GEFAD/GUJGEF 42(3): 1857-1878(2022)

Matematik Öğretmenlerinin Görsel Akıl Yürütme Becerilerinin Pisagor Teoremi Bağlamında İncelenmesi: Garfield'ın Görsel İspatı* **

Investigation of Visual Reasoning Skills of Mathematics Teachers in the Context of Pythagoras's Theorem: Garfield's Visual Proof

Handan DEMİRCİOĞLU[1], Ebru ARSLANTAŞ İLTER [2]

[1]*Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, handandemircioglu@gmail.com*
[2]*Milli Eğitim Bakanlığı Ölçme Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü ebruarslantas@yahoo.com*

***Makale Türü/Article Types**: Araştırma Makalesi/ Research Article*

Makalenin Geliş Tarihi: 29.12.2020 ***Yayına Kabul Tarihi: 29.09.2022***

ÖZ

Akıl yürütme tüm değişkenleri dikkate alarak derinlemesine düşünmektir. Akıl yürütme becerisi gelişmiş bireyler herhangi bir olay karşısında pek çok düşünce ve görüş oluşturabilir, bu düşüncelerden yola çıkarak yeni çıkarımlara, varsayımlara ve hatta sonuçlara ulaşabilirler. Bu çalışmanın amacı matematik öğretmenlerinin görsel akıl yürütme becerilerini Pisagor teoremi bağlamında incelemektir. Araştırma yedi gönüllü matematik öğretmeni ile yapılmıştır. Veriler Pisagor teoreminin sözsüz ispatı ile elde edilmiştir. Elde edilen bulgular matematik öğretmenlerinin soruyu okuma, soruyu açıklama, plan yapma, görseldeki geometrik şekilleri inceleme, görselde verilen ilişkileri açıklama, verilen matematiksel ifadeleri görsel üzerinde gösterme, kavramsal bilgi ifade etme, kavramsal bilgiyi görsele uyarlama, ispatı yapma, değerlendirme yapma gibi aşamaları izlediklerini ortaya çıkmıştır.

***Anahtar Sözcükler:** Görsel akıl yürütme, Sözsüz ispat, Pisagor teoremi.*

---

*__Alıntılama:__ Demircioğlu, H. ve Arslantaş İlter, E. (2022). Matematik öğretmenlerinin görsel akıl yürütme becerilerinin Pisagor teoremi bağlamında incelenmesi: Garfield'ın görsel ispatı. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 42*(3), 1857-1878.

**Bu çalışma Dr. Öğr. Üyesi Handan Demircioğlu danışmanlığında Ebru Arslantaş İlter'in Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi'nde yapılan yüksek lisans tezinin bir kısmından türetilmiştir.

ABSTRACT

Reasoning is thinking thoroughly by considering all variables. Individuals with developed reasoning skills can form many thoughts and opinions in the face of any event, and they can reach new inferences, assumptions and even results based on these thoughts. The aim of this study is to examine mathematics teachers' visual reasoning skills in the context of the Pythagorean theorem. The research was conducted with seven volunteer mathematics teachers. The data are obtained by the non-verbal proof of the Pythagorean theorem. The findings reveal that mathematics teachers follow the stages such as reading the question, explaining the question, making a plan, examining the geometric shapes in the visual, explaining the relationships given in the visual, showing the given mathematical expressions on the visual, expressing the conceptual knowledge, adapting the conceptual information to the visual, making the proof, making evaluation.
Keywords: *Visual reasoning, Visual proof, Pythagoras theorem.*

GİRİŞ

Akıl yürütme ve ispat hem Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Dersi Öğretim Programında (MEB, 2018) hem de Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi-National Council of Mathematics Teachers (NTCM)'nin Okul Matematiği İlkeleri ve Standartlarındaki (2000) süreç becerilerinden birisidir. Buna paralel olarak da matematik öğretmen yetiştirme politikaları belirlenmiş, matematik öğretmeni yetiştiren yükseköğretim kurumların öğretim programları geliştirilmiştir. Nitekim matematiksel önermeleri doğrulamak için uygun ispat yöntemlerini kullanma, sezgisel akıl yürütme ve biçimsel ispatın matematiksel düşünmedeki tamamlayıcı ilişkisini örnekleriyle açıklama, matematiksel ispat sürecinde gerek ve yeter şartları belirleme matematik öğretmeni özel alan yeterlikleri olarak ifade edilmiştir.

