: tubaaydin@bayburt.edu.tr

dalında bu karakterizasyona sahip şekillerin kullanımını gözlemek mümkündür. Bu eğrilerin mühendislikte kamlar (mil dirsekleri, makine parçası), kare delik açan matkaplar ve döner, içten yanmalı motorlardaki pistonlar, rögar kapakları gibi birçok farklı uygulaması vardır. Eski sinema filmi projektörlerinin çoğunda kullanılan basit bir cam mekanizmasının bir parçası, özel bir sabit genişlikli eğridir [7, 8]. Su çarkları bu eğri tipini kapsayan sistem üzerine kurulmuştur. Kablosuz ağların lokalizasyon ve kapsama alanlarında kullanılan temel eğriler bu türdedir [9-11]. Sanatta, sabit genişlikli eğri figürlerinin önemli rol oynadığı birçok dekoratif uygulama vardır. Özellikle en yaygın bilinen sabit genişlikli şekil olan çember veya dairesel kesitlere sahip silindirik birçok mekanizmada, mimaride, tasarımda kullanılmaktadır. Çemberin ve dairesel parçanın daha çok tercih edilmesini sağlayan, denklem ve uygulama anlamında erişilebilir olmasıdır. Oysaki çember dışında sabit genişlikli farklı eğrilerin kullanılmasının birtakım avantajlar ortaya koyduğu farklı çalışma alanlarında gözlemlenmiştir. Örneğin yan arakesiti Reuleaux üçgeni biçiminde olan bir karayolu tankerinin devrilme olasılığının yan arakesiti çember biçiminde olan tankerin devrilme olasılığından daha az olduğu yapılan hesaplamalarla ortaya konulmuştur [12]. Bunun gibi örnekler çoğaltılabilir. Burada daha avantajlı bir durumun tercih edilmemesinin gerekçesi olarak alternatiflere ilişkin bilginin yetersiz olması gösterilebilir. Bu noktada böyle bir açığı kapatmak adına farklı uzaylarda yapılmış birçok çalışma bulmak mümkündür [13, 14].

Bu makalede öncelikle diferansiyel denklem sistemi yoluyla bu eğrileri karakterize eden benzer yapıda üç farklı üçüncü mertebeden, değişken katsayılı, homojen, lineer diferansiyel denklem elde edilmiştir. Sonra bu diferansiyel denklemler için farklı iki yöntemle yaklaşık çözümler hesaplanarak hata analizleri yapılmıştır. Sayısal bir örnekle bu eğriler için en uygun yaklaşım metodu hata analizleri yardımıyla saptanmıştır. Sabit genişlikli eğri tipinin diferansiyel denklemlerle ifadesi her alanda rahatça kullanımına ortam hazırlayacaktır. Ayrıca aynı başlık altındaki farklı modellerin deneyimlenebilme imkanı, kullanımda daha yüksek verim sağlayabilecektir.

Bu çalışmada hesaplamalar Mathematica programı ile yapılmıştır.

## 2. Materyal ve Metot

Bu bölümde sabit genişlikli eğrileri karakterize eden üç farklı diferansiyel denklem elde edilerek bu denklemlerin yaklaşık çözümleri için iki farklı metot verilir.

### 2.1. Sabit genişlikli uzay eğrileri

$\gamma$  Öklid uzayında eğrilik ve torsiyonu sıfır olmayan  $C^3$  sınıfından birim hızlı basit kapalı bir eğri ve eğri

üzerindeki  $\gamma(s)$  ve  $\gamma^*$  karşıt iki nokta olsun.  $\gamma$  eğrisinin vektör pozisyonu

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\vec{t} + \mu(s)\vec{n} + \delta(s)\vec{b} \quad (1)$$

ile ifade edilir, burada  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  Frenet çatı bileşenleridir [2]. Bu eşitlik  $s$  yay uzunluğu parametresine göre diferansiyellenerek ve Frenet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^*}{ds} = \vec{t}^* \frac{ds^*}{ds} = & \left(1 + \frac{d\lambda}{ds} - \mu(s)\kappa\right) \vec{t} \\ & + \left(\lambda(s)\kappa + \frac{d\mu}{ds} - \delta(s)\tau\right) \vec{n} \\ & + \left(\frac{d\delta}{ds} + \mu(s)\tau\right) \vec{b} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Karşıt noktalarda  $\vec{t} = -\vec{t}^*$  olduğundan

$$\begin{aligned} -\frac{ds^*}{ds} = 1 + \frac{d\lambda}{ds} - \mu(s)\kappa \\ \lambda(s)\kappa + \frac{d\mu}{ds} - \delta(s)\tau = 0 \\ \frac{d\delta}{ds} + \mu(s)\tau \end{aligned} \quad (2)$$

bulunur.  $\Delta\varphi$  kontengenez açısı olmak üzere  $\gamma$  eğrisinin eğriliğinin  $\kappa = \lim_{\Delta s} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$  olduğu bilinmektedir. Böylece (2) diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \mu - f(\varphi) \quad (3.1)$$

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \rho\tau\delta - \lambda \quad (3.2) \quad (3)$$

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = -\rho\tau\mu \quad (3.3)$$

formunda yazılabilir. Burada  $f(\varphi) = \rho + \rho^*$  ve  $\rho = \frac{1}{\kappa}, \rho^* = \frac{1}{\kappa^*}$  eğrinin  $\gamma(s)$  ve  $\gamma^*(s)$  noktalarında eğrilik yarıçapıdır. Diğer taraftan eğer  $\gamma(s)$  ve  $\gamma^*(s)$  karşıt noktaları arasındaki mesafe sabit ise  $\|\gamma^* - \gamma\|^2 = \|d\|^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \delta^2 = \text{sabit}$  yazılır.  $\lambda^2 + \mu^2 + \delta^2 = \text{sabit}$  eşitliği  $\varphi$  ye göre diferansiyellenirse  $\lambda\lambda' + \mu\mu' + \delta\delta' = 0$  elde edilir. Bu eşitlik (3) sistemi yardımıyla  $\lambda(\lambda' - \mu) = 0$  eşitliğine indirgenebilir. Burada iki temel durum mümkündür:

- I. durum:  $\lambda = 0$ ,
- II. durum:  $\lambda' - \mu = 0$ .

**I. durumda** (3.1) eşitliğinden  $\mu = f(\varphi)$  elde edilir.  $\lambda = 0$  ve  $\mu = f(\varphi)$  için (3) diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \mu = f(\varphi) \\ \frac{d\mu}{d\varphi} = \rho\tau\delta \\ \frac{d\delta}{d\varphi} = -\rho\tau\mu \end{aligned}$$

biçimine dönüşür.  $\delta$  ve türevleri yok edilerek elde edilen  $\mu$  katsayısına bağlı ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer denklemden A ve B integrasyon sabiti olmak üzere

$$\mu = A \cos \int_0^\varphi \rho \tau d\varphi + B \sin \int_0^\varphi \rho \tau d\varphi = f(\varphi)$$

elde edilir.  $\mu$  ve türevleri yok edilerek elde edilen denklemde de  $\delta$  aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\delta = -A \sin \int_0^\varphi \rho \tau d\varphi + B \cos \int_0^\varphi \rho \tau d\varphi.$$

Bu eşitlikler (1) denklemde kullanılırsa,  $\lambda = 0$  için eğrinin integral karakterizasyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\gamma^* = \gamma + [A \cos \int_0^\varphi \rho \tau d\varphi + B \sin \int_0^\varphi \rho \tau d\varphi] \vec{n} + [-A \sin \int_0^\varphi \rho \tau d\varphi + B \cos \int_0^\varphi \rho \tau d\varphi] \vec{b}.$$

Ayrıca bu durumda eğrinin sabit genişlik değeri yani karşıt noktalar arasındaki mesafe  $\|d\| = \sqrt{A^2 + B^2}$  olarak elde edilir.

