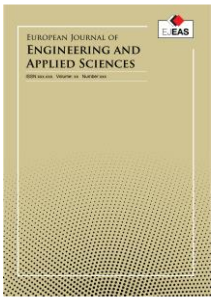
European Journal of Engineering and Applied Sciences



ISSN: 2651-3412 (Print) & 2667-8454 (Online)
Journal homepage: http://dergipark.gov.tr/EJEAS
Published by Çorlu Faculty of Engineering, Tekirdağ Namık Kemal University

European J. Eng. App. Sci. 3(2), 33-39, 2020

Araştırma Makalesi

Kesirli Mertebe İkinci Çeşit Volterra Denklemi İçin Cauchy Problemi

Gülizar Alisoy[1,*], Gözde Arslantaş[1]

[1] **Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Tekirdağ, Türkiye**

Geliş: 19.12.2020 *Kabul: 23.12.2020*

Özet: Kesirli mertebe matematik analizde farklı türev tanımlarının varlığı, değişik fen ve mühendislik problemlerinin tanımlanma biçimine uygun olarak en iyi çözümünün elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Bu nedenle, matematiksel modelleme problemlerinde kesirli mertebe diferintegral denklemlerin kullanımına olan ilgi giderek artmaktadır. Bu çalışmada, sürekli ve integrallenebilir fonksiyonların $B_{(p,\theta)}^{(<r>)}(G,s)$-Dzhabrailov-Alisoy uzayında, $G \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $D_a^{\nu} y(x) = f[x, y(x)] -$ kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için bir Cauchy tipi problem incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: *Cauchy problemi, Dzhabrailov-Alisoy fonksiyonlar uzayı, Kesirli mertebe diferansiyel denklem, Riemann-Liouville türev ve integrali*

Cauchy Problem for Fractional Order Second Type Volterra Equation

Abstract: The presence of different definitions of derivatives in the mathematical analysis of fractional order allows you to get the best solution in accordance with the definition of various scientific and technical problems. Therefore, interest in the use of fractional-order differential equations in problems of mathematical modeling is progressively increasing. In this study, in the continuous and integrable space of functions $B_{(p,\theta)}^{(<r>)}(G,s)$ -Dzhabrailov-Alisoy, we study a Cauchy-type problem for $D_a^{\nu} y(x) = f[x, y(x)] -$differential equations of fractional order on a $G \subset \mathbb{R}$

Keywords: *Cauchy problem, Dzhabrailov-Alisoy functions space, Fractional order differential equation, Riemann-Liouville derivative and integral*

[*] Sorumlu yazar
E-posta adresi: galisoy@nku.edu.tr (G. Alisoy)

1. Giriş

Kesirli mertebeden türev operatörü altında y (x) bilinmeyen fonksiyonunun bulunduğu denklemlere genellikle kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemler denir [1-5]. Genel durumda kesirli mertebe diferansiyel denklemler (KMDD) Riemann-Liouville, Grünwald - Letnikov, Marshaud, Caputo, Erdelyi-Kober, vb. yaklaşımlarıyla ifade olunabilir.

Matematiksel analizin bir kolu olan kesirli türev ve integral, teknolojinin hızlı gelişimine bağlı olarak geniş kullanım spektrumuna sahiptir. Adından da anlaşılacağı üzere kesirli diferansiyel hesap, türev ve integralin tam sayı olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş şeklidir [1-9]. Kesirli-mertebe integral-diferansiyel (diferintegral) operatörleri veya kesirli hesabı kullanan matematiksel analizin üç yüzyıldan fazla bir geçmişe sahiptir. Kesirli-mertebe türevlere ilişkin ilk yaklaşım J.Bernoulli ve G.Leibniz'in çalışmalarında bulunur[5-9]. Bernoulli ve Leibniz'in yanı sıra Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Heaviside, Laplace, Lagrange, Euler, Grünwald, Hardy, Sigmund, Courant ve Leitnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çok önemli çalışmalar yapmıştır[8-13].

Kesirli-mertebe matematiksel analize ilişkin Ref.[2-11]' da çok sayıda mükemmel değerlendirme çalışmaları yer almaktadır.

