International Journal of Educational Studies in Mathematics, 2021, 8(1), 44-58

International Journal of Educational Studies in Mathematics

IJESIM

EDUGARDEN

Using a Number Line and Counters to Carry Out Basic Operations with Integers

Ercan Özdemir

RecepTayyip Erdoğan University, Faculty of Education, Rize, Turkey.

ABSTRACT

Students have various learning difficulties in doing operations with integers and integers. In order to overcome these difficulties, it is recommended to use various contexts, methods or models in teaching the subject of integers in the literature. This study explains the use of counters and number line models when carrying out addition, subtraction, multiplication and division operations with integers. Some operations, such as multiplying a negative number with a positive number, and dividing a negative integer with a positive integer, were found to be difficult and complicated using counters and a number line, and so the strategies of "searching for a pattern" and "relating to multiplication" were included for use in integer multiplication and division operations, respectively. The present study is expected to support students and prospective mathematics teachers in the use of counters and number line models when carrying out basic operations with integers.

ARTICLE INFO

Article History:
Received:10.12.2020
Received in revised form:08.01.2021
Accepted:04.02.2021
Available online:08.03.2021

Article Type: Review

Keywords: number line, counter, basic operations with integers

1. Introduction

Students are known to have difficulty in dealing with integers, such as in the different meanings of the minus sign (Vlassis, 2004), the lack of a good model that reveals all of the characteristics of negative numbers (Fischbein, 1987), and the wholesale transfer of operations and generalizations concerning natural numbers and integers (Hativa and Cohen, 1995). Accordingly, the use of different contexts and models is recommended when teaching integers (Billstein, Libeskind, and Lott, 2016; Van de Walle, Karp, and Bay-Williams, 2012). Number lines and counters are commonly used in the teaching of integers, although there is as yet a lack of consensus on the most efficient teaching model in this regard. Some studies recommend using a number line (Cemen, 1993; Cunningham, 2009; Peled, Mukhopadahyay, and Resnick, 1989), while others recommend using counters (Battista, 1983; Liebeck, 1990).

A review of literature reveals no studies in Turkey explaining the use of both counters and number lines for the carrying out of basic operations (addition, subtraction, multiplication and division) with integers. There is also a lack of consensus in literature on which models are more effective. To address this gap in literature, the present study explains the use of counters and number lines in the carrying out of basic operations with integers. Moreover, it explains the implementation of the strategies of "searching for a pattern" and "relating to multiplication" in the teaching of integer multiplication and division, respectively. Consequently, in addition to filling an important gap in literature, the study is also expected to help students and prospective mathematics teachers.

Corresponding author's address: RecepTayyip Erdoğan University, Faculty of Education, Rize, Turkey.
e-mail: ercan.ozdemir@erdogan.edu.tr
DOI: https://doi.org/10.17278/ijesim.838672

2. Method

When using a number line to carry out an addition operation, the rule was to move forward if the number has a positive sign, and backward if the number has a negative sign, and to "keep your direction" for the addition operation and to "turn around" for the subtraction operation (Billstein, Libeskind and Lott, 2016; Cemen, 1993; Cunningham, 2009). The operation (-5)+(+4) is carried out using a number line as follows.

1. Look at the positive numbers at point 0.
2. Take five steps backward for the (-5).
3. Keep your direction, as it is an addition operation.
4. Take four steps forward for the second term.
5. The point (-1) that you arrive at is the result of the operation (-5)+(+4).

The blue counters are used to represent positive integers, and the red counters to represent negative integers. The addition operation was represented by "adding to the box" and the subtraction operation by "removing from the box" (Battista, 1983; Billstein et al., 2016).

The operation (-5)+(+4) is carried out using the counters as follows.

1. The box has 5 red counters, in line with the first term.
2. As it is an addition operation, add as many counters to the box as the second term denotes.
3. Add 4 blue counters to the box due to the second term, and because it is an addition operation.
4. There are 5 red and 4 blue counters in the box. Remove 4 "pairs of zeros", consisting of 1 red counter and 1 blue counter.
5. At the end, only 1 red counter is left in the box, meaning that the result of the operation (-5)+(+4) is(-1).

3. Results

This study has explained the use of counters and number line models for the carrying out basic mathematical operations with integers. The number line can be used efficiently to carry out addition, subtraction and multiplication operations with integers, however, students may find that carrying out division operations using the number line is difficult and complicated.

Counters can be used efficiently to carry out addition and subtraction operations, as well as PxP (multiplication of two positive integers), PxN (multiplication of a positive integer with a negative integer), P:P (division of a positive integer by a positive integer) and N:N (division of a negative integer by a negative integer) operations. In contrast, students may find it complicated or difficult to carry out NxP, NxN, P:N and N:P operations using counters.

4.Conclusion and Suggestions

The strategies of "searching for a pattern" and "relating to multiplication" for the teaching of integer multiplication and division operations, respectively, are considered to be more efficient than models using a number line or counters, as these strategies avoid the difficulties that arise when modeling the operations with a number line or counters. The strategies of "searching for a pattern" and "associating with the multiplication operation" allow students to associate their prior knowledge with new learning, and to gain a better grasp of the relationship between the multiplication and division operations.

Tamsayılarla Temel İşlemlerin Sayı Doğrusu ve Sayma Pulları ile Yapılışı

Ercan Özdemir

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Rize, Türkiye.

ÖZ

Öğrenciler tamsayılar ve tamsayılarla işlemler yapma konusunda çeşitli öğrenme güçlükleri yaşamaktadırlar. Bu zorlukların üstesinden gelebilmek için alanyazında tamsayılar konusunun öğretiminde çeşitli bağlamların, yöntemlerin veya modellerin kullanılması tavsiye edilmektedir. Bu çalışmada tamsayılarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin sayma pulları ve sayı doğrusu modelleri ile yapılışı açıklanmıştır. Tamsayılarla bölme işlemlerinin yapılışında sayı doğrusu kullanımının; negatif bir tamsayı ile pozitif bir tamsayının çarpılması ve pozitif bir tamsayının negatif bir tamsayıya bölünmesi işlemlerinde sayma pullarının kullanılmasının zor ve karmaşık olduğu görülmüştür. Bu sebeple tamsayılarla çarpma işlemlerinde kullanılabilecek "örüntü arama" ve bölme işlemlerinde kullanılabilecek "çarpma işlemi ile ilişkilendirme" stratejilerine yer verilmiştir. Çalışmanın tamsayılarla temel işlemlerin sayı doğrusu ve sayma pulları modelleriyle yapılışı hakkında öğrencilere ve matematik öğretmeni adaylarına önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

MAKALE BİLGİ

Makale Tarihçesi:
Alındı:10.12.2020
Düzeltilmiş hali alındı:08.01.2021
Kabul edildi:04.02.2021
Çevrimiçi yayınlandı:08.03.2021
Makale Türü: Derleme

Anahtar Kelimeler: sayı doğrusu, sayma pulu, tamsayılarla temel işlemler

1. Giriş

Tamsayılar konusunda öğrencilerin çeşitli zorluklar yaşadıkları bilinmektedir. Bu durumun sebepleri arasında eksi işaretinin farklı anlamlarının olması (Vlassis, 2004), negatif sayıların tüm özelliklerini ortaya çıkaracak iyi bir modelin bulunmaması (Fischbein, 1987), doğal sayılardaki işlem ve genellemelerin tam sayılara aynen aktarılması (Hativa ve Cohen, 1995) gösterilebilir. Bu sebeple tamsayılar konusunun öğretiminde çeşitli bağlamlar ve modellerin kullanılması önerilmektedir (Billstein, Libeskind ve Lott, 2016; Van de Walle, Karp, ve Bay-Williams, 2012). Tamsayılar konusunun öğretiminde sayı doğrusu ve sayma pulları yaygın olarak kullanılmaktadır. Tamsayılar konusunun öğretiminde hangi modelin daha verimli olduğuna dair fikir birliği yoktur. Bir kısım çalışmalar sayı doğrusunun (Cemen, 1993; Cunningham, 2009; Peled, Mukhopadahyay ve Resnick, 1989), diğer bir kısım ise sayma pulunun kullanılmasını tavsiye etmektedir (Battista, 1983; Liebeck, 1990).