**II. durumda**  $\lambda' = \mu$  olacağından (3.1) eşitliğinden  $f = 0$  elde edilir.  $f = 0$  için  $d$  mesafesi sabit olacağından  $\gamma$  eğrisi sabit genişlikli olur. Öyleyse (3) sisteminde  $f = 0$  alınırsa sabit genişlikli eğrileri karakterize eden aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \mu \quad (4.1),$$

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \rho\tau\delta - \lambda \quad (4.2),$$

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = -\rho\tau\mu \quad (4.3). \quad (4)$$

(4) diferansiyel denklem sisteminden  $\mu, \delta$  ve bunların türevleri yok edilirse aşağıdaki 3. mertebeden değişken katsayılı, homojen, lineer diferansiyel denklem elde edilir:

$$\rho\tau\lambda''' - (\rho\tau)'\lambda'' + (\rho\tau + \rho^3\tau^3)\lambda' - (\rho\tau)'\lambda = 0 \quad (5)$$

Bu Öklid uzayında sabit genişlikli eğrileri  $\lambda$  katsayısına bağlı ifade eden diferansiyel denklemdir. Benzer biçimde (4) diferansiyel denklem sisteminden  $\mu, \delta$  ve bunların türevleri yok edilerek aşağıdaki teorem yazılabilir.

**Teorem 1:**  $\gamma$  Öklid uzayında eğrilik ve torsiyonu sıfır olmayan, birim hızlı, basit kapalı bir eğri olsun.  $\gamma$  sabit genişlikli ise eğriyi  $\mu$  katsayısına bağlı karakterize eden diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\rho\tau)'}\mu''' + \left(\frac{1}{(\rho\tau)'}\right)'\mu'' + \frac{1 + (\rho\tau)^2}{(\rho\tau)'}\mu' \\ + \left[\left(\frac{1 + (\rho\tau)^2}{(\rho\tau)'}\right)' + \rho\tau\right]\mu \\ = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Yine aynı düşünceyle (4) diferansiyel denklem sisteminden  $\lambda, \mu$  ve bunların türevleri yok edilerek aşağıdaki teorem yazılabilir.

**Teorem 2:**  $\gamma$  Öklid uzayında eğrilik ve torsiyonu sıfır olmayan, birim hızlı, basit kapalı bir eğri olsun.  $\gamma$  sabit genişlikli ise eğriyi  $\delta$  katsayısına bağlı karakterize eden diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho\tau}\delta''' + 2\left(\frac{1}{\rho\tau}\right)'\delta'' + \left[\left(\frac{1}{\rho\tau}\right)'' + \frac{1 + (\rho\tau)^2}{\rho\tau}\right]\delta' \\ + (\rho\tau)'\delta = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Öklid uzayında Frenet çatısına göre sabit genişlikli eğrilerin vektör pozisyonu (5), (6) ve (7) ile ifade edilebilir. Bunlar üçüncü mertebeden değişken katsayılı, homojen, lineer diferansiyel denklemlerdir. Böyle diferansiyel denklemler için nümerik çözüm elde edilemez ancak Legendre, Hermite, Taylor, Bernstein gibi farklı polinom yaklaşımlarıyla geliştirilen matris sıralama yöntemleri kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilebilir [15,16,17]. Bu çalışmada yaklaşık çözüm için Bernstein ve Hermite polinom yaklaşımı kullanılmıştır. Öncelikle,  $k_1$  ve  $k_2$  eğriliklerinin s yay uzunluğu parametresine bağlı olduğu bu denklemler (5) için

$$P_0(s) = -(\rho\tau)', P_1(s) = (\rho\tau + \rho^3\tau^3), P_2(s) = -(\rho\tau)', P_3(s) = \rho\tau$$

(6) için

$$\begin{aligned} P_0(s) &= \left(\frac{1 + (\rho\tau)^2}{(\rho\tau)'}\right)' + \rho\tau, P_1(s) \\ &= \frac{1 + (\rho\tau)^2}{(\rho\tau)'}, P_2(s) \\ &= \left(\frac{1}{(\rho\tau)'}\right)', P_3(s) = \frac{1}{(\rho\tau)'} \end{aligned}$$

(7) için

$$\begin{aligned} P_0(s) &= (\rho\tau)', P_1(s) \\ &= \left(\frac{1}{\rho\tau}\right)'' + \frac{1 + (\rho\tau)^2}{\rho\tau}, P_2(s) \\ &= 2\left(\frac{1}{\rho\tau}\right)', P_3(s) = \frac{1}{\rho\tau} \end{aligned}$$

olmak üzere genel biçimde

$$\sum_{k=0}^m P_k(s) X^{(k)}(s) = 0 \quad (m = 3) \quad (8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada (5) için  $X = \lambda$ , (6) için  $X = \mu$  ve (7) için  $X = \delta$  olacağı açıktır.

## 2.2. Bernstein polinom yaklaşımı metodu

(8) genel denkleminin

$$X(s) \cong X_N(s) = \sum_{n=0}^N a_n B_{n,N}(s) \quad (N \geq 3) \quad (9)$$

şeklinde Bernstein polinomları formunda bir yaklaşık çözümünü olduğu kabul edilsin. n. dereceden Bernstein polinomları  $[0, R]$  aralığında aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B_{n,N}(s) = \binom{N}{n} \frac{s^n (R-s)^{N-n}}{R^N} \quad (n = 0, 1, \dots, N).$$

Burada

$$(R-s)^{N-n} = \sum_{i=0}^{N-n} \binom{N-n}{i} (-1)^i R^{N-n-i} s^i$$

eşitliği kullanılırsa Bernstein taban polinomu için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$B_{n,N}(s) = \sum_{i=0}^{N-n} \binom{N}{n} \binom{N-n}{i} \frac{(-1)^i}{R^{n+i}} s^{n+i},$$

R tanımlanan aralığın maksimum değeridir [17, 18]. (9) yaklaşık çözümünü ve türevi

$$\mathbf{B}_N(s) = [\mathbf{B}_{0,N}(s) \quad \mathbf{B}_{1,N}(s) \quad \dots \quad \mathbf{B}_{n,N}(s)],$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

şeklinde tanımlanan matrisler kullanılarak

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}_N(s)\mathbf{A}, \mathbf{X}^{(k)}(s) = \mathbf{B}_N^{(k)}(s)\mathbf{A} \quad (10)$$

biçiminde ifade edilir. Bernstein taban polinomunun katsayıları

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i}}{R^j} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0N} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N0} & d_{N1} & \dots & d_{NN} \end{bmatrix}$$

tanımlaması kullanılarak

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{R} & \frac{3}{R^2} & -\frac{1}{R^3} \\ 0 & \frac{3}{R} & -\frac{6}{R^2} & \frac{3}{R^3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{R^2} & -\frac{3}{R^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R^3} \end{bmatrix}$$

matrisi ile ifade edilir. Dolayısıyla Bernstein taban polinomu,  $\mathbf{S}(s) = [1 \quad s \quad \dots \quad s^N]$  olmak üzere aşağıdaki matris eşitliği ile ifade edilir:

$$\mathbf{B}_N(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{D}^T. \quad (11)$$

Diğer taraftan bu yaklaşık çözümün türevinin

$$\mathbf{B}_N^{(k)}(s) = \mathbf{S}^{(k)}(s)\mathbf{D}^T \quad (12)$$

şeklinde matris formunda ifadesi için S matrisinin türevleri

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(s) &= \mathbf{S}\mathbf{B} \\ \mathbf{S}''(s) &= \mathbf{S}'\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{B}^2 \\ &\vdots \\ \mathbf{S}^{(k)}(s) &= \mathbf{S}^{(k-1)}\mathbf{B} = \dots = \mathbf{S}\mathbf{B}^k \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada B matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Son olarak (11) ve (12) matris formlarının (10) da yerine konulmasıyla aşağıdaki matris bağıntıları elde edilir:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{S}\mathbf{D}^T\mathbf{A}, \mathbf{X}^{(k)}(s) = \mathbf{S}\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A}. \quad (13)$$

Şimdi bu (13) eşitlikleri (8) de kullanılırsa genel formda

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (14)$$

matris denklemini elde edilir. Bu denklemde  $s_i = a + \frac{b-a}{N}i$ , ( $a \leq s \leq b$ ) sıralama noktaları kullanılarak (8) eşitliği aşağıdaki gibi matris denklemlerinin bir sistemi olarak ifade edilir:

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(s_i)\mathbf{S}(s_i)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} = \mathbf{G}(s_i),$$

( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Bu temel matris denklemini kapalı formda