Akıl yürütme; bütün değişkenleri dikkate alarak etraflıca düşünmedir. Akıl yürütme becerisi gelişmiş olan bireyler herhangi bir olay karşısında birçok düşünce, görüş oluşturabilirler ve bu düşüncelerinden yola çıkarak yeni çıkarımlara, varsayımlara hatta sonuçlara ulaşabilirler. Bu nedenlerle akıl yürütme çok çeşitli düşünme tarzları kullanmayı gerektirmektedir (Peresini ve Webb, 1999). Bu düşünme tarzlarından en önemlisi de matematiksel düşünmedir. Matematiksel düşünmenin bir alt boyutu ispat becerisi olduğundan, öğrencilerin ispat becerilerinin geliştirilmesi matematiksel düşünme becerisini de geliştirecektir.

İspat, bir ifadenin doğruluğu ile ilgili deliller (Rodd, 2000), bir dizi geçerli sonuçlar (Hanna ve Sidoli, 2007), tanımlar ve aksiyomlarla fikirlerin açıklık kazandığı final aşaması (Hanna, 1991), muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmek (Almeida, 1996) şeklinde tanımlanmaktadır. Öğrencilerin bireysel farklılıkları olmasına rağmen ispatlar öğrencilere genellikle aynı formatta sunulmaktadır (Lockhart, 2009). Hâlbuki öğrenme ve öğretme sürecinin anlamlı olabilmesi için öğrencilerin ilgi, hazır bulunuşluk düzeyi, öğrenme stili gibi değişkenler göz önüne alınarak öğretim yöntem ve teknikleri belirlemek gerekmektedir (MEB, 2018). Bu bağlamda görselleştirme etkili tekniklerden birisidir.

Hershkowitz, Arcavi ve Bruckheimer (2001) görselleştirmenin yüksek düzey akıl yürütmeden daha fazlası belki de matematiğin hatta biçimsel sembolik ispatlarında merkezi olabileceğini ifade etmiştir. Bell (2011) matematiksel bir ispatın görselinin onun daha iyi anlamlandırılmasını sağlayacağını ifade etmiştir. Diyagramlar matematiğin her alanında kullanılmıştır (Hanna ve Sidoli, 2007). Bardelle (2009) öğrencilerin herhangi bir konu ile karşılaştıklarında kullanabilecekleri tekniklerin, araçların ve teoremlerin farkında olmamalarının sebebinin öğrencilerin öğretim hayatlarında görselleştirmeyle çok az karşılaşmalarına bağlamaktadır. Öğrencilerin görselleştirmeyi kullanabilmeleri ise derslerde görselleştirme etkinlikleriyle karşılaşmaları ve görselleştirmeyi kullanmaya teşvik edilmeleriyle mümkün olmaktadır (Rodd, 2000). Alsina ve Nelsen (2010) matematiksel başarı için görselleştirme yeteneğinin gerekliliğinden bahsetmektedir. O halde öğretmenleri, öğretmen adaylarını hatta öğrencileri görsel etkinliklerle daha fazla karşı karşıya getirmek önemlidir. Görselleştirmenin matematik eğitimindeki rolü, öğrencilerin hatta öğretmenlerin ispat sürecine yaklaşımları, zorluklar, hepsi göz önüne alındığında sözsüz ispatların matematik öğretiminde kullanılmasına yapılan vurgular giderek artmaktadır. Bunun yansıması olarak da özellikle son yıllarda yapılan araştırmalarda, öğretim programlarında, ders kitaplarında genel anlamı ile matematiği öğrenme ve öğretme sürecinde sözsüz ispatlara ilgi hızla artmaktadır.