Alan yazın incelendiğinde tamsayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde sayma pulları veya sayı doğrusu kullanımı ile ilgili çeşitli çalışmalar yapıldığı görülmektedir. Battista (1983), tamsayılarda dört işlemin yapılışında "pozitif ve negatif elektrik yüklerinin" nasıl kullanılacağını açıklamıştır. Cemen (1993), tamsayılarda toplama ve çıkarma işlemlerinin sayı doğrusu modeli ile nasıl yapılacağını göstermiştir. Cunningham (2009), tamsayılarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinde sayı doğrusunun nasıl kullanılacağını açıklamıştır. Bosse, Lynch-Davis, Adu-Gyamfi ve Chandler (2016) tamsayılarla işlemlerde temsillerin kullanım durumlarını araştırmışlardır. Bosse ve ark. (2016) sayma pulları ile NxP (negatif bir tamsayı ile pozitif bir tamsayının çarpılması), NxN (negatif bir tamsayı ile negatif bir tamsayının çarpılması) ve P:N (pozitif bir tamsayının ile negatif bir tamsayıya bölünmesi) dışındaki işlemlerin yapılabileceğini belirtmişlerdir. Aynı araştırmacılar, sayı doğrusu modeli ile P-N (pozitif bir tamsayıdan negatif bir tamsayının çıkarılması), NxP (negatif bir tamsayı ile pozitif bir tamsayının çarpılması), NxN (negatif bir tamsayı ile negatif bir tamsayının çarpılması) ve P:N (pozitif bir tamsayının, negatif bir tamsayıya bölünmesi) işlemlerinin yapılamayacağı belirtilmiştir. N-N (negatif bir tamsayıdan, negatif bir tamsayının çıkarılması) işleminin sınırlı bir şekilde yapılabileceğini, bunların (NxP, NxN P:N ve N-N) dışında kalan işlemlerin ise sayı doğrusu modeli ile yapılabileceği ifade edilmiştir (Bosse ve ark., 2016).

Alan yazın incelendiğinde, Türkiye'de tamsayılarla temel işlemlerin (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) hem sayma pulları hem de sayı doğrusu ile nasıl yapılacağını açıklayan herhangi bir bilimsel çalışmaya rastlanmamıştır. Yine alan yazında hangi modelin daha etkili olduğuna dair fikir birliği bulunmamaktadır. Belirtilen sebeplerden dolayı, bu çalışmada tamsayılarla temel işlemlerin sayma pulları ve sayı doğrusu ile nasıl yapılacağı açıklanmıştır. Ayrıca tamsayılarla çarpma işleminin kavratılmasında "örüntü arama" ve tamsayılarla bölme işleminin öğretiminde "çarpma işlemi ile ilişkilendirme" stratejilerinin uygulanışına da değinilmiştir. Dolayısıyla çalışmanın alandaki boşluğu doldurmasının yanı sıra öğrencilere ve matematik öğretmeni adaylarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

2. Yöntem

Bu çalışmada tamsayılarda temel işlemlerin sayı doğrusu ve sayma pulları ile yapılışı tanıtılmış. Ayrıca tamsayılarla çarpma işleminin öğretiminde kullanılabilecek "örüntü arama stratejisi" ve tamsayılarla bölme işleminin öğretiminde kullanılabilecek "çarpma işlemi ile ilişkilendirme" stratejilerine yer verilmiştir.

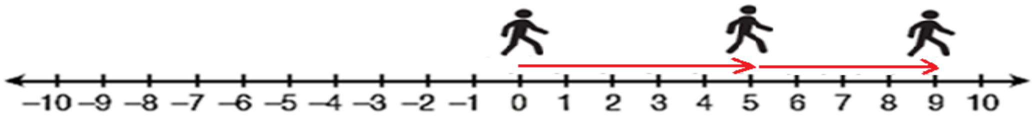
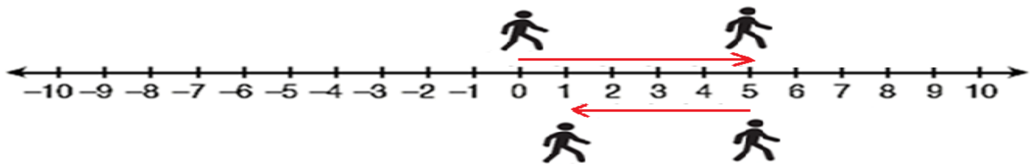
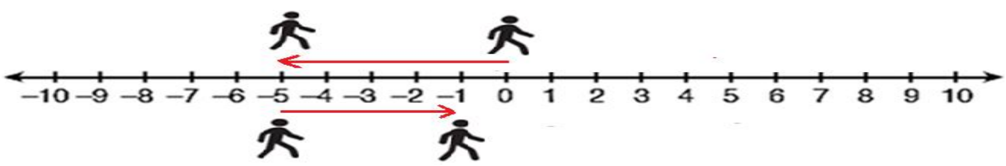
3. Tamsayılarda Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemlerinin Sayı Doğrusu ile Yapılışı

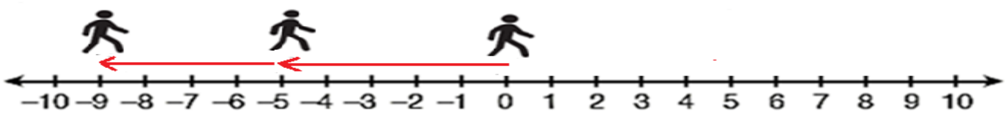
Bu bölümde tamsayılarla temel işlemlerin sayı doğrusunda yapılışı açıklanmıştır. Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin her biri ayrı bir başlık altında ele alınmıştır.

3.1. Tamsayılarda Toplama İşlemlerinin Sayı Doğrusu ile Yapılışı

Sayı doğrusu ile toplama işlemi yapılırken sayı işareti pozitif ise ileri, negatif ise geri gitmek; toplama işlemi "bulunduğun yönü koru" ve çıkarma işlemi ise "bulunduğun yönün tersine dön" şeklinde ele alınmıştır (Billstein, Libeskind ve Lott, 2016; Cemen, 1993; Cunningham, 2009). Tamsayılarda toplama işlemlerinin sayı doğrusu ile yapılışı tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Tamsayılarda toplama işlemlerinin sayı doğrusu ile yapılışı

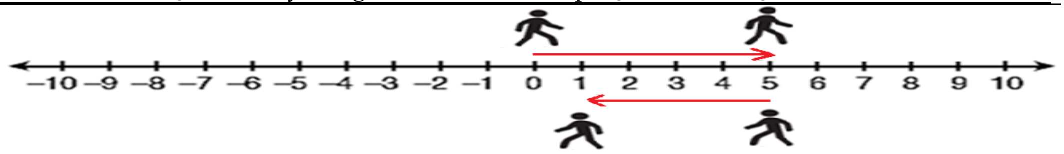
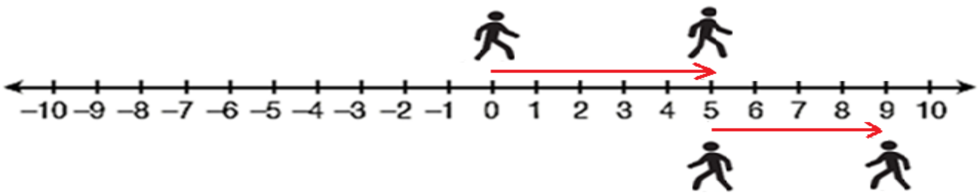
İşlem	İşlemin Sayı Doğrusu Üzerinde Yapılışı ve Sözel açıklaması
(+5)+(+4)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Birinci terimden dolayı 5 br ileri gidilir. 3. Toplama işleminden dolayı yön korunur. 4. İkinci terimden dolayı 4 br ileri gidilir. 5. Ulaşılan (+9) noktası, (+5)+(+4) işleminin sonucudur.
(+5)+(-4)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Birinci terimden dolayı 5 br ileri gidilir. 3. Toplama işleminden dolayı yön korunur. 4. İkinci terimden dolayı 4 br geri gidilir. 5. Ulaşılan (+1) noktası, (+5)+(-4) işleminin sonucudur.
(-5)+(+4)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır.

	2. Birinci terimden dolayı 5 br geri gidilir. 3. Toplama işleminden dolayı yön korunur. 4. İkinci terimden dolayı 4 br ileri gidilir. 5. Ulaşılan (-1) noktası, (-5)+(+4) işleminin sonucudur.
(-5)+(-4)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Birinci terimden dolayı 5 br geri gidilir. 3. Toplama işleminden dolayı yön korunur. 4. İkinci terimden dolayı 4 br geri gidilir. 5. Ulaşılan (-9) noktası, (-5)+(-4) işleminin sonucudur.