Kesirli mertebe analizin klasik analizden en önemli farkı, klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımının olmayışıdır. Dolayısıyla, kesirli mertebe analizdeki farklı türev tanımlarının varlığı ve problemin tanımlanma biçimine en uygun olanının kullanılması, problemin en iyi çözümünün elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Kesirli mertebe analizde ağırlıklı olarak kullanılan türev tanımları, Riemann-Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türev tanımlarıdır. Hatırlayalım ki, periyodik sinyallerin incelenmesinde Fourier kesirli türev tanımı daha iyi sonuçlar verir [3]. Bu tanımlar arasında belirli koşullarda geçişler olmasına rağmen, tanımlar ve tanımların fiziksel yorumları belirli farklılığa sahiptirler.

Günümüz koşullarında S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, M. Al-Bassam, R. Bagley, Y.A. Brychkov, L.M.B.C. Campos, R. Gorenflo, J.M.C. Joshi, S. Kalla, E.R. Love, M. Mikolas, K. Nishimoto, S. Owa, A.P. Prudnikov, B. Ro, H.M. Srivastava, A.M. Nahushev, R. Nigmatulin, Uchaykin, Chen gibi bilim insanları tarafından kesirli hesap ve uygulamaları konusunda teferruatlı bilgiler içeren çok sayıda yayınlar yapılmış ve dinamik bir biçimde yeni uygulamalar içeren değişik yayınlar yapılmaktadır [3-14].

Başka bir değişle şu anda, kesirli matematik hem teorik hem de pratik uygulanma açısından hızlı gelişme sürecindedir [6,7,11-14].

2. Problemin tanımlanması

Sürekli ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayında reel eksenin sonlu aralığında kesirli mertebe diferansiyel denklemler için Cauchy tipi problemin çözümünün varlığı ve tekliği problemine bakalım. Bu amaçla öncelikli olarak, kesirli mertebe diferansiyel denklemlerle ikinci çeşit Volterra integral denklemi arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

Varsayalım ki, $\alpha > 0$ ve $x > a$ olmak üzere

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)] \tag{1a}$$

denkleminin

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+) = b_k;\ b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n \tag{1b}$$

koşulunu sağlayan çözümünün belirlenmesi isteniyor.

Burada, $n = \begin{cases} \alpha + 1, eğer\ \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha, \quad eğer\ \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ayrıca $\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+)$ - ifadesi limitin a noktasının sağ komşuluğunda $(a, a+\varepsilon)$ alındığını göstermektedir. Bir başka ifadeyle

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+) = \lim_{x \to a^+} \left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(x)\ 1 \leq k \leq n-1$$

$$\begin{cases} \left(D_{a^+}^{\alpha-n} y\right)(a^+) = \lim_{x \to a^+} \left(I_{a^+}^{\alpha-n} y\right)(x), & \alpha \neq n \\ \left(D_{a^+}^{0} y\right)(a^+) = y(a), & \alpha = n \end{cases} \tag{2}$$

Burada $I_{a^+}^{\alpha}$- kesirli Riemann- Liouville sağ integrali olup,

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a \tag{3}$$

biçiminde belirlenir.

Özel durumda $\alpha = n \in \mathbb{N}$ için (1a) ve (1b) ifadeleri ile tanımlanan problem sıradan bir Cauchy problemine dönüşür, yani

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f[x, y(x)] \\ y^{(n-k)}(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{4}$$

Bu nedenle (1a) ve (1b) ifadeleri ile tanımlanan problem de (4) problemine benzer olarak bir Cauchy problemidir. Diferansiyel denklemin mertebesi olan α- parametresinin $0 < \alpha < 1$ aralığında olması durumunda (1a), (1b) ve (2) ifadeleri ile tanımlanan Cauchy problemi

$$\begin{cases} (\mathrm{D}_{\mathrm{a}+}^{\alpha} \mathrm{y})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}[\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x})] \\ \mathrm{I}_{\mathrm{a}^+}^{1-\alpha} = \mathrm{b}, \quad \mathrm{b} \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

biçiminde olacaktır. Eğer (5) ifadesi ile tanımlanan Cauchy problemi ağırlık problemi biçiminde düzenlenirse, o halde

$$\begin{cases} (\mathrm{D}_{\mathrm{a}+}^{\alpha} \mathrm{y})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}[\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x})] \\ \lim_{x \to a^+} (x-a)^{1-\alpha} y(x) = \mathrm{c}, \quad \mathrm{c} \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6}$$

yazılabilir.

(6) ifadesi ile tanımlanan kesirli mertebe Cauchy probleminin çözümünü elde etmek için öncelikli olarak, problemi aşağıda (7) ifadesi ile tanımlanan

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a \quad (7)$$

ikinci çeşit nonlineer Volterra denkleminin çözümüne indirgememiz ve sonraki aşamada ise tanımladığımız Cauchy probleminin $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ - Dzhabrailov-Alisoy uzayında tek bir global çözümünün olmasını sağlayan koşulları belirlememiz gerekmektedir.