Kavramsal Çerçeve

Sözsüz İspat

Sözsüz ispatlar oldukça eskiye dayanmaktadır. Tümdengelimsel adımların şekil, diyagram ve grafiklere dayandırılmış halidir. Bu ise ispatı anlamanın resimlerin okunmasıyla mümkün olduğu anlamına gelmektedir. Sözsüz ispatlar söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, belki sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler olan ve yapılandırılması okuyucuya bırakılmış olan ispatlar olarak ifade edilmektedir (Bardelle, 2009). Sözsüz ispatlar; kelimeler olmadan matematiksel bir ifadenin ispatını resimleyen matematiksel çizimlerdir (Bell, 2011) yani geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermemektedir. Kelimeler içermeyen bir ispat, okuyucuyu yönlendirmek için bir veya iki denklem içerebilir, ancak vurgu açıkça matematiksel düşünceyi teşvik etmek için görsel ipuçları sağlamaya yöneliktir (Alsina ve Nelsen, 2010). Sözsüz ispatları anlamak için yapılan tartışmalar, açıklamalar, farklı matematiksel fikirler arasında bağlantılar bulmayı dolayısıyla da kavramayı geliştirmek için fırsatlar sunmaktadır (Gierdien, 2007). Sözsüz ispatlar ilköğretimden üniversiteye kadar her kademede matematikte önemli roller üstlenmektedir (Alsina ve Nelsen, 2010). Sözsüz ispatların hem anlaşılması hem de öğretim sürecinde kullanılması için öğretmenlerin görsel akıl yürütme becerilerine sahip olması beklenmektedir.

Görsel Akıl Yürütme

Görsel akıl yürütme becerileri elbette bilim adamları, mühendisler, mimarlar, bilgisayar bilimcileri, doktorlar, sanatçılar ve diğerleri için olduğu kadar matematikçiler içinde önemlidir (Karrass, 2012). Yurt içinde akıl yürütme ile ilgili çok fazla çalışma (örneğin: Arslan, 2019; Boyacı, 2019; Civak 2020; Çırakoğlu, 2020; Meriç, 2019) yapılmışken görsel akıl yürütme ile ilgili yapılan çalışma yok denecek kadar azdır. Gülşen (2012) tarafından yapılan bu çalışma da üç gönüllü matematik öğretmen adayının görsel akıl yürütme durumlarını incelemiştir. Veriler, üçü verilen görseli ispatlama ve biri görsel ispatı yorumlama olmak üzere öğretmen adaylarına yöneltilen dört görsel ispat ile toplanmıştır. Çalışmanın bulguları öğretmen adaylarının görsel ispatları algılama, takip ettikleri süreç ve ulaştıkları sonuçların farkında olma ile ilgili birtakım zorluklarla karşılaştıkları, ispata görsel ispat üzerinden ulaşmak yerine cebire eğilim gösterdikleri, çözüm süreçlerinde ispata odaklandıkları veya ispattan uzaklaştıkları tespit edilmiştir. Hershkowitz, Arcavi ve Bruckheimer (2001) çeşitli ülkelerdeki öğretmenlere (Brezilya, İspanya, Avustralya, Güney Afrika, İsrail, Şili) "kibrit çöpü" sorusunu yöneltmişlerdir. Problem görsel ile birlikte sunulmasına rağmen öğretmenlerin hepsinin görsel stratejileri kullanmadığını, problemi sayısal sonuçlar yardımıyla değerlendirmeye çalıştıklarını dolayısıyla genel bir çözüme ulaşmada zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Öğretmenlerin sayısal yaklaşımlarda ısrarcı olmalarının nedenlerini zihinlerinin görsel analize alışkın olmamaları, görsel sunulan araçların dikkate alınmaması ve genel bir çözüm elde etmek için matematiksel bir yol olarak düşünmemeleri olarak ifade etmişlerdir. Benzer olarak Bardelle (2010) diyagramların kullanımındaki zorlukları tanımlamaya çalışmıştır. İkinci ve üçüncü sınıf matematik öğrencilerinden oluşan 13 kişilik bir gruba bazı ifadelerin görsel ispatını yeniden inşa etmeyi içeren birkaç görev vermiştir. Görevler yazılı yapılmış ve öğrencilerin iddialarını daha iyi anlayabilmek için görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın sonunda İtalyan matematik öğrencilerinin görsel akıl yürütme becerilerinin eksik olduğu ve görsel iddiaları kullanmak yerine cebirle uğraşmayı tercih ettikleri sonucuna varılmıştır. Araştırmalardan elde edilen sonuçlar görsel akıl yürütme matematiksel problemlerin çözümünde, matematiksel ifadelerin neden doğru olduğunu ifade edebilmede, gerekçelendirmede, öğrencilerin matematikte kendilerine olan güvenlerini geliştirmede etkili olduğu fakat öğrencilerin ve hatta öğretmenlerin görsel akıl yürütme becerilerinin eksik olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla görsel akıl yürütmenin matematikte önemli bir faktör olduğu matematik öğretmenlerin görsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Pisagor teoremi hem en büyük buluşlardan hem de matematikteki en önemli (Flores, 1993), en iyi bilinen (Alsina ve Nelsen, 2011) ve en fazla ispatlanmış Saikia (2013) teoremlerden birisi olduğundan bağlam olarak da Pisagor teoremi ele alınmıştır. Pisagor teoremi ile ilgili çalışmalar incelendiğinde matematik öğretmenlerinin Pisagor teoremi bağlamında görsel akıl yürütme becerilerinin incelendiği çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmada Pisagor teoremi bağlamında öğretmenlerin görsel akıl yürütme becerileri incelenmiştir.