3.2. Tamsayılarda Çıkarma İşlemlerinin Sayı Doğrusu ile Yapılışı

Sayı doğrusu ile toplama işlemi yapılırken sayı işareti pozitif ise ileri hareket etmek, negatif ise geri hareket etmek ve çıkarma işlemi ise "bulunduğun yönün tersine dön ("zıt yöne dönmek" veya "geriye dönmek" şeklinde de ifade edilebilir)" şeklinde ele alınmıştır (Billstein ve ark., 2016; Cemen, 1993; Cunningham, 2009). Tamsayılarda çıkarma işlemlerinin sayı doğrusu ile yapılışı tablo 2'de verilmiştir.

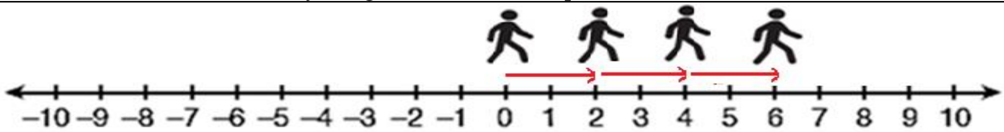
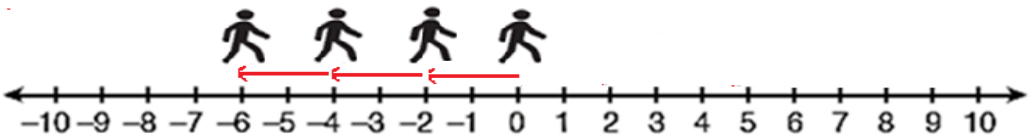
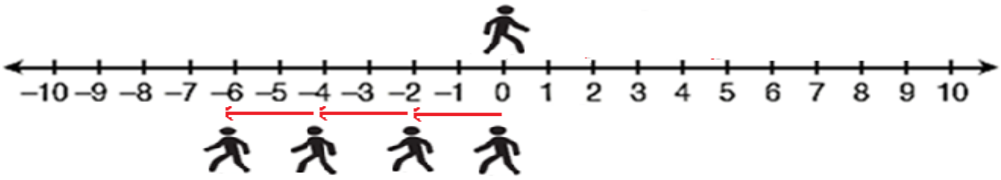
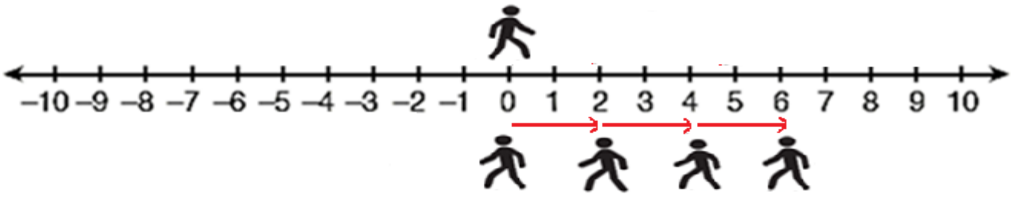
Tablo 2. Tamsayılarda çıkarma işlemlerinin sayı doğrusu ile yapılışı

İşlem	İşlemin Sayı Doğrusu Üzerinde Yapılışı ve Sözel açıklaması
(+5)-(+4)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Birinci terimden dolayı 5 br ileri gidilir. 3. Çıkarma işleminden dolayı yön değiştirilerek negatif eksene dönülür. 4. İkinci terimden dolayı 4 br ileri gidilir. 5. Ulaşılan (+1) noktası, (+5)-(+4) işleminin sonucudur.
(+5)-(-4)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Birinci terimden dolayı 5 br ileri gidilir. 3. Çıkarma işleminden dolayı yön değiştirilerek negatif eksene dönülür. 4. İkinci terimden dolayı 4 br geri gidilir. 5. Ulaşılan (+9) noktası, (+5)-(-4) işleminin sonucudur.

3.3. Tamsayılarda Çarpma İşlemlerinin Sayı Doğrusu ile Yapılışı

Burada çarpma işlemi, tekrarlı toplama olarak ele alınmıştır. Yani, (+3).(+2) = +(+2) +(+2) +(+2) dir. Bu durumda da çarpılan sayının işareti, işlem işareti (yönünü koru veya yönünü değiştir); çarpanın işareti ise sayı işareti (ileri veya geri gitmek) olarak ele alınmaktadır. Tamsayılarda çarpma işlemlerinin sayı doğrusu ile yapılışı tablo 3'de açıklanmıştır.

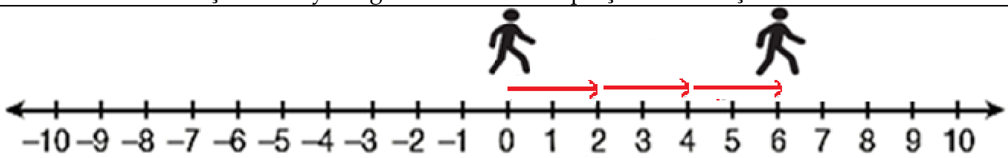
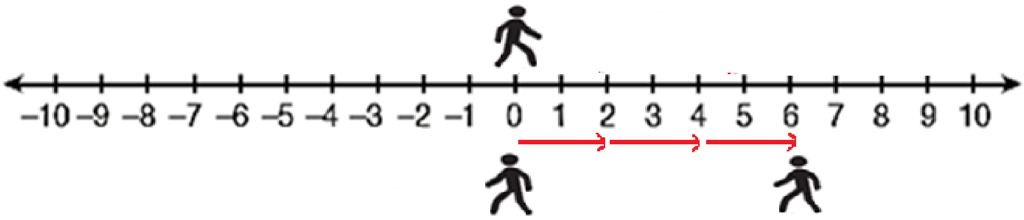
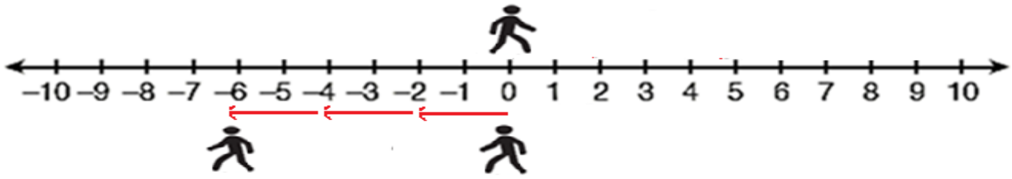
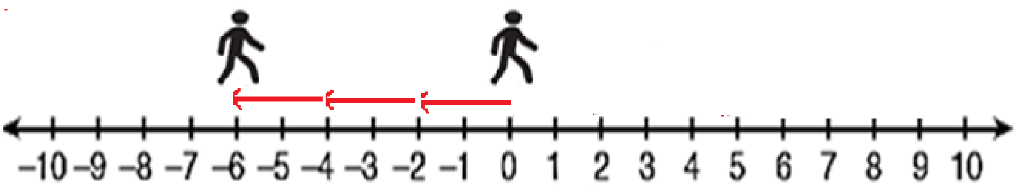
Tablo 3. Tamsayılarda çarpma işlemlerinin sayı doğrusu ile yapılışı

İşlem	İşlemin Sayı Doğrusu Üzerinde Yapılışı ve Sözel açıklaması
(+3).(+2)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Çarpılan sayının işareti, işlem işareti olduğundan mevcut yön korunarak 3 adım atılır. Adım büyüklüğü için çarpan sayı dikkate alınır. 3. Çarpanın işareti, sayı işareti olduğundan ileri doğru 2 birimlik adımlarla gidilir. 4. Ulaşılan (+6) noktası, (+3).(+2) işleminin sonucudur.
(+3).(-2)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Çarpılan sayının işareti, işlem işareti olduğundan mevcut yön korunarak 3 adım atılır. Adım büyüklüğü için çarpan sayı dikkate alınır. 3. Çarpanın işareti, sayı işareti olduğundan geri doğru 2 birimlik adımlarla gidilir. 4. Ulaşılan (-6) noktası, (+3).(-2) işleminin sonucudur.
(-3).(+2)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Çarpılan sayının işareti, işlem işareti olduğundan negatif eksene dönülerek 3 adım atılır. Adım büyüklüğü için çarpan sayı dikkate alınır. 3. Çarpanın işareti, sayı işareti olduğundan ileri doğru 2 birimlik adımlarla gidilir. 4. Ulaşılan (-6) noktası, (-3).(+2) işleminin sonucudur.
(-3).(-2)	 1. 0 noktasında pozitif eksene bakılır. 2. Çarpılan sayının işareti, işlem işareti olduğundan negatif eksene dönülerek 3 adım atılır. Adım büyüklüğü için çarpan sayı dikkate alınır. 3. Çarpanın işareti, sayı işareti olduğundan geri doğru 2 birimlik adımlarla gidilir. 4. Ulaşılan (+6) noktası, (-3).(-2) işleminin sonucudur.