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k\mathbf{S}\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} = \mathbf{G}. \quad (15)$$

biçiminde yazılabilir. Bu bağıntı

$$\mathbf{W}_B = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k\mathbf{S}\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T,$$

$$\mathbf{W}_B = [w_{kh}], \quad (k, h = 0, \dots, m)$$

olmak üzere

$$W_B A = G \text{ veya } [W_B; G] = A \quad (16)$$

biçiminde kısaltılabilir. Diğer taraftan koşulların matris denklemi

$$S(0)B^k D^T A = [\alpha_k], \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1)$$

eşitliği yardımıyla matris formunda

$$U_k A = [\alpha_k] \text{ veya } [U_k; \alpha_k] \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (17)$$

biçiminde ifade edilir. (17) satır matrisleri (16) matrisinin herhangi (N) satırı ile değiştirilerek,  $[\widetilde{W}_B; \widetilde{G}]$  arttırılmış matrisi hesaplanır ve  $A = (\widetilde{W}_B)^{-1} \widetilde{G}$  olmak üzere bilinmeyenler matrisi bulunur. Son olarak bu  $\alpha_k$  değerleri (9) denkleminde yerine yazılırsa (8) denkleminin Bernstein polinom yaklaşımı ile yaklaşık çözümü elde edilir.

Özel olarak kesme sınırı  $N = 3$  alınıp  $0 \leq s \leq 2\pi$  aralığında (8) denkleminin (9) formunda yaklaşık çözümü elde edilecektir. Öncelikle  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ve türevleri

$$B_3(s) = [B_{0,3}(s) \quad B_{1,3}(s) \quad \dots \quad B_{3,3}(s)] \\ A = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$$

olmak üzere

$$X(s) = B_3(s)A \text{ ve } X^{(k)}(s) = B_3^{(k)}(s)A$$

şeklinde elde edilir. Burada  $[0, 2\pi]$  aralığında

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2\pi} & \frac{3}{4\pi^2} & -\frac{1}{8\pi^3} \\ 0 & \frac{3}{2\pi} & -\frac{3}{2\pi^2} & \frac{3}{8\pi^3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4\pi^2} & -\frac{3}{8\pi^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8\pi^3} \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S(s) = [1 \quad s \quad s^2 \quad s^3]$$

matrisleri kullanılarak

$$B_3(s) = S(s)D^T, B_3^{(k)}(s) = S^{(k)}(s)D^T$$

eşitlikleri yazılır ve aşağıdaki matris bağıntıları elde edilir:

$$X(s) = SD^T A, X'(s) = SBD^T A, \\ X''(s) = SB^2 D^T A, X'''(s) = SB^3 D^T A.$$

Bu eşitlikler (8) de kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{m=3} P_k(s)S(s)B^k D^T A = G$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$s_0 = 0, \quad s_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad s_2 = \frac{4\pi}{3}, \quad s_3 = 2\pi$$

sıralama noktaları kullanılırsa aşağıdaki matrislerin oluşacağı açıktır:

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_k\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_k\left(\frac{4\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_k(2\pi) \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \left(\frac{2\pi}{3}\right) & \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 & \left(\frac{2\pi}{3}\right)^3 \\ 1 & \left(\frac{4\pi}{3}\right) & \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 & \left(\frac{4\pi}{3}\right)^3 \\ 1 & (2\pi) & (2\pi)^2 & (2\pi)^3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Öyleyse (8) eşitliği  $m = 3$  için aşağıdaki gibi matris denklemlerinin bir sistemi olarak ifade edilir:

$$\sum_{k=0}^3 P_k(s_i)S(s_i)B^k D^T A = G(s_i),$$

( $i = 0, 1, \dots, 3$ ). Bu temel matris denklemi kapalı formda

$$\sum_{k=0}^3 P_k SB^k D^T A = G.$$

biçiminde yazılabilir. Bu bağıntı

$$W_B = \sum_{k=0}^3 P_k SB^k D^T, \\ W_B = [w_{kh}], \quad (k, h = 0, \dots, 3)$$

olmak üzere

$$W_B A = G \text{ veya } [W_B; G] = A$$

biçiminde kısaltılabilir. Diğer taraftan koşullar için matris formu

$$U_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ U_1 = \left[ -\frac{3}{2\pi} \quad \frac{3}{2\pi} \quad 0 \quad 0 \right] \\ U_2 = \left[ \frac{3}{2\pi^2} \quad -\frac{3}{\pi^2} \quad \frac{3}{2\pi^2} \quad 0 \right]$$

olmak üzere

$$U_k A = [\alpha_k] \text{ veya } [U_k; \alpha_k] \quad (k = 0, 1, 2)$$

biçiminde elde edilir. Bu satır matrisleri  $W_B$  matrisinin herhangi 3 satırı ile değiştirilerek,  $[\widetilde{W}_B; \widetilde{G}]$  arttırılmış matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} & ; & g(0) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} & ; & \alpha_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & ; & \alpha_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} & ; & \alpha_2 \end{bmatrix},$$

burada  $w_{ij}$  ( $i = 0, j = 0, \dots, 3$ ) değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} w_{00} &= P_0(0) - \frac{3}{2\pi} P_1(0) + \frac{3}{2\pi^2} P_2(0) \\ &\quad - \frac{3}{4\pi^3} P_3(0), \\ w_{01} &= \frac{3}{2\pi} P_1(0) - \frac{3}{\pi^2} P_2(0) + \frac{9}{4\pi^3} P_3(0), \\ w_{02} &= \frac{3}{2\pi^2} P_2(0) - \frac{9}{4\pi^3} P_3(0), \\ w_{03} &= \frac{3}{4\pi^3} P_3(0). \end{aligned}$$

Son olarak  $(\widetilde{W}_B)^{-1}$  matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4\pi}{3} & \frac{2\pi^2}{3} \\ 1 & -\frac{w_{00} + w_{01} + w_{02}}{w_{03}} & -\frac{2\pi(w_{01} + 2w_{02})}{3w_{03}} & -\frac{2\pi^2 w_{02}}{3w_{03}} \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır ve  $\mathbf{A} = (\widetilde{W}_B)^{-1} \widetilde{\mathbf{G}}$  olmak üzere bilinmeyenler matrisi  $\mathbf{A}$  için  $a_0, a_1, \dots, a_3$  aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 \\ a_1 &= \alpha_0 + \frac{2\pi}{3} \alpha_1 \\ a_2 &= \alpha_0 + \left(\frac{4\pi}{3}\right) \alpha_1 + \left(\frac{2\pi^2}{3}\right) \alpha_2 \\ a_3 &= \left(-\frac{w_{00} + w_{01} + w_{02}}{w_{03}}\right) \alpha_0 \\ &\quad + \frac{2\pi(w_{01} + 2w_{02})}{3w_{03}} \alpha_1 \\ &\quad - \left(\frac{2\pi^2 w_{02}}{3w_{03}}\right) \alpha_2. \end{aligned}$$

Eğer bu  $a_k$  bilinmeyenleri (9) denklemine yerine yazılırsa (8) denkleminin Bernstein polinom yaklaşımı ile yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} X(s) &= a_0 + \frac{3}{2\pi} (a_1 - a_0) s \\ &\quad + \frac{3}{4\pi^2} (a_0 - 2a_1 + a_2) s^2 \\ &\quad + \frac{1}{8\pi^3} (-a_0 + 3a_1 - 3a_2 \\ &\quad + a_3) s^3 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu Öklid uzayında Frenet çatısına göre sabit genişlikli eğrileri temsil eden (5), (6) ve (7) diferansiyel denklemleri için Bernstein polinom yaklaşımıyla bir çözümdür. Böylece eğriyi belirleyen  $\lambda, \mu, \delta$  katsayı fonksiyonları elde edilmiş olur.