YÖNTEM

Bu çalışmada araştırma yöntemi katılımcıların sözsüz ispat yapma sürecindeki görsel akıl becerileri incelendiğinden dolayı nitel araştırma olarak belirlenmiş ve durum çalışması olarak desenlenmiştir. Her bir katılımcı bir durum olarak ele alınmıştır. Durum çalışmaları nitelikli araştırma yapmanın en yaygın yollarından biri olup var olan durumun betimlenmesi söz konusudur. Matematik eğitiminde sözsüz ispat yapma sürecindeki akıl yürütme ile ilgili çok fazla çalışma olmadığından her bir matematik öğretmeni durum olarak ele alınmış ve genelleme amacı olmadan durum derinlemesine incelenmiştir.

Çalışma Grubu

Çalışma gönüllü olan yedi matematik öğretmeni ile yürütülmüştür. Öğretmenlere Ö1, Ö2, …Ö7 şeklinde kodlama yapılmıştır. Katılımcıların belirlenmesinde gönüllü olmaları hem fen edebiyat fakültesi hem de eğitim fakültesinden mezun olmaları, farklı kıdem yılına sahip olmaları ölçüt olarak alınarak ölçüt örnekleme yöntemine göre belirlenmiştir. Bu öğretmenlerle ilgili demografik bilgiler Tablo 1' de özetlenmiştir.

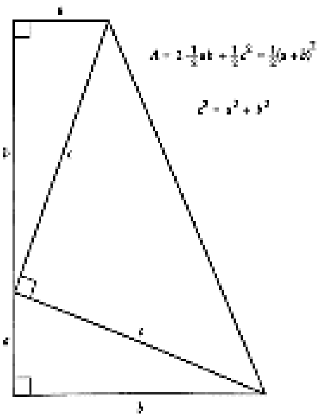
Tablo 1. *Çalışmaya Katılan Öğretmenlerin Demografik Bilgileri*

Kod	Mezun olunan Fakülte	Yıl	Kademe
Ö1	Fen	10	Lise
Ö2	Fen	9	Lise
Ö3	Fen	7	Lise
Ö4	Fen Edebiyat	14	5 yıl ortaokul 9 yıl lise
Ö5	Fen Edebiyat	21	Lise
Ö6	Eğitim	5	Ortaokul
Ö7	Eğitim	23	Lise

Tablo 1'den görüldüğü gibi çalışmaya katılan iki öğretmen eğitim fakültesi mezunudur. Bunun yanı sıra çalışmaya katılan dört öğretmen Milli Eğitim Bakanlığı'na (MEB) bağlı okullarda 5-10 yıl mesleki deneyime sahiptir. 14 yıllık öğretmenlik mesleki deneyime sahip bir öğretmen bulunurken, iki öğretmen 20 yıldan fazla süredir öğretmenlik yapmaktadır. Kademe olarak da beş öğretmen lise kademesinde, bir öğretmen hem lise hem de ortaokul kademesinde, bir öğretmen ortaokul kademesinde öğretmenlik yapmaya devam etmektedir.