3.4. Tamsayılarda Bölme İşlemlerinin Sayı Doğrusu ile Yapılışı

Burada bölme işlemi tekrarlı çıkarma (veya ölçüm bölmesi) yapısıyla ele alınmıştır. (+6):(+2) işlemi (+6)-(+2)-(+2)-(+2) şeklinde düşünülerek; bölen terimin işareti, sayı işareti olarak (ileri gitmek veya geri gitmek şeklinde) değerlendirilecektir. Tamsayılarda bölme işlemlerinin sayı doğrusu üzerinde yapılışı tablo 4'de gösterilmiştir.

Tablo 4. Tamsayılarda bölme işlemlerinin sayı doğrusu üzerinde yapılışı

İşlem	İşlemin Sayı Doğrusu Üzerinde Yapılışı ve Sözel açıklaması
(+6):(+2)	 1. 0 noktasında pozitif yöne bakılır. 2. Bölünen sayıdan (yani +2'den) dolayı 2 birimlik adımlarla ileri gidilir. 3. (+6) noktasına ulaşmak için bulunan yönde mi ileri gidilmeli, yoksa negatif eksene dönüldükten sonra mı ileri gidilmeli? 4. Yön değiştirilmeyeceği için işlemin sonucu pozitif olacaktır. Mevcut yönde 2 birimlik adımlarla +6 noktasına ulaşmak için atılan adım sayısı, bölme işleminin sonucu olacaktır. 5. Yön değiştirilmeden (+), 3 adımda +6 noktasına ulaşıldığı için, bölme işleminin sonucu +3'dür.
(+6):(-2)	 1. 0 noktasında pozitif yöne bakılır. 2. Bölünen sayıdan (yani -2'den) dolayı 2 birimlik adımlarla geri gidilir. 3. (+6) noktasına ulaşmak için bulunan yönde mi geri gidilmeli, yoksa negatif eksene dönüldükten sonra mı geri gidilmeli? 4. Yön değiştirileceği için işlemin sonucu negatif olacaktır. Negatif eksene bakılırken 2 birimlik adımlarla +6 noktasına ulaşmak için atılan adım sayısı, bölme işleminin sonucu olacaktır. 5. Yön değiştirilerek (-), 3 adımda +6 noktasına ulaşıldığı için, bölme işleminin sonucu -3'dür.
(-6):(+2)	 1. 0 noktasında pozitif yöne bakılır. 2. Bölünen sayıdan (yani +2'den) dolayı 2 birimlik adımlarla ileri gidilir. 3. (-6) noktasına ulaşmak için bulunan yönde mi ileri gidilmeli, yoksa negatif eksene dönüldükten sonra mı ileri gidilmeli? 4. Yön değiştirileceği için işlemin sonucu negatif olacaktır. Negatif eksene bakılırken 2 birimlik adımlarla -6 noktasına ulaşmak için atılan adım sayısı, bölme işleminin sonucu olacaktır. 5. Yön değiştirilerek (-), 3 adımda -6 noktasına ulaşıldığı için bölme işleminin sonucu -3'dür.
(-6):(-2)	 1. 0 noktasında pozitif yöne bakılır. 2. Bölünen sayıdan (yani -2'den) dolayı 2 birimlik adımlarla geri gidilir. 3. (-6) noktasına ulaşmak için bulunan yönde mi geri gidilmeli yoksa negatif eksene dönüldükten sonra mı geri gidilmeli? 4. Yön değiştirilmeyeceği için işlemin sonucu pozitif olacaktır. Mevcut yönde 2 birimlik adımlarla +6 noktasına ulaşmak için atılan adım sayısı, bölme işleminin sonucu olacaktır. 5. Yön değiştirilmeden (+), 3 adımda +6 noktasına ulaşıldığı için, bölme işleminin sonucu -3'dür.

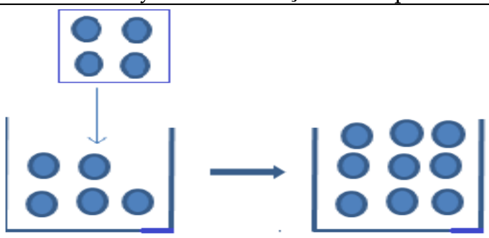
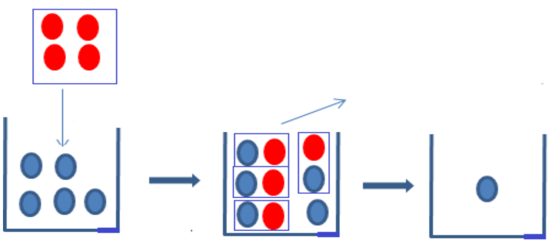
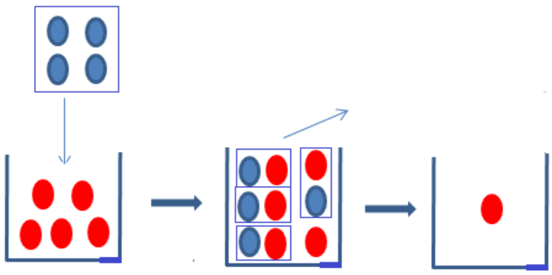
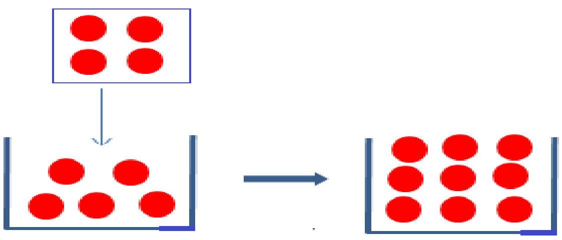
4. Tamsayılarda Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemlerinin Sayma Pulları ile Yapılışı

Bu bölümde tamsayılarda dört işlemin sayma pulları ile yapılışı açıklanmıştır. Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin her biri ayrı bir başlık altında ele alınmıştır.

4.1. Tamsayılarda Toplama İşlemlerinin Sayma Pulları ile Yapılışı

Pozitif tam sayıları temsil etmek için mavi pullar, negatif tam sayıları temsil etmek için kırmızı pullar kullanılmıştır. Toplama işlemi "kutuya ilave etme" çıkarma işlemi kutudan çıkarma olarak ele alınmıştır (Battista, 1983; Billstein ve ark., 2016).

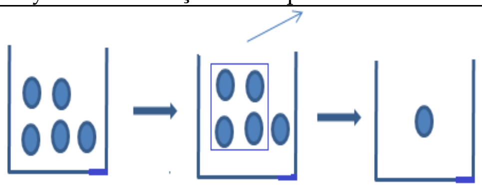
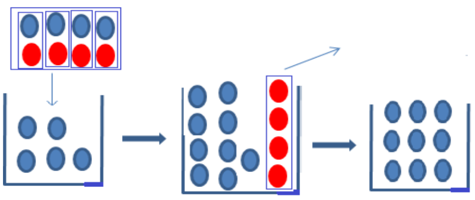
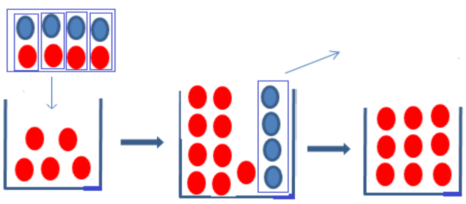
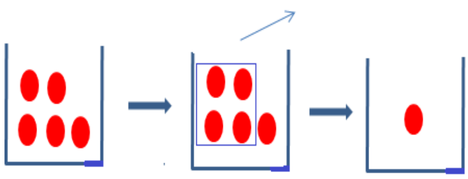
Tablo 5. Tamsayılarda toplama işlemlerinin sayma pulları ile yapılışı