### 2.3. Hermite Polinom Yaklaşımı

(8) genel denkleminin

$$X_N(s) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(s) \quad (N \geq 3) \quad (18)$$

şeklinde Hermite polinomları formunda bir yaklaşık çözümü olduğu kabul edilsin. Burada  $a_n$  bilinmeyen Hermite katsayılarıdır ve Hermite polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır [2]:

$$H_n(s) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)! k!} 2^{n-2k} s^{n-2k}.$$

Öncelikle (18) yaklaşık çözümünden hareket edilerek çözüm ve denklem matris formunda elde edilsin. Bunun için (18) ile ifade edilen Hermite polinom çözümü ve türevleri,

$$\begin{aligned} H^{(k)}(s) &= [H_0^{(k)}(s) \ H_1^{(k)}(s) \ \dots \ H_N^{(k)}(s)], \\ H(s) &= [H_0(s) \ H_1(s) \ \dots \ H_N(s)], \\ \mathbf{A} &= [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T \end{aligned}$$

olarak tanımlanan matrisler kullanılarak

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{A} \text{ ve } \mathbf{X}^{(k)}(s) = \mathbf{H}^{(k)}(s)\mathbf{A} \quad (19)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Ayrıca  $\mathbf{H}(s)$  ve türevi matris formunda

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{F} \text{ ve } \mathbf{H}^{(k)}(s) = \mathbf{S}^{(k)}(s)\mathbf{F}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{F}\mathbf{A} \text{ ve } \mathbf{X}^{(k)}(s) = \mathbf{S}^{(k)}(s)\mathbf{F}\mathbf{A} \quad (20)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0 0! 2^0}{0!0!} & 0 & \frac{(-1)^1 2! 2^0}{1!0!} & \dots & \frac{(-1)^{\frac{N}{2}} N! 2^0}{\left(\frac{N}{2}\right)!0!} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^0 1! 2^1}{0!1!} & 0 & \dots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}} N! 2^1}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!1!} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^0 2! 2^2}{0!2!} & \dots & \frac{(-1)^{\frac{N}{2}-1} N! 2^2}{\left(\frac{N}{2}-1\right)!2!} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(-1)^0 N! 2^N}{0!N!} & \frac{(-1)^0 N! 2^N}{N \text{ çift} \quad N \text{ tek}} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. (20) eşitlikleri (8) de kullanılırsa aşağıdaki matris denklemi elde edilir:

$$\sum_{k=0}^N \mathbf{P}_k(s) \mathbf{S}(s) \mathbf{B}^k \mathbf{F} \mathbf{A} = \mathbf{G}. \quad (21)$$

Bu temel matris denklemini kısaca

$$\sum_{k=0}^N P_k \mathbf{S} B^k \mathbf{F} \mathbf{A} = \mathbf{G}. \quad (22)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece (8) e karşılık gelen denklem kapalı matris formunda (22) biçiminde ifade edilmiş olur. Bu bağıntı

$$\mathbf{W}_H = \sum_{k=0}^N P_k \mathbf{S} B^k \mathbf{F},$$

$$\mathbf{W}_H = [w_{kh}], \quad (k, h = 0, \dots, N)$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_H \mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ veya } [\mathbf{W}_H; \mathbf{G}] = \mathbf{A} \quad (23)$$

biçiminde kısaltılabilir. Diğer taraftan koşulların matris denklemini

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{S}(0) \mathbf{B}^k \mathbf{F} \mathbf{A} = [\alpha_k], \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_k \mathbf{A} = [\alpha_k] \text{ veya } [\mathbf{U}_k; \alpha_k] \quad (24)$$

biçiminde elde edilir. (24) satır matrisleri (23) matrisinin herhangi 3 satırı ile değiştirilerek,

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}}_H)^{-1} \widetilde{\mathbf{G}}$$

olmak üzere bilinmeyenler matrisi bulunur.

Özel olarak kesme sınırı  $N = 3$  alınarak (8) denkleminin bu defa (18) formunda yaklaşık çözümü elde edilecektir. Bu kesme sınırı için  $0 \leq s \leq 2\pi$  aralığında sıralama noktaları yine  $0 \leq s_0 < \dots < s_3 \leq 2\pi$  şeklinde olur.  $X_n(s)$ , (8) denkleminin bir çözümü olduğundan sıralama noktalarında (8) denklemini sağlar. Öyleyse  $X_n(s)$  yaklaşık çözümü  $s_i$  sıralama noktalarıyla birlikte (8) denkleminde yerine yazılırsa  $a_0, a_1, \dots, a_3$  katsayılarını içeren bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem kullanılarak denklemin her bir terimi matris formunda ifade edilebilir ve matris sıralama yöntemi kullanılarak çözüm elde edilir. Bu durumda (21) ifadesinde

$$s_0 = 0, \quad s_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad s_2 = \frac{4\pi}{3}, \quad s_3 = 2\pi$$

sıralama noktaları kullanılırsa aşağıdaki matrislerin oluşacağı açıktır:

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_k\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_k\left(\frac{4\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_k(2\pi) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \left(\frac{2\pi}{3}\right) & \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 & \left(\frac{2\pi}{3}\right)^3 \\ 1 & \left(\frac{4\pi}{3}\right) & \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 & \left(\frac{4\pi}{3}\right)^3 \\ 1 & (2\pi) & (2\pi)^2 & (2\pi)^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(s_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ayrıca  $N=3$  için

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Öyleyse (8) eşitliği aşağıdaki gibi matris denklemlerinin bir sistemi olarak ifade edilir:

$$\sum_{k=0}^3 P_k(s_i) \mathbf{S}(s_i) \mathbf{B}^k \mathbf{F} \mathbf{A} = \mathbf{G}(s_i),$$

( $i = 0, 1, \dots, 3$ ). Bu temel matris denklemini

$$\mathbf{W}_H = \sum_{k=0}^3 P_k \mathbf{S} B^k \mathbf{F},$$

$$\mathbf{W}_H = [w_{kh}], \quad (k, h = 0, \dots, 3)$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_H \mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ veya } [\mathbf{W}_H; \mathbf{G}] = \mathbf{A} \quad (25)$$

biçiminde kısaltılabilir. Diğer taraftan koşulların matris denklemini

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{S}(0) \mathbf{F} = [1 \ 0 \ -2 \ 0],$$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{S}(0) \mathbf{B} \mathbf{F} = [0 \ 2 \ 0 \ -12],$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{S}(0) \mathbf{B}^2 \mathbf{F} = [0 \ 0 \ 8 \ 0]$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_k \mathbf{A} = [\alpha_k] \text{ veya } [\mathbf{U}_k; \alpha_k] \quad (k = 0, 1, 2) \quad (26)$$

biçiminde elde edilir. (26) satır matrisleri (25) matrisinin herhangi 3 satırı ile değiştirilerek,  $[\widetilde{\mathbf{W}}_H; \widetilde{\mathbf{G}}]$  matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} & ; & g(0) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} & ; & \alpha_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & ; & \alpha_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} & ; & \alpha_2 \end{bmatrix},$$

burada  $w_{ij}$  ( $i = 0, j = 0, \dots, 3$ ) değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$w_{00} = P_0(0), w_{01} = 2P_1(0),$$

$$w_{02} = -2P_0(0) + 8P_2(0),$$

$$w_{03} = -12P_1(0) + 48P_3(0).$$

Son olarak  $(\widetilde{\mathbf{W}}_H)^{-1}$  matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8P_3(0)} & -\frac{P_0(0)}{8P_3(0)} & -\frac{P_1(0) - 4P_3(0)}{8P_3(0)} & -\frac{P_2(0)}{8P_3(0)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{48P_3(0)} & -\frac{P_0(0)}{48P_3(0)} & -\frac{P_1(0)}{48P_3(0)} & -\frac{P_2(0)}{48P_3(0)} \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır.  $\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}}_H)^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}$  olmak üzere bilinmeyenler matrisi bulunur. Böylece bilinmeyenler matrisi  $\mathbf{A}$  için  $a_0, a_1, \dots, a_3$  aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_2 \\ a_1 &= -\frac{P_0(0)}{8P_3(0)}\alpha_0 - \frac{P_1(0) - 4P_3(0)}{8P_3(0)}\alpha_1 \\ &\quad - \frac{P_2(0)}{8P_3(0)}\alpha_2 \\ a_2 &= \frac{1}{8}\alpha_2 \\ a_3 &= -\frac{P_0(0)}{48P_3(0)}\alpha_0 - \frac{P_1(0)}{48P_3(0)}\alpha_1 \\ &\quad - \frac{P_2(0)}{48P_3(0)}\alpha_2. \end{aligned}$$

Eğer bu  $a_k$  bilinmeyenleri (18) denkleminde yerine yazılırsa (8) denkleminin Hermite polinom yaklaşımı ile yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi bulunur:

$$X(s) = a_0 + 2sa_1 + (4s^2 - 4)a_2 + (8s^3 - 12s)a_3.$$

Bu Öklid uzayında Frenet çatısına göre sabit genişlikli eğrileri temsil eden (5), (6) ve (7) diferansiyel denklemleri için Hermite polinom yaklaşımıyla bir çözümdür. Böylece eğriyi belirleyen  $\lambda, \mu, \delta$  katsayı fonksiyonları elde edilmiş olur.

