f(T) Teorisinde Küresel Simetrik Karadelik Çözümleri

Ali Nur Nurbaki[1]⋆, Salvatore Capozziello[2], Cemsinan Deliduman[3], A. Talat Saygaç[4]

[1] *İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul*

[2] *University of Naples Federico II — UNINA · Dept of Physics E. Pancini, Naples.*

[3] *MSGÜ, Fizik Bölümü, İstanbul.*

[4] *İstanbul Üniversitesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, İstanbul.*

Özet
f(T) teorisi, astrofiziksel ve kozmolojik motivasyonları bağlamında kısaca tanıtılmıştır. Teorinin skaler-tensör eşdeğerinin Jordan çerçevesi için küresel simetrik ve köşegen bir tetrad takımı yazılarak nokta Lagrangian'ı elde edilmiştir. Noether simetri yaklaşımı (NSY) tanıtılmış, bahsi geçen Lagrangian için Noether denklemi elde edilerek $F(\varphi)$, $\omega(\varphi)$, $V(\varphi)$ için fonksiyonel formlar elde edilmiştir. Fonksiyonel formlar kullanılarak $A(r)$ ve $B(R)$ potansiyelleri Noether yükleri cinsinden integre edilebilmiştir.

Anahtar Kelimeler: cosmology: theory, Sıkı Nesneler

1 Genelleştirilmiş Kütle Çekimi

Genel Görelilik kuramı kütle çekim için ortaya atılmış en başarılı klasik kütle çekim kuramı olarak adlandırılmasından kısa bir süre sonra farklı motivasyonlarla modifiye edilmiştir. Bu temel motivasyonlardan en önemlileri, kuantum teorisi ile uyumlu bir kütle çekim kuramının oluşturulması, kozmik ivmelenme, galaksilerin dönüş eğrileri gibi kozmolojik ve astrofiziksel fenomenlerin egzotik madde-enerji terimleri yerine geometrik terimlerle ifade edilmesi olarak ifade edilebilir. Kütle çekimini genelleştirmenin temelde üç yolu vardır:

a. Lagrangian'a skaler alan eklemek. (Skaler-Tensör Teorileri)
b. Teoriye ekstra boyut(lar) eklemek.(Kaluza-Klein tipi teoriler)
c. Lagrangian'a yüksek dereceden eğrilik terimleri eklemek. ($f(R)$,$f(T)$, $f(R,T)$, $f(G)$ gibi)

Bu çalışmada $f(T)$ teorisinin küresel simetrik çözümleri üzerine yapılan çalışmadan bahsedilecektir.

1.1 GGTE ve $f(T)$ Teorisi

Genel Göreliliğin Teleparalel Eşdeğeri (GGTE) ilk olarak 1929 yılında Einstein tarafından önerilmiştir. Teori, Genel Görelilik (GG) ile farklı bir geometrik kurguya sahip olup GG'e eşdeğer sonuçlar öngörmektedir. Einstein bu teoriyi Birleşit Alan Teorisi (BAT) ortaya atmıştır. Eylem integralinde eğrilik skaleri R'nin kullanıldığı GG'in aksine, GGTE eylem integralinde burulma skaleri T yer almaktadır. Burulma skaleri;

$$T \equiv S_\rho{}^{\alpha\beta} T^\rho{}_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

olup burada

$$T^\rho_{\alpha\beta} \equiv e^\rho_A[\partial_\alpha e^A_\beta - \partial_\beta e^A_\alpha], \tag{2}$$

$$S_\rho{}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}[K^{\alpha\beta}{}_\rho + \delta^\alpha_\rho T^{\theta\beta}{}_\theta - \delta^\beta_\rho T^{\theta\alpha}{}_\theta]. \tag{3}$$

$$K^{\alpha\beta}_\rho \equiv -\frac{1}{2}[T^{\alpha\beta}{}_\rho - T^{\beta\alpha}{}_\rho - T_\rho{}^{\alpha\beta}], \tag{4}$$