Bu amaçla öncelikli olarak $\mathrm{B}_{p,\theta}^{<r>}(\mathrm{G},\mathrm{s})$ uzayına ilişkin bazı tanımları verelim [15].

Her $k = 1,2,\cdots,s$ için bileşen vektörleri $i_k = (0,1,\cdots,n_k)$ değerlerini almak üzere $i = (i_1,\cdots,i_s) \in Q$ olsun. O takdirde, Q kümesinin eleman sayısı aşağıdaki ifade ile belirlenecektir.

$$mesQ = |Q| = \prod_{k=1}^{s} (1 + n_k) \quad (8)$$

Öyle ki

$$|Q| = \begin{cases} \mathrm{n}+1 & \text{eğer } \mathrm{s}=1 \\ 2^{\mathrm{n}} & \text{eğer } \mathrm{s}=\mathrm{n} \end{cases} \quad (9)$$

genel durumda ise Q kümesinin eleman sayısı

$(n+1) \leq |Q| \leq 2^n$ olacaktır.

Varsayalım ki, $r = (r_1,\cdots,r_s)$ tüm $k = 1,2,\cdots,s$ için bileşenleri $r_k = \left(r_{k,1},\cdots,r_{k,n_k}\right)$ olan pozitif bir vektördür. Başka bir deyişle tüm $(k = 1,2,\cdots,s\, ; j = 1,2,\cdots n_k)$ için $0 \leq \alpha_{k,j} = r_{k,j} - \left[r_{k,j}\right] < 1$ ve $r_{k,j} > 0$. Her bir $r = (r_1,\cdots,r_s)$ pozitif vektörüne karşılık, $i \in Q$ olmak üzere, $r^i = \left(r_1^{i_1},\cdots,r_s^{i_s}\right)$ vektörlerinin bir kümesi oluşturulur. Oluşturulmuş bu vektörler kümesi için aşağıdaki önermeler geçerlidir. $\forall k \in supp(i_1,\cdots,i_s)$ için $i_k \neq 0$ yani

i) $r_k^{i_k} = \left(0,\cdots,0,r_{k,i_k},0,\cdots,0\right)$ ve

ii) $\forall \mathrm{k} \in \{1,2,\cdots,\mathrm{s}\} \setminus \mathrm{supp}(\mathrm{i}_1,\cdots,\mathrm{i}_\mathrm{s})$ için ise, $i_k = 0$ yani $r_k^0 = (0,\cdots,0)$ olacaktır.

Bu varsayımlar doğrultusunda, $1 \leq p \leq \theta < \infty$ olmak üzere f fonksiyonu için aşağıdaki norm doğrudur [15-18].

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,\ s)} = \sum_{i=(i_1,\cdots,i_s)\in Q} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta}^{<r^i>}(G,s)} < \infty \quad (10)$$

Tanım 1. $G \in \mathbb{R}^n$ bölgesinde Sobolev anlamında tüm $i \in Q$ için genelleştirilmiş $D^{\bar{r}^{\,i}} f \in L_p(G)$ türevleri mevcut ve (10) ifadesiyle tanımlanan norma sahip sonlu ölçülebilir fonksiyonlar kümesine, $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzay $s = 1$ ve $\theta = \infty$ durumunda bilinen Nikolsky uzayına ve $s = 1$ ve $1 \leq \theta < \infty$ durumunda ise Besov uzayına dönüşmektedir [16]. $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyon uzayı tam normlu uzaydır [15-19]. Bu fonksiyon uzayında r vektörü üzerine tanımlanmış belirli koşullarda belirli $G \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}_{n_s}$

bölgeler sınıfı için $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L_p(G)$ olduğu dikkate alınırsa [14-16], (6) ifadesi ile tanımlanan problem için

$\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}^\alpha(a,b) := \left\{y \in L(a,b) : D_{a^+}^\alpha y \in L(a,b)\right\}$$

yazılabilir. Burada $\mathcal{L}(a,b) := \mathcal{L}_1(a,b)$- sonlu $[a,b] \in \mathbb{R}$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların uzayını temsil eder.