#### 2.4. Rezidüel Hata Analizi

(9) denklemleri ile verilen kesilmiş Bernstein serisi ve (18) denklemleri ile verilen kesilmiş Hermite serisi, (8) denkleminin yaklaşık çözümleri olduğundan elde edilen yaklaşık çözümler ve çözümlerin türevleri (8) denkleminde yerine konulduğunda denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Bu sebeple  $\rho(s)\tau(s) = \chi(s)$  olmak üzere,  $0 \leq s_i \leq 2\pi$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) aralığında

$$\begin{aligned} R\lambda_N(s_i) &= |\chi(s_i)\lambda'''(s_i) - \chi'(s_i)\lambda''(s_i) \\ &\quad + (\chi(s_i) + \chi^3(s_i))\lambda'(s_i) \\ &\quad - \chi'(s_i)\lambda(s_i)| \cong 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\mu_N(s_i) &= \left| \frac{1}{\chi'(s_i)}\mu'''(s_i) + \left(\frac{1}{\chi'(s_i)}\right)'\mu''(s_i) \right. \\ &\quad + \frac{1 + (\chi(s_i))^2}{\chi'(s_i)}\mu'(s_i) \\ &\quad + \left[ \left(\frac{1 + (\chi(s_i))^2}{\chi'(s_i)}\right)' \right. \\ &\quad \left. \left. + \chi(s_i) \right] \mu(s_i) \right| \cong 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\delta_N(s_i) &= \left| \frac{1}{\chi(s_i)}\delta'''(s_i) + 2\left(\frac{1}{\chi(s_i)}\right)'\delta''(s_i) \right. \\ &\quad + \left[ \left(\frac{1}{\chi(s_i)}\right)'' \right. \\ &\quad + \frac{1 + (\chi(s_i))^2}{\chi(s_i)} \left. \right] \delta'(s_i) \\ &\quad \left. + \chi'(s_i)\delta(s_i) \right| \cong 0 \end{aligned}$$

olup, burada  $R\lambda_N(s_i) \leq 10^{-k_i}$ ,  $R\mu_N(s_i) \leq 10^{-k_i}$  ve  $R\delta_N(s_i) \leq 10^{-k_i}$  ( $k_i \in \mathbb{Z}^+$ ) sağlanmalıdır.

#### 3. Bulgular

Bu bölümde nümerik bir örnek üzerinden eğriyi belirleyen katsayı fonksiyonları sırasıyla Bernstein matris sıralama metodu ve Hermite matris sıralama metodu ile elde edilmiştir. Ardından elde edilen yaklaşık çözümler için rezidüel fonksiyona dayalı hata analizi yapılarak elde edilen yaklaşık çözümler Tablo 1-9 ve Şekil 1-6 da karşılaştırılmıştır.

**Örnek:** Öklid uzayında  $\rho\tau = s + 1$  için  $0 \leq s \leq 1$  aralığında sabit genişlikli birim hızlı eğriyi belirleyen katsayı fonksiyonlarını hesaplayıp elde edilen çözümlerin  $\lambda_0, \mu_0, \delta_0 = 1, \lambda'_0, \mu'_0, \delta'_0 = 0$  ve  $\lambda''_0, \mu''_0, \delta''_0 = 0$  için hata analizlerini yapalım. Öncelikle çalışılan aralıkta sıralama noktaları  $s_0 = 0, s_1 = \frac{1}{3}, s_2 = \frac{2}{3}, s_3 = 1$  olur ve Bernstein polinom yaklaşımı için

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned} w_{00} &= P_0(0) - \frac{3}{2\pi}P_1(0) + \frac{3}{2\pi^2}P_2(0) \\ &\quad - \frac{3}{4\pi^3}P_3(0), \\ w_{01} &= \frac{3}{2\pi}P_1(0) - \frac{3}{\pi^2}P_2(0) + \frac{9}{4\pi^3}P_3(0), \\ w_{02} &= \frac{3}{2\pi^2}P_2(0) - \frac{9}{4\pi^3}P_3(0), \\ w_{03} &= \frac{3}{4\pi^3}P_3(0) \end{aligned}$$

olur. Son olarak  $(\widetilde{\mathbf{W}}_B)^{-1}$  matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4\pi}{3} & \frac{2\pi^2}{3} \\ \frac{1}{w_{03}} & -\frac{w_{00} + w_{01} + w_{02}}{w_{03}} & -\frac{2\pi(w_{01} + 2w_{02})}{3w_{03}} & -\frac{2\pi^2 w_{02}}{3w_{03}} \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır ve  $\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}}_B)^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}$  olmak üzere bilinmeyenler matrisi  $\mathbf{A}$  için  $a_0, a_1, \dots, a_3$  aşağıdaki gibi bulunur:



$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0, a_1 = \alpha_0 + \frac{2\pi}{3}\alpha_1 \\ a_2 &= \alpha_0 + \left(\frac{4\pi}{3}\right)\alpha_1 + \left(\frac{2\pi^2}{3}\right)\alpha_2 \\ a_3 &= \left(-\frac{w_{00} + w_{01} + w_{02}}{w_{03}}\right)\alpha_0 \\ &\quad + \frac{2\pi(w_{01} + 2w_{02})}{3w_{03}}\alpha_1 \\ &\quad - \left(\frac{2\pi^2 w_{02}}{3w_{03}}\right)\alpha_2. \end{aligned}$$

Eğer bu  $a_k$  bilinmeyenleri (9) denklemine yerine yazılırsa (8) denkleminin Bernstein polinom yaklaşımı ile yaklaşık çözümü

$$X(s) = a_0 + \frac{3}{2\pi}(a_1 - a_0)s + \frac{3}{4\pi^2}(a_0 - 2a_1 + a_2)s^2 + \frac{1}{8\pi^3}(-a_0 + 3a_1 - 3a_2 + a_3)s^3$$

Öyleyse **Bernstein polinom yaklaşımı** ile eğriyi belirleyen  $\lambda(s)$  katsayısı için;

$$\begin{aligned} w_{00} &= 1 + \frac{3}{2\pi} + \frac{3}{\pi^2} + \frac{3}{4\pi^3}, \\ w_{01} &= -\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi^2}{4\pi^3}, \\ w_{02} &= \frac{3}{\pi^2} + \frac{3}{4\pi^3}, \quad w_{03} = -\frac{3}{4\pi^3}. \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 \\ a_1 &= \alpha_0 + \frac{2\pi}{3}\alpha_1 \\ a_2 &= \alpha_0 + \left(\frac{4\pi}{3}\right)\alpha_1 + \left(\frac{2\pi^2}{3}\right)\alpha_2 \\ a_3 &= \frac{4\pi^3 + 3}{3}\alpha_0 + \frac{4\pi^3 - 3\pi}{3}\alpha_1 \\ &\quad + \frac{8\pi^3 + 18\pi^2}{3}\alpha_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \alpha_0 + \alpha_1 s + \frac{\alpha_2}{2}s^2 + \left[\frac{1}{6}\alpha_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{8\pi^2}\right)\alpha_1 + \left(\frac{1}{3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2\pi}\right)\alpha_2\right]s^3 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

İkinci olarak eğriyi belirleyen  $\mu(s)$  katsayısı için;

$$\begin{aligned} w_{00} &= 1 + \frac{3}{\pi^2} - \frac{9}{4\pi^3}, \quad w_{01} = -\frac{6}{\pi^2} + \frac{27}{4\pi^3}, \\ w_{02} &= \frac{3}{\pi^2} - \frac{27}{4\pi^3}, \quad w_{03} = \frac{9}{4\pi^3} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0, a_1 = \alpha_0 + \frac{2\pi}{3}\alpha_1 \\ a_2 &= \alpha_0 + \left(\frac{4\pi}{3}\right)\alpha_1 + \left(\frac{2\pi^2}{3}\right)\alpha_2 \\ a_3 &= \frac{9 - 4\pi^3}{9}\alpha_0 - 2\pi\alpha_1 - \frac{8\pi^3 - 18\pi^2}{9}\alpha_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\mu(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \frac{\alpha_2}{2}s^2 + \left[-\frac{1}{18}\alpha_0 - \frac{1}{2\pi^2}\alpha_1 - \frac{1}{9}\alpha_2\right]s^3$$

olarak bulunur.