İşlem	Sayma Pulu İle İşlemin Yapılması	Sözel Açıklama
(+5)+(+4)		1. Kutunun içinde birinci terimden dolayı 5 mavi pul vardır. 2. Toplama işlemi olduğu için kutuya ikinci terim kadar pul ilave edilir. 3. İkinci terim ve toplama işleminden dolayı 4 mavi pul kutuya ilave edilir. 4. Son durumda kutunun içerisinde 9 tane mavi pul olduğu için, (+5)+(+4) işleminin sonucu +9 olur.
(+5)+(-4)		1. Kutunun içinde birinci terimden dolayı 5 mavi pul vardır. 2. Toplama işlemi olduğu için kutuya ikinci terim kadar pul ilave edilir. 3. İkinci terim ve toplama işleminden dolayı 4 kırmızı pul kutuya ilave edilir. 4. Kutuda 5 mavi, 4 kırmızı pul vardır. 1 mavi ve 1 kırmızı puldan oluşan 4 tane "sıfır çifti" kutudan çıkarılır. 5. Son durumda kutuda 1 mavi pul kaldığı için, (+5)+(-4) işleminin sonucu +1 olur.
(-5)+(+4)		1. Kutunun içinde birinci terimden dolayı 5 kırmızı pul vardır. 2. Toplama işlemi olduğu için kutuya ikinci terim kadar pul ilave edilir. 3. İkinci terim ve toplama işleminden dolayı 4 mavi pul kutuya ilave edilir. 4. Kutuda 5 kırmızı, 4 mavi pul vardır. 1 mavi ve 1 kırmızı puldan oluşan 4 tane "sıfır çifti" kutudan çıkarılır. 5. Son durumda kutuda 1 kırmızı pul kaldığı için, (-5)+(+4) işleminin sonucu -1 olur.
(-5)+(-4)		1. Kutunun içinde birinci terimden dolayı 5 kırmızı pul vardır. 2. Toplama işlemi olduğu için kutuya ikinci terim kadar pul ilave edilir. 3. İkinci terim ve toplama işleminden dolayı 4 kırmızı pul kutuya ilave edilir. 4. Son durumda kutunun içerisinde 9 tane kırmızı pul olduğu için, (-5)+(-4) işleminin sonucu -9 olur.

4.2. Tamsayılarda Çıkarma İşlemlerinin Sayma Pulları ile Yapılışı

Pozitif tam sayıları temsil etmek için mavi pullar, negatif tam sayıları temsil etmek için kırmızı pullar kullanılmıştır. Çıkarma işlemi "kutudan çıkarma" olarak ele alınmıştır (Battista, 1983; Billstein ve ark., 2016). Tamsayılarda çıkarma işlemlerinin sayma pulları ile yapılışı tablo 6'da açıklanmıştır. Tablo 6'da verilen (+5)-(+4) işleminde, çıkan sayı eksilen sayıdan mutlak değerce küçüktür. Eğer çıkan sayı, eksilen sayıdan mutlak değerce büyük olması halinde, sayma pulları ile çıkarma işleminin yapılışının 3. adımında gerekli sıfır çifti ilave edilmesi gerekir. Diğer adımlar ise aynı şekilde uygulanır. Benzer durum (-5)-(-4) işlemi için de geçerlidir. Çıkan sayının eksilen sayıdan mutlak değerce büyük olması durumunda, gerekli sıfır çifti ilave edildikten sonra işleme devem edilir.

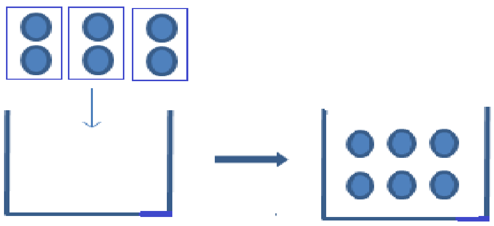
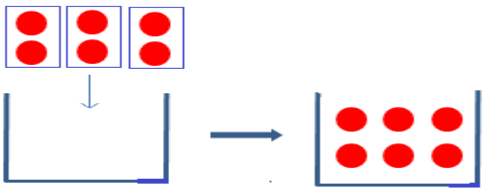
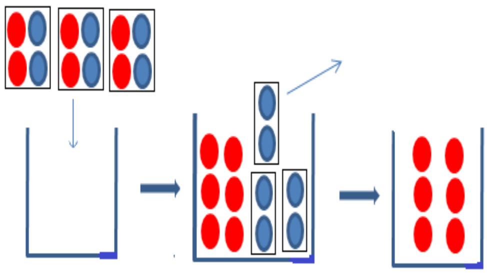
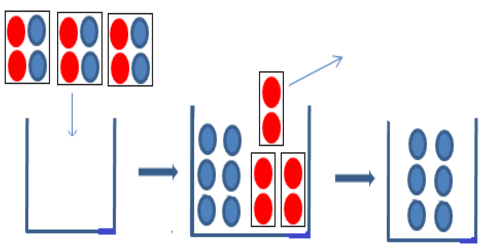
Tablo 6. Tamsayılarda çıkarma işlemlerinin sayma pulları ile yapılışı

İşlem	Sayma Pulu İle İşlemin Yapılması	Sözel Açıklama
(+5)-(+4)		1. Kutunun içinde birinci terimden dolayı 5 mavi pul vardır. 2. Çıkarma işlemi olduğu için kutudan ikinci terim kadar pul çıkarılmalıdır. 3. İkinci terim ve çıkarma işleminden dolayı 4 mavi pul kutudan çıkarılır. 4. Son durumda kutunun içerisinde 1 tane mavi pul olduğu için, (+5)-(+4) işleminin sonucu +1 olur.
(+5)-(-4)		1. Kutunun içinde birinci terimden dolayı 5 mavi pul vardır. 2. Çıkarma işlemi olduğu için kutudan ikinci terim kadar pul çıkarılır. 3. İkinci terim ve çıkarma işleminden dolayı 4 kırmızı pul kutudan çıkarılmalıdır. Kutuda 4 kırmızı pul olmadığı için kutuya 1 mavi ve 1 kırmızı puldan oluşan 4 tane "sıfır çifti" ilave edilir. 4. Kutudan 9 mavi ve 4 kırmızı pul vardır. 4 kırmızı pul kutudan çıkarılır. 5. Son durumda kutuda 9 mavi pul kaldığı için, (+5)-(-4) işleminin sonucu +9 olur.
(-5)-(+4)		1. Kutunun içinde birinci terimden dolayı 5 kırmızı pul vardır. 2. Çıkarma işlemi olduğu için kutudan ikinci terim kadar pul çıkarılır. 3. İkinci terim ve çıkarma işleminden dolayı 4 mavi pul kutudan çıkarılmalıdır. Kutuda 4 mavi pul olmadığı için kutuya 1 mavi ve 1 kırmızı puldan oluşan 4 tane "sıfır çifti" ilave edilir. 4. Kutudan 9 kırmızı ve 4 mavi pul vardır. 4 mavi pul kutudan çıkarılır. 5. Son durumda kutuda 9 kırmızı pul kaldığı için, (-5)-(+4) işleminin sonucu -9 olur.
(-5)-(-4)		1. Kutunun içinde birinci terimden dolayı 5 kırmızı pul vardır. 2. Çıkarma işlemi olduğu için kutudan ikinci terim kadar pul çıkarılmalıdır. 3. İkinci terim ve çıkarma işleminden dolayı kutudan 4 kırmızı pul çıkarılır. 4. Son durumda kutunun içerisinde 1 tane kırmızı pul olduğu için, (-5)-(+4) işleminin sonucu -1 olur

4.3. Tamsayılarda Çarpma İşlemlerinin Sayma Pulları ile Yapılışı

Burada çarpma işlemi, tekrarlı toplama yapısıyla ele alınmıştır. Yani, (+3).(+2) = +(+2) +(+2) +(+2)'dir. Bu durumda da çarpılan sayının işareti, işlem işareti (kutuya ilave etme veya kutudan çıkarma); çarpanın işareti ise sayı işareti (mavi veya kırmızı pul) olarak ele alınmaktadır (Battista, 1983). Tamsayılarda çarpma işlemlerinin sayma pulları ile yapılışı tablo 7' de verilmiştir.