Böylece keyfi $y(x) \in G \subset \mathbb{R}$ için $f[x,y] \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ varsayımında (1a) ve (1b) ifadeleri ile tanımlanmış Cauchy probleminin, (7) ifadesi ile tanımlanan nonlineer ikinci çeşit Volterra denklemine eşdeğer olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bu amaçla öncelikli olarak Ref.[4,10,15] verilen temel bilgiler doğrultusunda aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 1. Varsayalım ki $\alpha > 0$, $\mathrm{n} = -[-\alpha]$ olsun. G- ℝ' de açık küme ve $\mathrm{f}: (\mathrm{a},\mathrm{b}] \times \mathrm{G} \to \mathbb{R}$ olsun. Öyle ki, $\forall \mathrm{y} \in \mathrm{G}$ için $\mathrm{f}[\mathrm{x},\mathrm{y}] \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{a},\mathrm{b})$. Eğer $\mathrm{x} > \mathrm{a}$ olmak üzere $\mathrm{y}(\mathrm{x}) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ fonksiyonu

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{b_j}}{\Gamma(\alpha-\mathrm{j}+1)}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha-\mathrm{j}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{f}[\mathrm{t},\mathrm{y}(\mathrm{t})]\mathrm{dt}}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}}$$

ikinci çeşit Volterra denklemini sağlıyorsa, o halde $\mathrm{y}(\mathrm{x})$ fonksiyonu hemen her yerde

$$\left(\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^\alpha \mathrm{y}\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{f}[\mathrm{x},\mathrm{y}(\mathrm{x})],\ \ \alpha > 0 \quad (11a)$$

Ve

$$\left(\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha-k} \mathrm{y}\right)(a^+) = b_k,\ \ b_k \in \mathbb{R}, k = 1,2,\ldots,n = -[-\alpha] \quad (11b)$$

ifadelerini de sağlar.

İspat: Öncelikle teoremin gereklilik şartını ispatlayalım. Bu nedenle $y(x) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ fonksiyonunun (11a) ve (11b) ifadelerini sağladığını varsayalım. $f[x,y] \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ olduğu için (11a) ifadesi $[a,b]$ kapalı aralığında hemen her yerde $(\mathrm{D}_{\mathrm{a}+}^\alpha \mathrm{y})(\mathrm{x}) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ kesirli mertebe türevinin olduğunu ifade eder. Bu durumda, kesirli mertebe türev kavramından hareketle

$$\left(D_{a^+}^\alpha y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha}\right)(x), n = -[-\alpha] \quad (12a)$$

$$\left(I_{a^+}^0 y\right)(x) = y(x) \quad (12b)$$

yazabiliriz ve dolayısıyla

$$\left(I_{a^+}^{n-\alpha} y\right)(x) = I_{a^+}^n\left(D_{a^+}^\alpha y\right)(x)$$

Öte yandan $(\mathrm{D}_{\mathrm{a}+}^\alpha \mathrm{y})(\mathrm{x}) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ olduğu için, $\left(I_{a^+}^{n-\alpha} y\right)(x) \in AC^n[a,b]$ yazabiliriz. Bu demektir ki, $y(x) \in L_1(a,b)$ fonksiyonu integrallenebilir kesirli mertebe türeve sahiptir. Böylece kesirli mertebe türev ve kesirli mertebe integralin karşılıklı ters operatörler olduğu dikkate alınırsa, o halde

$$\begin{cases} \left(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-\mathrm{j}+1)} (\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha} \\ y_{n-\alpha}(x) = \left(I_{a^+}^{n-\alpha} y\right)(x) \end{cases} \quad (13)$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$y_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} I_{a^+}^{n-\alpha} y(x) = \left(D_{a^+}^{\alpha-j} y\right)(x)$$

eşitliği dikkate alınırsa aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$\begin{aligned} \left(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) &= y(x) \\ &- \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(D_{a^+}^{\alpha-j}\right)(a^+)}{\Gamma(\alpha-\mathrm{j}+1)} (\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha-\mathrm{j}} \\ &= y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j (x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \end{aligned} \quad (14)$$

Şimdi ise $I_{a^+}^{\alpha}$ operatörü ile $\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = \mathrm{f}[\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x})]$ eşitliğinin her iki tarafına uygulayalım. O halde;

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = I_{a^+}^{\alpha} \mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})](x)$$

ifadesini elde ederiz. Eğer bu ifade (14) denkleminde dikkate alınırsa

$$I_{a^+}^{\alpha} \mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})](x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j (x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (15)$$

sonucuna ulaşırız. Elde edilen bu denklemde kesirli mertebe integral ifadesi yerine yazılarak (15) ifadesi yeniden düzenlenirse ikinci çeşit Volterra denklemini elde ederiz. Yani

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j (x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x \\ &> a \end{aligned} \quad (16)$$

böylece Teorem 1 ‘in gereklilik koşulu ispatlanmış oldu.