Son olarak eğriyi belirleyen  $\delta(s)$  katsayısı için;

$$\begin{aligned} w_{00} &= 1 + \frac{3}{\pi} + \frac{6}{\pi^2} - \frac{3}{4\pi^3}, \\ w_{01} &= -\frac{3}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} + \frac{9}{4\pi^3}, \quad w_{02} = \frac{6}{\pi^2} - \frac{9}{4\pi^3}, \\ w_{03} &= \frac{3}{4\pi^3} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0, a_1 = \alpha_0 + \frac{2\pi}{3}\alpha_1 \\ a_2 &= \alpha_0 + \left(\frac{4\pi}{3}\right)\alpha_1 + \left(\frac{2\pi^2}{3}\right)\alpha_2 \\ a_3 &= \frac{3 - 4\pi^3}{3}\alpha_0 - \frac{8\pi^3 + 6\pi}{3}\alpha_1 \\ &\quad - \frac{16\pi^3 - 6\pi^2}{3}\alpha_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\delta(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \frac{\alpha_2}{2}s^2 + \left[-\frac{1}{6}\alpha_0 - \left(\frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{3}\right)\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_2\right]s^3$$

bulunur.

Hermite polinom yaklaşımı için çalışılan aralıkta

$$\begin{aligned} w_{00} &= P_0(0), \quad w_{01} = 2P_1(0), \\ w_{02} &= -2P_0(0) + 8P_2(0), \\ w_{03} &= -12P_1(0) + 48P_3(0) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan  $(\widetilde{W}_H)^{-1}$  matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8P_3(0)} & -\frac{P_0(0)}{8P_3(0)} & -\frac{P_1(0) - 4P_3(0)}{8P_3(0)} & -\frac{P_2(0)}{8P_3(0)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{48P_3(0)} & -\frac{P_0(0)}{48P_3(0)} & -\frac{P_1(0)}{48P_3(0)} & -\frac{P_2(0)}{48P_3(0)} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$a_0 = \alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_2$$

$$a_1 = -\frac{P_0(0)}{8P_3(0)}\alpha_0 - \frac{P_1(0) - 4P_3(0)}{8P_3(0)}\alpha_1 - \frac{P_2(0)}{8P_3(0)}\alpha_2$$

$$a_2 = \frac{1}{8}\alpha_2$$

$$a_3 = -\frac{P_0(0)}{48P_3(0)}\alpha_0 - \frac{P_1(0)}{48P_3(0)}\alpha_1 - \frac{P_2(0)}{48P_3(0)}\alpha_2$$

olur. Dolayısıyla yaklaşık çözüm için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$X(s) = a_0 + 2sa_1 + (4s^2 - 4)a_2 + (8s^3 - 12s)a_3.$$

**Hermite polinom yaklaşımı** ile eğriyi belirleyen  $\lambda(s)$  katsayısı için;

$$w_{00} = P_0(0) = 1, w_{01} = 2P_1(0) = -2,$$

$$w_{02} = -2P_0(0) + 8P_2(0) = 14,$$

$$w_{03} = -12P_1(0) + 48P_3(0) = -36$$

olarak hesaplanır. Bu durumda

$$a_0 = \alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_2,$$

$$a_1 = \frac{1}{8}\alpha_0 + \frac{3}{8}\alpha_1 + \frac{1}{24}\alpha_2,$$

$$a_2 = \frac{1}{8}\alpha_2, a_3 = \frac{1}{48}\alpha_0 - \frac{1}{48}\alpha_1 + \frac{1}{24}\alpha_2$$

olmak üzere

$$\lambda(s) = \left(\frac{\alpha_0 - \alpha_1 + 2\alpha_2}{6}\right)s^3 + \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)s^2$$

$$- \left(\frac{5\alpha_2}{12}\right)s + \frac{4\alpha_0 + 4\alpha_1 - \alpha_2}{4}$$

elde edilir.

İkinci olarak eğriyi belirleyen  $\mu(s)$  katsayısı için;

$$w_{00} = P_0(0) = 3, w_{01} = 2P_1(0) = 2,$$

$$w_{02} = -2P_0(0) + 8P_2(0) = -6,$$

$$w_{03} = -12P_1(0) + 48P_3(0) = 24$$

olarak hesaplanır. Bu durumda

$$a_0 = \alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_2,$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{12}\alpha_2, a_2 = \frac{1}{8}\alpha_2,$$

$$a_3 = -\frac{1}{12}\alpha_0 - \frac{1}{36}\alpha_1 + \frac{1}{72}\alpha_2$$

olmak üzere

$$\mu(s) = \left(\frac{-6\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2}{9}\right)s^3 + \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)s^2 + \alpha_1 s$$

$$+ \frac{4\alpha_0 - \alpha_2}{4}$$

elde edilir.

Son olarak eğriyi belirleyen  $\delta(s)$  katsayısı için;

$$w_{00} = P_0(0) = 1, w_{01} = 2P_1(0) = 8,$$

$$w_{02} = -2P_0(0) + 8P_2(0) = -18,$$

$$w_{03} = -12P_1(0) + 48P_3(0) = 0$$

olarak hesaplanır. Bu durumda

$$a_0 = \alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_2, a_1 = \frac{1}{8}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_2,$$

$$a_2 = \frac{1}{8}\alpha_2, a_3 = -\frac{1}{48}\alpha_0 - \frac{1}{12}\alpha_1 + \frac{1}{24}\alpha_2$$

olmak üzere

$$\delta(s) = \left(\frac{-\alpha_0 - 4\alpha_1 + 2\alpha_2}{6}\right)s^3 + \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)s^2$$

$$+ \left(\frac{\alpha_0 + 2\alpha_1}{2}\right)s + \frac{4\alpha_0 - \alpha_2}{4}$$

elde edilir.

**Tablo 1.**  $\lambda$  için Bernstein polinomuna dayalı elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

s	$\lambda_{13}(s)$	$\lambda_{15}(s)$	$\lambda_{17}(s)$
0.1	1.000166490068819	1.000166490068963	1.000166490068968
0.3	1.004452004359640	1.004452004361769	1.004452004361757
0.5	1.020148119614551	1.020148119621044	1.020148119621049
0.7	1.053116717893048	1.053116717908712	1.053116717890104
0.9	1.106061157376765	1.106061157441449	1.106061157652404
1.0	1.139584115444995	1.139584116134602	1.139584116135300

**Tablo 2.**  $\lambda$  için Hermite polinomuna dayalı elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

s	$\lambda_{13}(s)$	$\lambda_{15}(s)$	$\lambda_{17}(s)$
0.1	1.000166490068815	1.000166490068965	1.000166490068968
0.3	1.004452004359631	1.004452004361769	1.004452004361781
0.5	1.020148119614543	1.020148119621044	1.020148119621076
0.7	1.053116717892449	1.053116717905517	1.053116717905579
0.9	1.106061157382274	1.106061157419871	1.106061157419976
1.0	1.139584115445131	1.139584116134653	1.139584116135332

**Tablo 3.** Elde edilen yaklaşık çözümler için  $R\lambda_N(s)$  karşılaştırması

s	Bernstein Matris Sıralama Yöntemi			Hermite Matris Sıralama Yöntemi		
	$R\lambda_{13}(s)$	$R\lambda_{15}(s)$	$R\lambda_{17}(s)$	$R\lambda_{13}(s)$	$R\lambda_{15}(s)$	$R\lambda_{17}(s)$
0.1	2.03018E-10	9.67670E-13	4.69957E-13	2.02204E-10	6.66134E-13	1.50990E-14
0.3	9.95781E-12	4.72967E-11	4.57957E-11	8.04978E-12	3.23075E-14	1.77636E-15
0.5	3.87558E-11	1.29896E-13	8.78186E-14	3.88272E-11	2.42029E-14	5.77316E-15
0.7	1.15543E-09	2.90085E-10	6.09551E-08	2.91565E-10	4.91607E-13	1.77636E-15
0.9	2.00926E-06	1.10386E-08	3.36753E-07	2.00451E-06	1.46154E-09	2.13672E-10
1.0	2.73688E-05	2.26618E-08	2.52772E-08	2.73634E-05	1.84410E-08	1.21370E-08