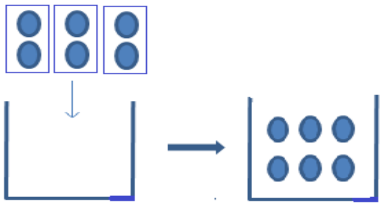
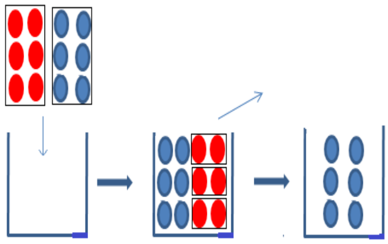
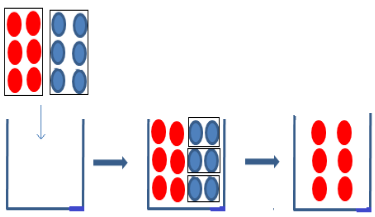
Tablo 7. Tamsayılarda çarpma işlemlerinin sayma pulları ile yapılışı

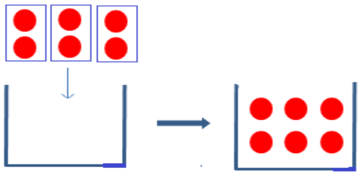
İşlem	Sayma Pulu İle İşlemin Yapılması	Sözel Açıklama
(+3).(+2)		1. Çarpılan sayıdan dolayı kutuya 3 grup pul ilave edilmelidir. Pul rengi ve bir gruptaki pul sayısı için, çarpan sayı dikkate alınır. 2. Çarpan sayıdan dolayı 2'li mavi pul grupları kullanılmalıdır. 3. Yukarıdaki maddelerden hareketle kutuya 3 adet, 2'li mavi pul grupları ilave edilir. 4. Son durumda kutuda 6 tane mavi pul olduğu için, (+3).(+2) işleminin sonucu +6 olur.
(+3).(-2)		1. Çarpılan sayıdan dolayı kutuya 3 grup pul ilave edilmelidir. Pul rengi ve bir gruptaki pul sayısı için, çarpan sayı dikkate alınır. 2. Çarpan sayıdan dolayı 2'li kırmızı pul grupları kullanılmalıdır. 3. Yukarıdaki maddelerden hareketle kutuya 3 adet, 2'li kırmızı pul grupları ilave edilir. 4. Son durumda kutuda 6 tane kırmızı pul olduğu için, (+3).(-2) işleminin sonucu -6 olur.
(-3).(+2)		1. Çarpılan sayıdan dolayı kutudan 3 grup pul çıkarılmalıdır. Pul rengi ve bir gruptaki pul sayısı için, çarpan sayı dikkate alınır. 2. Çarpan sayıdan dolayı 2'li mavi pul grupları kullanılmalıdır. 3. Yukarıdaki maddelerden hareketle kutudan 3 adet, 2'li mavi pul grupları çıkarılmalıdır. Kutuda pul olmadığı için 2 mavi ve 2 kırmızı pul gruplarından oluşan 3 adet sıfır çifti ilave edilir. 4. Kutuda 6 mavi ve 6 kırmızı pul olur. Mavi pullar 2'li gruplanır. Daha sonra 3 adet 2'li mavi pul grubu çıkarılır. 5. Son durumda kutuda 6 tane kırmızı pul olduğu için, (+3).(-2) işleminin sonucu -6 olur.
(-3).(-2)		1. Çarpılan sayıdan dolayı kutudan 3 grup pul çıkarılmalıdır. Pul rengi ve bir gruptaki pul sayısı için, çarpan sayı dikkate alınır. 2. Çarpan sayıdan dolayı 2'li kırmızı pul grupları kullanılmalıdır. 3. Yukarıdaki maddelerden hareketle kutudan 3 adet, 2'li kırmızı pul grupları çıkarılmalıdır. Kutuda pul olmadığı için 2 mavi ve 2 kırmızı pul gruplarından oluşan 3 adet sıfır çifti ilave edilir. 4. Kutuda 6 mavi ve 6 kırmızı pul olur. Kırmızı pullar 2'li gruplanır. Daha sonra 3 adet 2'li kırmızı pul grubu çıkarılır. 5. Son durumda kutuda 6 tane mavi pul olduğu için, (-3).(-2) işleminin sonucu +6 olur.

4.4. Tamsayılarda Bölme İşlemlerinin Sayma Pulları ile Yapılışı

Burada bölme işlemi tekrarlı çıkarma (veya ölçüm bölmesi) yapısıyla ele alınmıştır. Yani (+6):(+2) işlemi (+6)-(+2)-(+2)-(+2) şeklinde düşünülerek; "bölen" terimin işareti, sayı işareti olarak (mavi veya kırmızı pul şeklinde) değerlendirilmiştir. Bölünen sayı ise işlem sonucunda kutuda olması gereken sayı olarak ele alınmıştır (Battista, 1983). Tamsayılarda bölme işlemlerinin sayma pulları ile yapılışı tablo 8'de verilmiştir.

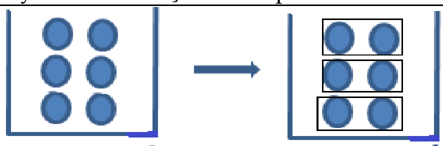
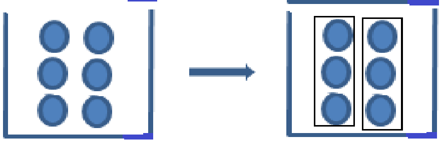
Tablo 8. Tamsayılarda bölme işlemlerinin sayma pulları ile yapılışı

İşlem	Sayma Pulu İle İşlemin Yapılması	Sözel Açıklama
(+6):(+2)		1.Bölünen sayıdan dolayı, kutunun içinde 6 tane mavi pul oluşması amaçlanmaktadır. 2. Bölen terimden dolayı 2'li mavi pul grupları kullanılmalıdır. 3. Kutunun içerisinde 6 mavi pul oluşması için, 2'li mavi pul grupları kutuya ilave mi edilmeli, yoksa kutudan çıkarılmalı mı? Bu sorunun cevabı "kutuya 2'li mavi pul grupları ilave edilmelidir" şeklindedir. 4. Kutuda 6 mavi pul oluşması için, 2'li mavi pul gruplarından "3 grup ilave" edildiği için (+6):(+2) işleminin sonucu +3 olur. (Kutuya pul eklendiği için sonucun pozitifliği, grup sayısından dolayı sonucun sayısal değeri olan 3 elde edilir).
(+6):(-2)		1.Bölünen sayıdan dolayı, kutunun içinde 6 tane mavi pul oluşması amaçlanmaktadır. 2. Bölen terimden dolayı 2'li kırmızı pul grupları kullanılmalıdır. 3. Kutunun içerisinde 6 mavi pul oluşması için, 2'li kırmızı pul grupları kutuya ilave mi edilmeli yoksa kutudan çıkarılmalı mı? Bu sorunun cevabı "kutuya 2'li kırmızı pul grupları çıkarılmalıdır" şeklindedir. 4. Kutuda 6 mavi pul oluşması için, kutuya önce 6 mavi ve 6 kırmızı pul ilave edilir. 5. Kırmızı pullar 2'li gruplar halinde kutudan çıkarılır. Kutudan " 3 grup çıkarıldığı" için, (+6):(-2) işleminin sonucu -3 olur. (Kutudan pul çıkarıldığı için sonucun negatifliği, grup sayısından dolayı sonucun sayısal değeri olan 3 elde edilir).
(-6):(+2)		1.Bölünen sayıdan dolayı, kutunun içinde 6 tane kırmızı pul oluşması amaçlanmaktadır. 2. Bölen terimden dolayı 2'li mavi pul grupları kullanılmalıdır. 3. Kutunun içerisinde 6 mavi pul oluşması için, 2'li mavi pul grupları kutuya ilave mi edilmeli yoksa kutudan çıkarılmalı mı? Bu sorunun cevabı "kutuya 2'li mavi pul grupları çıkarılmalıdır" şeklindedir. 4. Kutuda 6 kırmızı pul oluşması için, kutuya önce 6 mavi ve 6 kırmızı pul ilave edilir. 5. Mavi pullar 2'li gruplar halinde kutudan çıkarılır. Kutudan " 3 grup çıkarıldığı" için, (-6):(+2) işleminin sonucu -3 olur. (Kutudan pul çıkarıldığı için sonucun negatifliği, grup sayısından dolayı sonucun sayısal değeri olan 3 elde edilir).