Yeterlilik koşulu: Varsayalım ki $y(x) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ hemen her yerde ikinci çeşit Volterra denklemini sağlıyor, yani

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{b_j}}{\Gamma(\alpha-\mathrm{j}+1)} (\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha-\mathrm{j}} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})] \mathrm{dt}}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}}, x > a \end{aligned} \quad (17)$$

bu ifadenin her iki tarafına $D_{a^+}^{\alpha}$ kesirli mertebe diferansiyel operatörü uygulayalım. O halde aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$\begin{aligned} \left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j \left(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x)}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\ &+ \left(D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} \mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})](x)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

Daha önce de ispatladığımız gibi

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-j)}{\Gamma(1-j)} (\mathrm{x}-\mathrm{a})^{-\mathrm{j}}$$

olduğu dikkate alınarak ve $j = 1, 2, \ldots, [\alpha]+1$ için $\frac{1}{\Gamma(1-\mathrm{j})}$ ifadesi sıfır olacağından

$\left(\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha} (\mathrm{t}-\mathrm{a})^{\alpha-\mathrm{j}}\right)(\mathrm{x}) = 0$ olur. (18) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = \left(D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} \mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})](x)\right) \quad (19)$$

denklemini elde ederiz. Öte yandan $\mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})] \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ olduğu için $\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = \mathrm{f}[\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x})]$ olacaktır. Elde ettiğimiz bu ifade (11a) ifadesi ile aynıdır.

Şimdi ise (11b) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. Bu amaçla (7) ifadesi ile tanımlanan eşitliğin her iki tarafına $k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha-\mathrm{k}}$ kesirli mertebe türev operatörü uygulayalım.

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha-\mathrm{k}} y\right)(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j \left(D_{a^+}^{\alpha-k} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x)}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\ &+ \left(D_{a^+}^{\alpha-k} I_{a^+}^{\alpha} \mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})](x)\right) \end{aligned} \quad (20)$$

bu ifadede bazı özel durumlara bakalım: $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}-1$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha-\mathrm{k}} (\mathrm{t}-\mathrm{a})^{\alpha-\mathrm{j}}\right)(\mathrm{x}) &= \frac{\Gamma(1+\alpha-\mathrm{j})}{\Gamma(1-\mathrm{j}+\mathrm{k})} (\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\mathrm{k}-\mathrm{j}} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(1+\alpha-\mathrm{j})}{(\mathrm{k}-\mathrm{j})!} (\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\mathrm{k}-\mathrm{j}}, & \mathrm{k} > \mathrm{j}-1 \\ 0, & \mathrm{k} \le \mathrm{j}-1 \end{cases} \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha-\mathrm{k}} y\right)(\mathrm{x}) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j (x-a)^{k-j}(x)}{(k-j)!} \\ &+ \left(D_{a^+}^{\alpha-k} I_{a^+}^{\alpha} \mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})](x)\right) \end{aligned} \quad (21)$$

olur. Öte yandan $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}-1$ ve $\alpha > 0$ için $\alpha - k > 0$ olacağından

$$\left(\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha-\mathrm{k}} \mathrm{I}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha} \mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t})](\mathrm{x})\right) = \mathrm{I}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha-(\alpha-\mathrm{k})} \mathrm{f}[\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x})] = \mathrm{I}_{\mathrm{a}^+}^{\mathrm{k}} \mathrm{f}[\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x})]$$

ve

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_j(x-a)^{k-j}}{(k-j)!}+I_{a^+}^{k}f[x,y(x)]$$

Bu denklem açık biçimde ifade edilirse o halde

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_j(x-a)^{k-j}}{(k-j)!}+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x f[t,y(t)](x-t)^{k-1}dt \tag{22}$$

Eğer (22) ifadesinde $x\to +a$ iken limit değerine geçilirse $k=1,2,\ldots,n-1$ olmak üzere

$$b_k=\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(a^+)$$

koşulunu elde ederiz. Ayrıca $k=n$ için (20) ifadesinden hareketle

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-n}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(x-a)^{n-j}}{(n-j)!}+\left(D_{a^+}^{\alpha-n}I_{a^+}^{\alpha}f[t,y(t)](x)\right) \tag{23}$$

denklemini elde ederiz.