**Tablo 4.**  $\mu$  için Bernstein polinomuna dayalı elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

s	$\mu_{13}(s)$	$\mu_{15}(s)$	$\mu_{17}(s)$
0.1	0.9994880476667710	0.9994880476661450	0.9994880476661320
0.3	0.9856463260229130	0.9856463260146350	0.9856463260144630
0.5	0.9321003095201960	0.9321003094966320	0.9321003094961900
0.7	0.8136103905420490	0.8136103905005650	0.8136103904810700
0.9	0.6143911805978874	0.6143911804675874	0.6143911806713882
1.0	0.4846460538433713	0.4846460500525277	0.4846460500124708

**Tablo 5.**  $\mu$  için Hermite polinomuna dayalı elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

s	$\mu_{13}(s)$	$\mu_{15}(s)$	$\mu_{17}(s)$
0.1	0.9994880476667740	0.9994880476661400	0.9994880476661370
0.3	0.9856463260229130	0.9856463260146330	0.9856463260144790
0.5	0.9321003095202050	0.9321003094966370	0.9321003094961840
0.7	0.8136103905415000	0.8136103904973680	0.8136103904965150
0.9	0.6143911806033264	0.6143911804464828	0.6143911804448270
1.0	0.4846460538432779	0.4846460500524022	0.4846460500135315

**Tablo 6.** Elde edilen yaklaşık çözümler için  $R\mu_N(s)$  karşılaştırması

s	Bernstein Matris Sıralama Yöntemi			Hermite Matris Sıralama Yöntemi		
	$R\mu_{13}(s)$	$R\mu_{15}(s)$	$R\mu_{17}(s)$	$R\mu_{13}(s)$	$R\mu_{15}(s)$	$R\mu_{17}(s)$
0.1	8.10360E-10	1.28466E-11	9.09495E-13	8.11464E-10	1.20437E-11	1.42109E-14
0.3	4.27391E-11	3.72680E-11	4.19220E-11	2.94009E-11	5.63105E-13	1.42109E-14
0.5	1.31443E-10	5.50671E-13	1.13243E-13	1.31370E-10	5.40012E-13	1.42109E-14
0.7	5.10354E-10	3.01497E-10	3.92549E-08	9.25679E-10	1.09921E-11	5.68434E-14
0.9	6.02981E-06	4.77932E-08	1.47699E-07	6.03200E-06	5.37485E-08	1.27704E-09
1.0	8.04150E-05	1.30433E-06	1.26919E-07	8.04130E-05	1.29934E-06	6.73749E-08

**Tablo 7.**  $\delta$  için Bernstein polinomuna dayalı elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

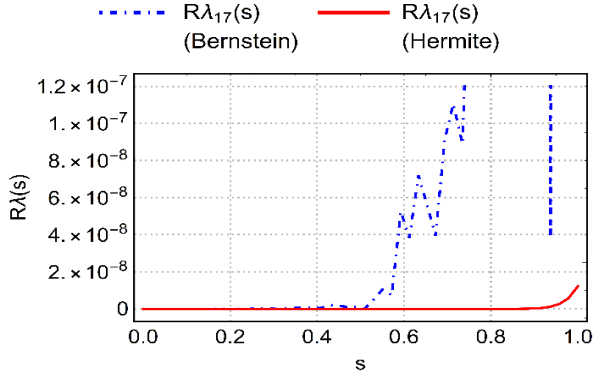
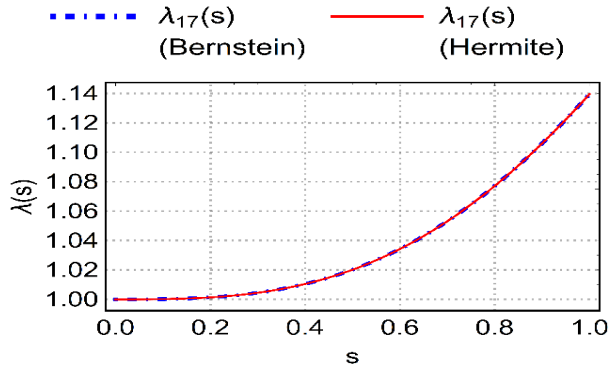
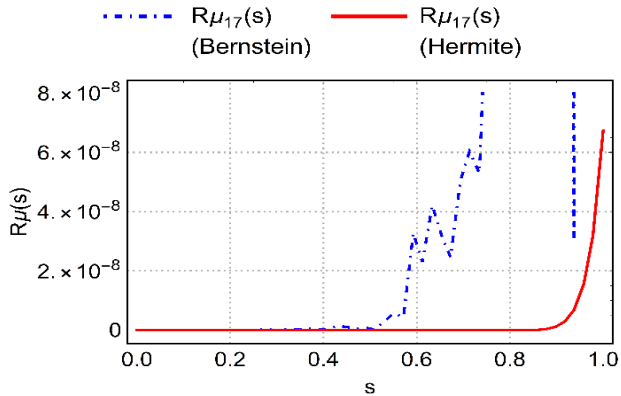
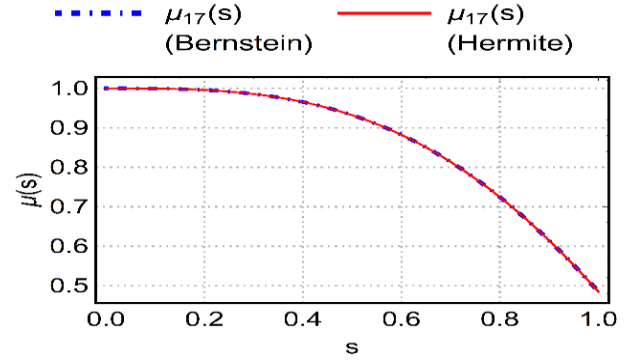
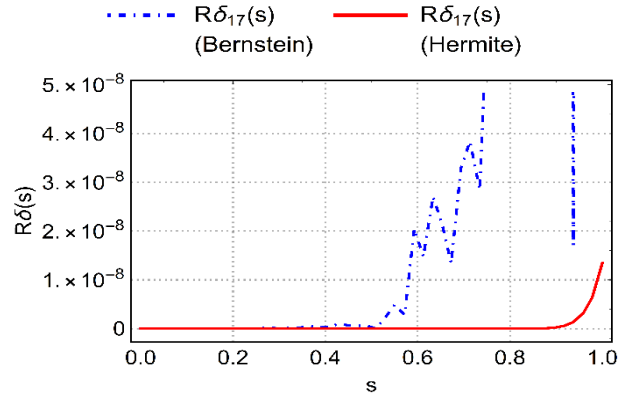
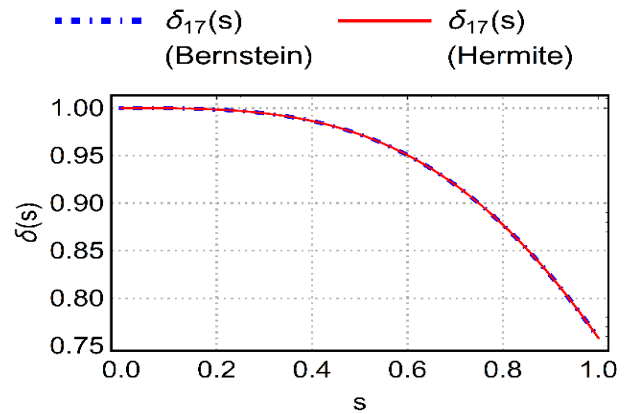
s	$\delta_{13}(s)$	$\delta_{15}(s)$	$\delta_{17}(s)$
0.1	0.9998210246717420	0.9998210246715190	0.9998210246715120
0.3	0.9945475499524850	0.9945475499492460	0.9945475499490990
0.5	0.9723269160326030	0.9723269160223580	0.9723269160219400
0.7	0.9192544538998090	0.9192544538812280	0.9192544538617170
0.9	0.8236221932012510	0.8236221931569603	0.8236221933633030
1.0	0.7582172732955862	0.7582172717522533	0.7582172717231838