(-6):(-2)		1.Bölünen sayıdan dolayı, kutunun içinde 6 tane kırmızı pul oluşması amaçlanmaktadır. 2. Bölen terimden dolayı 2'li kırmızı pul grupları kullanılmalıdır. 3. Kutunun içerisinde 6 kırmızı pul oluşması için, 2'li kırmızı pul grupları kutuya ilave mi edilmeli yoksa kutudan çıkarılmalı mı? Bu sorunun cevabı "kutuya 2'li kırmızı pul grupları ilave edilmelidir" şeklindedir. 4. Kutuda 6 kırmızı pul oluşması için, 2'li kırmızı pul gruplarından "3 grup ilave" edildiği için (-6):(-2) işleminin sonucu +3 olur. (Kutuya pul eklendiği için sonucun pozitifliği, grup sayısından dolayı sonucun sayısal değeri olan 3 elde edilir).

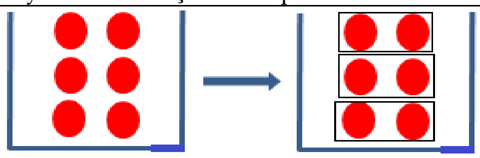
Pozitif bir tamsayının, pozitif bir tam sayıya bölünmesi işleminin sayma pulları ile yapılışında kullanılan iki farklı çözüm yolu tablo 9'da gösterilmiştir. Tablo 9'da verilen çözüm yolları farklı işaretli tam sayıların birbirine bölümünde kullanılamaz. Negatif bir tam sayının, negatif bir tam sayıya bölünmesi işleminde ise sadece "2. yol" kullanılabilir.

Tablo 9. (+6):(+2) işleminin sayma pulları ile farklı yollardan yapılışı

	Sayma Pulu İle İşlemin Yapılması	Sözel Açıklama
2.yol		Bu yöntemde (+6):(+2) işlemi, "6 mavi pul içerisinde 2 mavi pul bulunan kaç gruba ayrılır" şeklinde yorumlanmaktadır. 3 gruba ayrıldığı için (+6):(+2) işleminin sonucu +3 olur.
3.yol		Bu yöntemde (+6):(+2) işlemi, "6 mavi pul 2 eş gruba ayrılırsa bir grupta hangi renkten kaç tane pul bulunur" şeklinde yorumlanmaktadır. Bir grupta "3 mavi pul" olduğu için (+6):(+2) işleminin sonucu +3 olur.

Negatif bir tamsayının, negatif bir tam sayıya bölünmesi işleminin sayma pulları ile yapılışında kullanılan farklı bir çözüm yolu tablo 10'da gösterilmiştir.

Tablo 10. (-6):(-2) işleminin sayma pulları ile farklı bir yoldan yapılışı

Sayma Pulu İle İşlemin Yapılması	Sözel Açıklama
	Bu yöntemde (-6):(-2) işlemi, "6 kırmızı pul içerisinde 2 kırmızı pul bulunan kaç gruba ayrılır" şeklinde yorumlanmaktadır. 3 gruba ayrıldığı için (+6):(+2) işleminin sonucu +3 olur.

5. Tamsayılarda Çarpma İşleminin Öğretiminde Örüntü Arama Stratejisinin Kullanımı

Tamsayılarda çarpma işleminin öğretiminde "örüntü arama stratejisi" kullanılabilir. Farklı işaretli tamsayıların çarpımında şekil 1'deki gibi bir yöntem takip edilebilir.

1. Adım	**2. Adım**	**3. Adım**
(+2).(+2)=+4	(+2).(+2) = +4	+. + = +
(+2).(+1)=+2	(+2).(+1) = +2	+. + = +
(+2).(0)=0	(+2).(0) = 0	
(+2).(-1)=...	(+2).(-1) = -2	+ . - = -
(+2).(-2)=...	(+2).(-2) = -4	+ . - = -

Şekil 1. Farklı işaretli tamsayıların çarpımının öğretiminde örüntü arama stratejisinin kullanımı

Şekil 1'deki 1. adımda verilen "(+2).(+2)" ve "(+2).(+1)" işlemlerinin sonuçları doğal sayılarla ilişkilendirilerek veya tekrarlı toplama ile "(+4)" ve "(+2)" şeklinde öğrencilerle birlikte bulunur.

“(+2).0” işleminin sonucu, sıfırın yutan eleman özelliğini kullanarak veya tekrarlı toplama ile “0” şeklinde hesaplanır. Bu işlemleri takiben 1. adımda verilen çarpma işlemlerindeki çarpılan sayıların aynı (+2), çarpan sayıların birer azalırken sonuçların nasıl değiştiği incelenir. Sonuçların 2 azaldığı tespit edildikten sonra, 2. adıma geçilir. Burada örüntü yaklaşımı kullanılarak (+2).(-1) ve (+2).(-2) işlemlerinin sonuçları “-2” ve “-4” şeklinde bulunur. 3. adımda ise 2. adımdaki işlemlerde yer alan sayılar silinerek sadece işaretler bırakılır. Buradan da pozitif bir tamsayı ile negatif bir tamsayı çarpıldığında, sonucun negatif olduğu görülür. Ayrıca çarpma işleminin değişme özelliğini kullanarak negatif bir tamsayı ile pozitif bir tamsayı çarpıldığında, sonucun negatif olduğu belirtilmelidir. Bu bilgi, şekil 2’de verilen negatif iki tamsayının çarpımının sonucunun pozitif olduğunu göstermede kullanılacaktır.

Negatif iki tamsayının çarpımının öğretiminde örüntü arama stratejisinin kullanımı şekil 2’de gösterilmiştir.

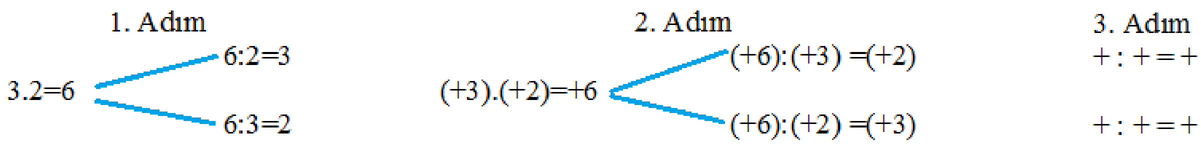
1. Adım	2. Adım	3. Adım
(-2).(+2) = -4	(-2).(+2) = -4	- . + = -
(-2).(+1) = -2	(-2).(+1) = -2	- . + = -
(-2).(0) = 0	(-2).(0) = 0	
(-2).(-1) = ...	(-2).(-1) = +2	- . - = +
(-2).(-2) = ...	(-2).(-2) = +4	- . - = +

Şekil 2. Negatif iki tamsayının çarpımının öğretiminde örüntü arama stratejisinin kullanımı

Şekil 2’deki 1. adımda verilen “(-2).(+2)” ve “(-2).(+1)” işlemlerinin sonuçları, şekil 1’deki çıkarımlardan da faydalanılarak “(-4)” ve “(-2)” şeklinde öğrencilerle birlikte bulunur. “(-2).0” işleminin sonucu, sıfırın yutan eleman özelliğini kullanarak “0” şeklinde hesaplanır. Bu işlemleri takiben 1. adımda verilen çarpma işlemlerindeki çarpılan sayıların aynı (-2), çarpan sayıların birer artarken sonuçların nasıl değiştiği incelenir. Sonuçların 2 arttığı tespit edildikten sonra, 2. adıma geçilir. Burada örüntü yaklaşımı kullanılarak (-2).(-1) ve (-2).(-2) işlemlerinin sonuçları “+2” ve “+4” şeklinde bulunur. 3. adımda ise 2. adımdaki işlemlerde yer alan sayılar silinerek sadece işaretler bırakılır. Buradan da negatif iki tamsayı çarpıldığında, sonucun pozitif olduğu görülür.

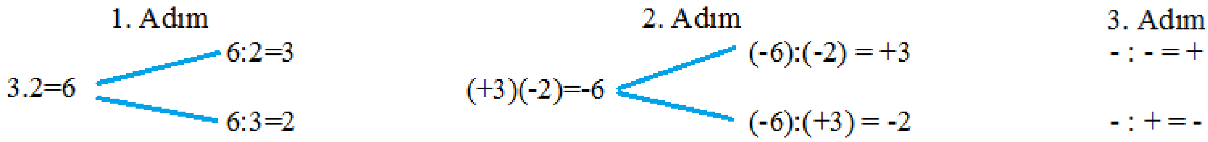
6. Tamsayılarda Bölme İşleminin Öğretiminde Çarpma İşlemi ile İlişkilendirme

Tamsayılarda bölme işleminin öğretiminde “çarpma işlemi ile ilişkilendirme” stratejisi kullanılabilir. Şekil 3, 4 ve 5’de bu ilişkilendirmelerin nasıl yapılacağı açıklanmıştır.