Şimdi ise $n=-[-\alpha],\alpha>0$ ve $\alpha-(\alpha-n)=n>0$ olmak üzere $\alpha-n>0$ durumuna bakalım;

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-n}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(x-a)^{n-j}}{(n-j)!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f[t,y(t)](x-t)^{n-1}dt \tag{24}$$

Eğer bu ifadede $\alpha\neq n$ olmak üzere $x\to +a$ iken limite geçilirse, $b_n=\left(D_{a^+}^{\alpha-n}y\right)(a^+)$ $ve\ \alpha=n$ için $b_n=y(a)$ sonucuna ulaşırız. Böylece teoremin yeterlilik koşulu ispatlanmıştır.

Sonuç: $0<\alpha<1$, G- ℝ' de açık küme ve $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$ olsun. Ayrıca $\forall y\in G$ için $f[x,y]\in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,b)$ olsun. Eğer $y(x)\in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,b)$ fonksiyonu $x>a$ olmak üzere,

$$y(x)=\frac{b_1(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

ikinci çeşit Volterra denklemini sağlıyorsa y(x) fonksiyonu hemen her yerde

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x)=f[x,y(x)],0<\alpha\leq 1 \tag{25}$$

$$\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)(a^+)=b,\ \ b\in\mathbb{R} \tag{26}$$

ifadelerini sağlar.

Böylece, kesirli mertebe diferansiyel denklemler ile ikinci çeşit Volterra integral denklemi arasındaki ilişkiyi belirledikten sonra, kesirli mertebe diferansiyel denklemler için Cauchy biçimli problemin çözümünün varlığı ve tekliği durumunu ele alalım. Anlaşılacağı üzere burada

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x)=f[x,y(x)],\quad \alpha>0$$

diferansiyel denkleminin $k=1,2,\ldots,$ $n=-[-\alpha]$ olmak üzere

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(a^+)=b_k,\qquad b_k\in\mathbb{R}$$

koşulunu sağlayan çözümünün

$$\mathcal{L}^{\alpha}(a,b)=\left\{y\in L(a,b): D_{a^+}^{\alpha}y\in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,b)\right\}$$

uzayında var olması ve bu çözümün tek olması incelenecektir.

Teorem 2. Varsayalım ki $\alpha>0,\ n=-[-\alpha]$ ve G- kümesi ℝ' de açık bir kümedir. $f:(a,b]\times G\to\mathbb{R}$ olsun. Öyle ki $\forall y\in G$ için $f[x,y]\in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,b)$ ve $A>0$ ve x değişkeninden bağımsız bir sabit olmak üzere $\forall y_1,y_2\in G\in\mathbb{C},\forall x\in(a,b]$ için

$$|f[x,y_1]-f[x,y_2]|\leq A|y_1-y_2|$$

Lipschitz koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{L}^{\alpha}(a,b)$ uzayında

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x)=f[x,y(x)],\qquad \alpha>0$$

kesirli mertebe diferansiyel denkleminin $k=1,2,\ldots,$ $n=-[-\alpha]$ olmak üzere

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(a^+)=b_k,\ \ b_k\in\mathbb{R}\ ,$$

koşulunu sağlayan çözümü var ve bu çözüm tektir.

İspat: Bu durumda çözümün varlığı ve tekliğini ispatlamak için, Teorem 1'e istinaden $y(x)\in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonunun (7) ifadesi ile tanımladığımız nonlineer Volterra integral denkleminin tek çözümü olduğunu göstermek yeterlidir. Bu nedenle öncelikli olarak $[a,b]$ aralığında Volterra denkleminin çözümüne bakalım. (7) ifadesi ile tanımlanan denklemin keyfi $[a,x_1]\subset[a,b],\ a<x_1<b$ aralığı üzerinde bir anlama sahip olmasından hareketle, x_1 değerini öyle seçelim ki;

$$A\frac{(x_1-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}<1$$

eşitsizliği sağlanmış olsun. Daha sonra ise $y(x)\in L(a,x_1)$ fonksiyonunun (7) iadesi ile tanımlanan denklemin $[a,x_1]$ aralığındaki tek çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla $L(a,x_1)$ uzayı için (sıkıştırma haritalama olarak ta adlandırılan) Banach hareketsiz nokta teoreminden yararlanalım. $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)$ uzayı tam metrik uzay olduğu için

$$d(y_1,y_2)=\|y_1-y_2\|=\int_a^x\frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}},x>a$$

Volterra denklemini $y(x)=(Ty)(x)$ biçiminde yazarsak,

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (27)$$

ifadesini elde ederiz. Burada $y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}$ dir.