**Tablo 8.**  $\delta$  için Hermite polinomuna dayalı elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

s	$\delta_{13}(s)$	$\delta_{15}(s)$	$\delta_{17}(s)$
0.1	0.999821024671739	0.9998210246715220	0.9998210246715130
0.3	0.994547549952478	0.9945475499492510	0.9945475499491170
0.5	0.972326916032599	0.9723269160223710	0.9723269160219460
0.7	0.919254453899229	0.9192544538780470	0.9192544538771680
0.9	0.823622193206711	0.8236221931356650	0.8236221931339450
1.0	0.758217273295540	0.7582172717524069	0.7582172717235805

**Tablo 9.** Elde edilen yaklaşık çözümler için  $R\delta_N(s)$  karşılaştırması

s	Bernstein Matris Sıralama Yöntemi			Hermite Matris Sıralama Yöntemi		
	$R\delta_{13}(s)$	$R\delta_{15}(s)$	$R\delta_{17}(s)$	$R\delta_{13}(s)$	$R\delta_{15}(s)$	$R\delta_{17}(s)$
0.1	2.52591E-10	8.57336E-12	4.38427E-13	2.52514E-10	7.60192E-12	4.72955E-14
0.3	1.99299E-11	2.70088E-11	2.19261E-11	8.04268E-12	2.95430E-13	3.99680E-15
0.5	1.04964E-10	2.23654E-13	2.99760E-14	3.23106E-11	2.36922E-13	2.22045E-16
0.7	1.04443E-09	7.24928E-11	1.86078E-08	2.07932E-10	4.50318E-12	1.22125E-15
0.9	1.24812E-06	1.85438E-08	1.27728E-07	1.25163E-06	2.01511E-08	2.55566E-10
1.0	1.60844E-05	4.68993E-07	2.32415E-08	1.60908E-05	4.70542E-07	1.34622E-08

**Şekil 1.**  $\lambda$  katsayı fonksiyonunun  $N=17$  için elde edilen yaklaşık çözümlerinin rezidüel hatalarının karşılaştırması**Şekil 2.**  $\lambda$  katsayı fonksiyonunun  $N=17$  için elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması**Şekil 3.**  $\mu$  katsayı fonksiyonunun  $N=17$  için elde edilen yaklaşık çözümlerinin rezidüel hatalarının karşılaştırması**Şekil 4.**  $\mu$  katsayı fonksiyonunun  $N=17$  için elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması**Şekil 5.**  $\delta$  katsayı fonksiyonunun  $N=17$  için elde edilen yaklaşık çözümlerinin rezidüel hatalarının karşılaştırması**Şekil 6.**  $\delta$  katsayı fonksiyonunun  $N=17$  için elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırması

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Bu makalede öncelikle sabit genişlikli eğriler, eğriyi belirleyen katsayı fonksiyonlarına bağlı üç farklı diferansiyel denklem ile karakterize edilmiştir. Bunun için Frenet benzeri bir diferansiyel denklem sistemi kullanılmıştır. Ardından Hermite ve Bernstein matris sıralama yöntemleri ile bu denklemlerin iki farklı yöntemle yaklaşık çözümleri hesaplanmış ve her bir yöntem için nümerik bir örnek üzerinden hata analizleri yapılmıştır. Buna göre her iki çözüm için de kesme sınırı olan  $N$  değeri arttıkça hata miktarının azaldığı gözlemlenmiştir. Elde edilen tablo ve grafiklerden Hermite polinomuna dayalı yaklaşımın daha iyi sonuçlar verdiği yani daha az hata ile sonuca yaklaştığı gözlemlendi. Dolayısıyla Hermite matris sıralama yönteminin bu eğri tipini karakterize eden denklemler için daha uygun bir yöntem olduğu ifade edilebilir. Sabit genişlikli eğri tipinin diferansiyel denklemlerle ifadesi ve bu yaklaşık çözümler bu eğri tipinin uygulamada daha çok tercih edilmesine imkan tanıyacaktır. Bundan sonra yapılacak çalışmalarda bu eğri tipinin farklı uzaylarda karakterizasyonları elde edilebilir. Farklı uzaylardaki karakterizasyonlar için benzer yöntemlerle yaklaşık çözümler elde edilebilir. Ayrıca sunulan çözüm yöntemleri farklı eğri tiplerinin karakterizasyonları için de kullanılabilir.

#### Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Programı 119F213 numaralı Sabit Genişlikli Eğrilerin Analizi ve Uygulama Kapsamının Ön Araştırması başlıklı proje ile desteklenmektedir. Desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu'na teşekkür ederiz.

#### Etik Beyanı

*Bu çalışmada, "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.*

#### Kaynakça

- [1] Ball, N. H. 1930. On Ovals. American Mathematical Monthly, 27, 348-353.
- [2] Köse, Ö. 1986. On Space Curves of Constant Breadth. Doğa Turk Journal of Mathematics. 10(1), 11-14.
- [3] Euler, L. 1778-1780. De Curvis Trangularibus. Acta Academica Petropolitana. 3-30.
- [4] Reuleaux, F. 1963. The Kinematics of Machinery. Trans. By Kennedy A.B.W. Dover Pub. New York.
- [5] Mellish, A. P. 1931. Notes of Differential Geometry. Annals of Mathematics, 32, 181-190.

- [6] Struik, D. J. 1931. Differential Geometry in the Large. Bulletin American Mathematical Society. 37, 49-62.
- [7] Martini, H., Montejano-Peimbert, L., Oliveros, D. 2019. Bodies of Constant Width: An Introduction to Convex Geometry with Applications, Springer Nature Switzerland AG.
- [8] Zayas E. E., Cardona S., Jordi L. 2009. Analysis and synthesis of the displacement function of the follower in constant-breadth cam mechanisms. Mechanism and Machine Theory. 44, 1938-1949.
- [9] Shchekotov, M. 2015. Indoor Localization Methods Based on Wi-Fi Lateration and Signal Strength Data Collection. Conference of Open Innovation Association (Fruct). 186-191.
- [10] Tripathi, A., Gupta, H., Dutta, T., Mishra, R., Shukla, K., Jit, S. 2018. Coverage and Connectivity in WSNs: A Survey. Research Issues and Challenges, IEEE Access, 6, 26971-26992.
- [11] Zhu, C., Zheng, C., Shu, L., Han, G. 2012. A Survey on Coverage and Connectivity Issues in Wireless Sensor Networks. Journal Network and Computer Applications. 35, 619-632.
- [12] Kolaei, A., Rakheja, S., Richard M.J. 2014. Effects of Tank Cross-section on Dynamic Fluid Slosh Loads and Roll Stability of a Partly-filled Tank Truck. European Journal of Mechanics B/Fluids 46, 46-58.
- [13] Altunkaya, B., Aksoyak, F. K. 2017. Curves of Constant Breadth According to Darboux frame, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 66(2), 44-52.
- [14] Kocayigit, H., Önder, M. 2013. Space Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-space, Annali di Matematica Pura ed Applicata. 192, 805-814.
- [15] Aydın, T. A., Sezer, M. 2018. Hermite Polynomial Approach to Determine Spherical Curves in Euclidean 3-space, New Trends in Mathematical Science, 6(3), 189-199.
- [16] Aydın, T. A., Sezer, M., Kocayigit, H. 2018. Bernstein Polynomials Approach to Determine Timelike Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-space. Communication in Mathematical Modeling and Applications. 3 (2), 9-22.
- [17] Işık, O. R., Sezer, M., Güney, Z. 2011. A Rational Approximation Based on Bernstein Polynomials for High Order Initial and Boundary Values Problems, Applied Mathematics and Computation, 217, 9438-9450.
- [18] Bhatti, M. I., Brocken, B. 2007. Solutions of Differential Equations in A Bernstein Polynomial Basis. Journal of Computational and Applied Mathematics. 205, 272-280.