şeklinde ifade edilir. Eylem integrali ise;

$$I = \int d^4x \mid e \mid T \tag{5}$$

ve $|e| = \det e^i_\mu = \sqrt{-g}\; c = 16\pi G = 1$'dir. GG'in yüksek eğrilik terimleri içeren $f(R)$ teorilerine genellenmesi gibi GGTE'de $f(T)$ teorilerine genellenebilir. Bu durumda eylem integrali

$$I = \int d^4x \mid e \mid f(T) + S_m, \tag{6}$$

şeklinde olacaktır. Bu tür bir genellemenin hem kozmik ivmelenmeyi hem de erken evren enflasyonunu açıklayabileceğine dair çalışmalar (Ferraro R. ve Fiorini F. 2007; Linder E.V. 2010; Rahaman F. v.ark 2014) yayınlanmıştır. Aynı zamanda karanlık madde etkisini de açıklayabildiği ileri sürülen $f(T)$ teorisi bu özellikleri ile genelleştirilmiş kütle çekimi kuramları arasında popülarite kazanmıştır.

2 Jordan Çerçevesi için Küresel Simetrik Çözüm

Eylem integrali (6)

$$I = \int d^4x e[f(\phi) + (T-\phi)f'(\phi)] + I_\mathrm{m}(e^i_\mu), \tag{7}$$

şeklinde genellenebilir. Burada $f'(\phi) \equiv df/d\phi$'dir. $\varphi = T$ için (6)'nin elde edileceği aşikardır. Yeni bir skaler alan φ, $F(\varphi) = f'(\varphi)$, olacak şekilde tanımlanacak olursa (7) şu şekilde yazılabilir:

$$I_\mathrm{JF} = \int d^4x e[F(\varphi)T - \omega(\varphi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - V(\varphi)] + I_\mathrm{m}, \tag{8}$$

Burada $V(\varphi) = \phi f'(\phi) - f(\phi)$'dir. Eylem integrali (8) Jordan çerçevesinde $\omega = 0$ olan Brans-Dicke teorisene tekabül etmektedir. Bu eylem integrali aynı zamanda $f(T)$ teorisinin Jordan çerçevesi için yazılan skaler-tensör eşdeğeri olarak da ifade edilebilir.

⋆ ali.nurbaki@ogr.istanbul.edu.tr

2.1 $f(T)$ Nokta Lagrangian'ı

Genel küresel simetrik ve köşegen bir tetrad takımı

$$e^i{}_\nu = \begin{bmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M(r)\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu tetradı (8) Lagrangian'ında yerine yazarsak

$$L_{JF} = -\frac{\varphi_r^2 AM^2\omega(\varphi)\sin\theta}{B} - \frac{2M_r^2 AF(\varphi)\sin\theta}{B} - \frac{4A_r M_r MF(\varphi)\sin\theta}{B} - ABM^2V(\varphi)\sin\theta \quad (10)$$

nokta Lagrangian'ı elde edilir.

2.2 Noether Simetrileri

Noether simetrileri $f(R)$ ve $f(T)$ gibi teorilerde bilinmeyen fonksiyonel formların koşullara bağlanıp belirlenmesi için sık kullanılan bir araç haline gelmiştir. Buradaki temel prensip Lagrangian'ın Lie türevinin sıfır olacağı şekilde yani

$$\mathcal{L}_X L = 0$$

yani

$$XL = 0$$

olacak şekilde bir Noether vektörü bulmaktır. Bu Noether vektörü, Lagrangian değişkenleri (A, B, φ, M)'ye bağlı $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ fonksiyonları ile oluşturulur.

$$X = \alpha\partial_A + \beta\partial_B + \gamma\partial_\varphi + \delta\partial_M + \dot{\alpha}\partial_{\dot{A}} + \dot{\beta}\partial_{\dot{B}} + \dot{\gamma}\partial_{\dot{\varphi}} + \dot{\delta}\partial_{\dot{M}}. \quad (11)$$

Burada

$$\dot{\alpha} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial A}\right)\dot{A} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial B}\right)\dot{B} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\right)\dot{\varphi} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial M}\right)\dot{M}, \quad (12)$$

$$\dot{\beta} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial A}\right)\dot{A} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial B}\right)\dot{B} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right)\dot{\varphi} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial M}\right)\dot{M}, \quad (13)$$