Banach sabit nokta teoremini uygulayabilmemiz için aşağıda verilen iki durumu ispatlamamız gerekiyor;

i)Eğer $y(x) \in L(a,x_1)$ ise o halde $(Ty)(x) \in L(a,x_1)$

ii)$\forall y_1, y_2 \in L(a,x_1)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmış olsun

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)} \leq \omega \|y_1 - y_2\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)} \quad (28)$$

Burada $\omega = A\frac{(x_1-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Öncelikle $y_0(x) \in L(a,x_1)$ olduğunu gösterelim;

$$\int_a^{x_1} |y_0(x)|dx = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\int_a^{x_1}(x-a)^{\alpha-j}dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\alpha-j+1}\Big|_a^{x_1} \quad (29)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-x_1)^{\alpha-j+1} < \infty$$

$$\alpha+1 \leq j, j = 1,2,\ldots,n = -[-\alpha]$$

Teoremin şartına göre $f[x,y] \in B_{p,\theta}^{r}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ olduğu için $b = x_1$ alınırsa ve $g(t) = f[t,y(t)]$ alınırsa daha önce tanımlanan bilgilere göre

$$I_a^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \in L(a,x_1)$$

ve sonuç olarak $(Ty)(x) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,x_1)$ olacaktır. Şimdi ise $L(a,x_1)$- uzayında $(Ty)(x)$ normuna bakalım ;

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)} = \left\| \left(y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y_1(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right) - \left(y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y_2(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right)\right\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)} \quad (30)$$

$$= \left\| I_{a^+}^{\alpha} f[x,y_1(x)] - I_{a^+}^{\alpha} f[x,y_2(x)]\right\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)}$$

$$\leq \left\| I_{a^+}^{\alpha}(f[x,y_1(x)] - f[x,y_2(x)])\right\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)}$$

Riemann- Liouville kesirli integral operatörünün sınırlı olmasından hareketle

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)} \leq A\frac{(x_1-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1 - y_2\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)} \quad (31)$$

elde ettiğimiz bu sonuç (27) ifadesinin doğruluğunu gösterir. x_1 değerinin seçimine bağlı olarak $\omega = A\frac{(x_1-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$ eşitsizliğinin doğru olması durumunda Banach sabit nokta teoremine istinaden $[a,x_1]$ aralığında Volterra denkleminin $y^*(x) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)L(a,x_1)$ çözümü var ve bu çözüm tektir. Banach sabit nokta teoremine göre $y^*(x)$ çözümü $(T^m y_0{}^*)(x)$ yakınsak dizisinin limitidir. Yani

$$\lim_{m\to\infty} \|T^m y_0{}^* - y^*\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)} = 0 \quad (32)$$

Burada $y_0{}^* \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ olan keyfi bir fonksiyondur. $\exists k$: $b_k \neq 0$, o zaman $y_0{}^*(x) = y_0(x)$ olduğu kabul edilebilir . Burada $y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}$ dir.

Öte yandan $(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$ olduğundan $(T^m y_0{}^*)(x)$ dizisi

$$(T^m y_0{}^*)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,T^{m-1}y_0{}^*(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$m = 1,2,\ldots$ Recurrent formülü ile belirlenir. Eğer $y_m(x) = (T^m y_0{}^*)(x)$ işaretlemesi yapılırsa

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y_{m-1}(x)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (33)$$

$m = 1,2,\ldots$ ve $\lim_{m\to\infty}\|y_m - y^*\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)\hookrightarrow L(a,x_1)} = 0$ elde ederiz.

Daha sonra $[x_1,x_2]$ aralığını ele alalım. Öyle ki $h_1 > 0$ olmak üzere, $x_2 = x_1 + h_1 < b$ olsun. Eğer Volterra denklemini

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1} \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, x > a \quad (34)$$

doğrulayan y(x) fonksiyonunun $[a,x_1]$ aralığında tek olduğu dikkate alınırsa yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\mathrm{y(x)} = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(t)]\mathrm{dt}}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}} \tag{35}$$