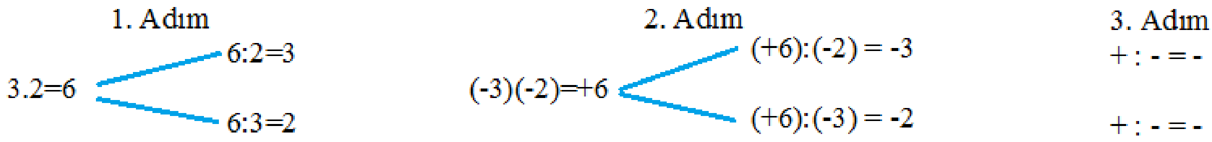
Şekil 3. Pozitif bir tamsayının, pozitif bir tamsayıya bölünmesi işleminin öğretiminde çarpma işlemi ile ilişkilendirme

Şekil 3’den bölme işleminin, çarpma işlemi ile ilişkilendirilmesinde 3 adımlı bir yöntemin uygulandığı görülmektedir. 1. adımda doğal sayılarda bölme işlemi ile çarpma işlemi arasındaki ilişki hatırlatılmıştır. Bu ilişkilendirme, çarpma işleminin sağlamasının yapılma esasına dayanmaktadır. 2. adımda pozitif iki tamsayının çarpımının verilip, bölme işlemi ile sağlaması yapılmaktadır. 3. adımda ise 2. adımın bölme işlemi yapılan kısmındaki sayıların silindiği ve pozitif bir sayının pozitif bir sayıya bölünmesi işleminde sonucun pozitif olacağı görülmektedir.



Şekil 4. Negatif bir tamsayının, negatif veya pozitif bir tamsayıya bölünmesi işleminin öğretiminde çarpma işlemi ile ilişkilendirme

Şekil 4'den bölme işleminin, çarpma işlemi ile ilişkilendirilmesinde şekil 3'de kullanılan yöntemin uygulandığı görülmektedir. 1. adımda doğal sayılarda bölme işlemi ile çarpma işlemi arasındaki ilişki hatırlatılmıştır. 2. adımda pozitif bir tamsayı ile negatif bir tamsayının çarpımının verilip, bölme işlemi ile sağlaması yapılmaktadır. 3. adımda ise 2. adımın bölme işlemi yapılan kısmındaki sayıların silindiği ve negatif bir sayının pozitif (veya negatif) bir sayıya bölünmesi işleminde sonucun negatif (veya pozitif) olacağı görülmektedir.



Şekil 5. Pozitif bir tamsayının, negatif bir tamsayıya bölünmesi işleminin öğretiminde çarpma işlemi ile ilişkilendirme

Şekil 5'de bölme işleminin, çarpma işlemi ile ilişkilendirilmesinde şekil 3 ve şekil 4'de kullanılan yöntemlerin uygulandığı görülmektedir. 1. adımda doğal sayılarda bölme işlemi ile çarpma işlemi arasındaki ilişki hatırlatılmıştır. 2. adımda negatif iki tamsayının çarpımının verilip, bölme işlemi ile sağlaması yapılmaktadır. 3. adımda ise 2. adımın bölme işlemi yapılan kısmındaki sayıların silindiği ve pozitif bir sayının negatif bir sayıya bölünmesi işleminde sonucun negatif olacağı görülmektedir.

7. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada tamsayılarla temel işlemlerin sayma pulları ve sayı doğrusu modelleri ile yapılışı açıklanmıştır. Sayı doğrusunun tamsayılarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinin yapılışında verimli bir şekilde kullanılabilir. Ancak sayı doğrusu ile bölme işlemlerinin yapılışı, öğrenciler için oldukça karmaşık ve zor gelebilir. Örneğin (-3).(-2) ve (+6):(-2) işlemlerinin sayı doğrusu üzerinde aynı modellemeye karşılık gelmesi (her ne kadar sözel açıklamaları farklı olsa da), öğrenciler tarafından "çarpma ve bölme işlemleri arasında bir farklılığın olmadığı" şeklinde yorumlanmasına neden olabilir. Benzer durum (-3).(+2) ve (-6):(+2) işlemleri için de geçerlidir. Bosse ve ark. (2016) sayı doğrusu modeli ile P-N (pozitif bir tamsayıdan negatif bir tamsayının çıkarılması), NxP (negatif bir tamsayı ile pozitif bir tamsayının çarpılması), NxN (negatif bir tamsayı ile negatif bir tamsayının çarpılması) ve P:N (pozitif bir tamsayının, negatif bir tamsayıya bölünmesi) işlemlerinin yapılamayacağını belirtmişlerdir.

Sayma pullarının tamsayılarda toplama ve çıkarma işlemleri ile PxP (pozitif bir tamsayı ile pozitif bir tamsayının çarpılması), PxN (pozitif bir tamsayı ile negatif bir tamsayının çarpılması), P:P (pozitif bir tamsayının, pozitif bir sayıya bölünmesi) ve N:N (negatif bir tamsayının, negatif bir tamsayıya bölünmesi) işlemlerinde verimli bir şekilde kullanılabileceği düşünülmektedir. Ancak sayma pulları ile NxP, NxN, P:N ile N:P işlemlerini yapmak öğrenciler için oldukça karmaşık ve zor gelebilir. Çünkü bu işlemlerin her birinde uygulanan "sıfır çiftlerinin" kutuya ilave edilmesi, daha sonra ilave edilenlerden bir kısmının tekrar kutudan çıkarılması gibi adımların öğrenciler tarafından anlaşılması veya anlamlandırılması kolay değildir. Ayrıca öğrencilerin belirtilen işlemlerle modellemenin nasıl yapılacağını anlamaya odaklanması, bu işlemlerin altında yatan matematiksel yapılardan ve anlamlardan uzaklaşmasına neden olabilir. Bosse ve ark. (2016) NxP (negatif bir tamsayı ile pozitif bir tamsayının çarpılması), NxN (negatif bir tamsayı ile negatif bir tamsayının çarpılması) ve P:N (pozitif bir tamsayının ile negatif bir tamsayıya bölünmesi) dışındaki işlemlerin sayma pulları ile yapılabileceğini belirtmişlerdir.

Tamsayılarla çarpma işlemlerinin kavratılmasında "örüntü arama" ve bölme işleminin kavratılmasında "çarpma işlemi ile ilişkilendirme" stratejilerinin, sayı doğrusu ve sayma pulları ile modellemeye göre daha verimli oldukları düşünülmektedir. Çünkü bu stratejilerde sayı doğrusu veya sayma pulları ile modellemede ortaya çıkan güçlüklerle karşılaşılmamaktadır. Ayrıca "örüntü arama" ve "çarpma işlemi ile ilişkilendirme" stratejileri, öğrencilerin önceki bilgileri ile yeni bilgileri arasında ilişkilendirme yapmasına ve çarpma işlemi ile bölme işlemi arasındaki ilişkiyi açıkça ortaya koymasına da olanak sunmaktadır.

Kaynakça

Battista, M. T. (1983). A complete model for operations on integers. The Arithmetic Teacher, 30(9), 26-31.

Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. (2016). A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers (12th ed.). Pearson Education, Inc

Bosse, M. J., Lynch-Davis, K., Adu-Gyamfi, K., & Chandler, K. (2016). Using integer manipulatives: Representational determinism. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 17(3)

Cemen, P. B (1993). Adding and subtracting integers on the number line. Arithmetic Teacher, 40(7), 388-389, URL: https://www.jstor.org/stable/pdf/41195814.pdf

Cunningham AW. (2009). Using the number line to teach signed numbers for remedial community college mathematics. Math Teaching Res J Online, 3(4):1–40

Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach (D.Reidel Publishing Co., Dordrecht), pp. 97-102.

Hativa, N., ve Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. Educational Studies in Mathematics, *28*(2), 401–431.

Janvier C. (1983). The understanding of directed numbers. Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education; Jerusalem, Israel; p. 295–301.

Peled I, Mukhopadahyay S, ve Resnick LB. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. 13th InternationalConference for the Psychology ofMathematics Education; Paris, France; p. 106–110.

Van de Walle, A. J., Karp, S.K. ve Bay-Williams, M.J. (2012). Elementary and Middle School Mathematics, (Çeviri Ed. Soner Durmuş, (2012). İlkokul ve Ortaokul Matematiği, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity', Learning and Instruction 14, 469–484, doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.012