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial A}\right)\dot{A} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial B}\right)\dot{B} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\right)\dot{\varphi} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial M}\right)\dot{M}, \quad (14)$$

$$\dot{\delta} = \left(\frac{\partial\delta}{\partial A}\right)\dot{A} + \left(\frac{\partial\delta}{\partial B}\right)\dot{B} + \left(\frac{\partial\delta}{\partial\varphi}\right)\dot{\varphi} + \left(\frac{\partial\delta}{\partial M}\right)\dot{M}. \quad (15)$$

dır.
Hareket sabiti ise şu şekilde verilir.

$$\Sigma = \alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{A}} + \beta\frac{\partial L}{\partial\dot{B}} + \gamma\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} + \delta\frac{\partial L}{\partial\dot{M}}. \quad (16)$$

2.3 Çözüm

Jordan çerçevesi Lagrangian'ı (10) için Noether simetri denklemi

$$XL = 0$$

işletilerek kuadratik türevli terimler tek tek sıfıra eşitlenirse Noether yükü vasıtası ile $A(r)$ integre edilebilir (Capozziello v.ark 2010). Burada daha değişik bir yöntem uygulayarak iki farklı Noether yükü bulunacaktır. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = k_1(A, B, \varphi, M)$ ve $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = k_1(3A, B, \varphi, M)$ çözümleri aynı $F(\varphi), \omega(\varphi), V(\varphi)$ çözümlerini sağlar:

$$F(\varphi) = \frac{c_1}{\varphi^2}, \omega(\varphi) = \frac{c_2}{\varphi^3}, V(\varphi) = \frac{c_3}{\varphi^4} \quad (17)$$

Bu çözümler için için iki farklı Noether yükü elde edilebilir.

$$\Sigma_1 = -2\sin(\theta)k_1\frac{\varphi\varphi_r AM^2\omega}{B} - 8\sin(\theta)k_1\frac{MM_rFA}{B} - 4\sin(\theta)k_1\frac{A_rFM^2}{B} \quad (18)$$

$$\Sigma_2 = -2\sin(\theta)k_1\frac{\varphi\varphi_r AM^2\omega}{B} - 12\sin(\theta)k_1\frac{MM_rFA}{B} \quad (19)$$

Bu Noether yüklerinden $B(r)$ elenir, $M(r) = r$ yazılırsa $A(r)$ şu şekilde integre edilebilir:

$$A = \frac{e^{\frac{(\Sigma_1-\Sigma_2)c_2\varphi}{2c_1}}}{Kr^{\frac{2\Sigma_2}{3\Sigma_1}}} \quad (20)$$

Bu ifade $\varphi = r^s$ için aşağıdaki şekle dönüşür

$$A(r) = \frac{e^{\frac{(\Sigma_1-\Sigma_2)c_2 r^s}{2c_1}}}{Kr^{\frac{2\Sigma_2}{3\Sigma_1}}} \quad (21)$$

Buradan $B(r)$ hesaplanabilir:

$$B(r) = \frac{e^{k_4\varphi}\varphi}{k_5 r}\sqrt{k_6 + k_7\varphi} \quad (22)$$

Sonuçta elde ettiğimiz küresel simetrik çözüm şu şekilde olacaktır:

$$e^i{}_\nu = \begin{bmatrix} \frac{e^{k_1\varphi}}{k_2 r^{k_3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{k_4\varphi}\varphi}{k_5 r}\sqrt{k_6 + k_7\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (23)$$

3 Sonuç

Noether simetrileri özellikle $f(T)$, $f(R)$ gibi teorilerde sıkça kullanılan bir yöntemdir. Bu çalışmada iki adet Noether yükü bulunarak $B(r)$ fonksiyonu önce elenmiş daha sonra $A(r)$ integre edilip $B(r)$ tekrar elde edilmiştir.

Kaynaklar

Capozziello et. al.: Axially symmetric solutions in f(R)-gravity Classical and Quantum Gravity, Volume 27, Number 16

Ferraro R., Fiorini F.: Modified teleparallel gravity: Inflation without an inflaton Phys. Rev. D 75, 084031 – Published 18 April 2007

Linder E.V.: Einstein's other gravity and the acceleration of the Universe Phys. Rev. D 81, 127301 – Published 15 June 2010; Erratum Phys. Rev. D 82, 109902 (2010)

Rahaman F., et al. A New Proposal for Galactic Dark Matter: Effect of f(T) Gravity Int J Theor Phys (2014) 53: 370.

Erişim:
O25-1835: UAK-2018 Program — UAK Bildiri — Turkish J.A&A.