Burada;

$$y_{01}(x) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{b_j}}{\Gamma(\alpha-\mathrm{j}+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x_1} \frac{\mathrm{f}[\mathrm{t}, \mathrm{y}(t)]\mathrm{dt}}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}}$$

ifadesi ile tanımlanan fonksiyonun bilinen fonksiyon olduğunu hatırlayalım. Böylece yukarıda kullandığımız benzer yorum ve yaklaşımlarla, Volterra denkleminin $[x_1, x_2]$ aralığında $y^*(x) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(x_1, x_2)$ tek çözümünün olduğu gösterilir. Sonraki aşamada, $h_2 > 0$ olmak üzere $x_3 = x_2 + h_2 < b$ için belirlediğimiz $[x_2, x_3]$ aralığında Volterra denkleminin tek çözümünün olduğu gösterilir. Eğer bu işlemi tekrarlarsak $y^*(x) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında Volterra denkleminin tek çözüm olduğu sonucuna ulaşırız. Bir başka deyişle $y(x) = y^*(x) \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s) \hookrightarrow L(a,b)$ fonksiyonunun (1.1) ve (1.2) ifadeleriyle tanımlanan Cauchy probleminin çözümü olduğu ispatlanmış olur.

Kaynaklar

[1] M. Caputo, Elasticita e Dissipazione. Italy: Zanichelli and Bologna, 1969.

[2] K.B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus. New York: Academic Press,1974.

[3] Babenko, Yu.I., Teplomassoobmen. Metod rascheta teplovykh i diffuzionnykh potokov (Heat and Mass Transfer: Method for Calculating Heat and Diffusion Fluxes), Leningrad: Khimiya, 1986. (in Russian)

[4] S.G. Samko, A.A. Kilbas and 0.1. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives.Theory and Appiications, Gordon and Breach, Yerdon, 1993

[5] K.S. Miller and B. Ross, An İntroduction to the Fractional Calculus and Differential Equations. New York: Jhon Willy and Sons, 1993.

[6] V. Kiryakova, Generalized Fractional Calculus and Applications. Long-man & J. Wiley,Harlow & N. York (1994)

[7] J.J. Distefano, A.R. Stubberud and I.J. Williams, Theory and Problems of Feedback and Control Systems. New York: McGraw-Hill, 1995.

[8] A. Carpintery and F. Mainardi, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. New York: CSIM Courses and Lectures, 1997.

[9] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. New York: Academic Press, 1999.

[10] A.A. Kilbas, N.M. Srivastavo and J.J. Tzujillo, Theory and Applications of Fractonal Differential Equations. Amsterdam: Elsever, 2006.

[11] Kholpanov, L.P. and Zakiev, S.E.,(2005) Fractional IntegroDifferential Analysis of Heat and Mass Transfer, *Inzh.-Fiz.Zh.*,78(1),35

[12] Ayazoglu, R., Saraç, Y., Şener, S. and Alisoy G.,(2020) Existence and multiplicity of solutions for a SchrödingerKirchhof type equation involving the fractional p(.,.)-Laplacian operator in R^n, *Collect.Math*.

[13] A. Ates, B.B. Alagoz, G.T. Alisoy, C Yeroglu and H.Z. Alisoy.,(2015), Fuzzy Velocity and Fuzzy Acceleration in Fractional Order Motion, *Balkan Journal of Electrical & Computer Engineering*, 3 (2), 98-102

[14] Alagoz, B.B., Alisoy, G., Alagoz, S., Alisoy, H. (2017). A note on applications of time-domain solution of Cole permittivity models. *Optik*, 139, 272-282.

[15] Kerimova (Alisoy) G.T. (1997), “Properties of differential functions with repeated difference- differential characteristic depending on multi-package variables” PhD Thesis , Baku,p127. (in Russian)

[16] Maksudov F.T., Dzhabrailov A.D.,(2000),The method of integral representations in the theory of spaces,V.1 Baku – “Elm”, p.200 (in Russian)

[17] Alisoy G.T, Alisoy H.Z., (2002),On integral representations of multi package variable functions, *International Journal of Applied Mathematics*, 11, 371-386.

[18] Alisoy G.T, Dzhabrailov A.D. , Alisoy H.Z, (2005), Properties of functions in some weighted spaces, *Applicable Analysis*, 84, 405-417.

[19] Gülizar ALİSOY, Sadiye AKTAŞ, (2018), Diferansiyel Fark Özelliklerinin Korunması ile Çok Katlı Değişkenlere Bağımlı Fonksiyonların $G \subset E^n$ Bölgesi Dışına Genişletilmesi, *Mus Alparslan University Journal of Science*, 6(1), 493-500.