Veri Toplamak İçin Kullanılan Pisagor Teoreminin Garfield Tarafından Yapılan Sözsüz İspatı

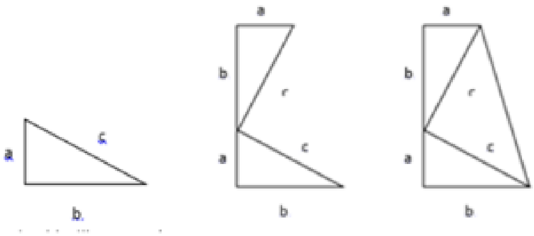
Çalışmanın verileri 1876 da J.A. Garfield tarafından yapılan Şekil 2' deki Pisagor teoreminin sözsüz ispatı ile toplanmıştır.



Şekil 1. Garfield Tarafından Yapılan Pisagor Teoreminin Sözsüz İspatı

Görüşmelerde öğretmenlere görsel ile birlikte Şekil 1'de görüldüğü gibi görselin yanındaki matematiksel ifadelerde verilmiştir. Bu sayede görsel ile matematiksel ifade arasındaki ilişkiyi nasıl kurdukları incelenmeye çalışılmıştır.

Bu görsel ispatı farklı şekillerde ifade etmek mümkündür. İlki yamuğun alanı ile verilen üç dik üçgenin alanları arasında ilişki kurulabilir. Bu sayede bütün alan ile parçaların alanlarının toplamına eşitliğinden hareketle, üç dik üçgenin alanları toplamı dik yamuğun alanına eşitlenebilir. Bundan başka Şekil 2'de verildiği gibi tabanın uzunluğu b, yüksekliği a, hipotenüsün uzunluğu c olan bir üçgen göz önüne alınır. Bu üçgene eş olan bir üçgen çizilir ve bu iki üçgeni birleştirip yamuk elde edilir. Görseldeki üç tane üçgenin alanının toplamı yamuğun alanına eşit olacaktır. Elbette bu görsel kullanılarak farklı şekilde de ispat yapılabilmektedir.



Şekil 2. Sözsüz İspatın Adımları

Verilerin Toplanması ve Analizi

Veriler katılımcılarla iki görüşme yapılarak toplanmıştır. Birinci görüşmede sadece görsel verilmiş ve ne ile ilgili olabileceği sorulmuş verdikleri cevaplar yazılı olarak toplanmıştır. İkinci görüşmede ise sesli düşünme tekniği kullanarak Şekil 1' deki gibi sözsüz ispat verilmiş ve ispatın nasıl yapıldığını açıklamaları istenmiştir. Her bir görüşmede öğretmenler ile önceden randevulaşılmış, veri kaybına neden olmamak için ikinci görüşmede sürecin kamera ile kayıt altına alınacağı ifade edilmiş ve hiçbir öğretmen bundan dolayı tedirginlik yaşamaması sağlanmaya çalışılmıştır. Katılımcılara çalışmanın amacı hakkında bilgi verilmiş ve süreç boyunca düşündükleri her şeyi sesli olarak ifade etmeleri istenmiştir. Tüm katılımcılar 2-5 dk. arasında ispatı elde etmişlerdir.

Görüşmelerden elde edilen veriler yazılı doküman haline dönüştürülmüştür. Sesli düşünme oturumunda katılımcıların görsel üzerinde elleriyle ya da kalemle gösterdiği/çizdiği kritik davranışlar ekran alıntısı aracılığı ile desteklenmiştir. Nitel araştırmalarda geçerlik, belirli süreçler aracılığı ile araştırmacının, bulguların doğruluğunu kontrol etme ve denetlemeyi ifade ederken, güvenirlik ise farklı çalışma ve projelerin araştırmacıları tarafından, çalışmayı yapan araştırmacı ile bakış biçimlerindeki tutarlılığını ifade etmektir. Bu bağlamda araştırmacı tüm veri toplama sürecinde bulunmuş elde ettiği tüm verileri ve tüm gözlemlerini aktarmıştır. Uygulama sonrası veri toplama sürecini, analiz sürecini detaylıca sunmuştur. Araştırmanın tüm aşamalarında bulgular alanında uzman kişilere sunulmuş görüşler doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır.

Araştırmanın verileri çözümlenirken içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Verilerin analizinde görüşmelerden elde edilen yazılı dokümanlar ve görüşmenin kamera kayıtları incelenerek her bir katılımcının ispatlama sürecindeki davranışları kodlanmıştır. Analiz sürecinde her bir katılımcı ayrı ele alınmıştır. Araştırmanın güvenirliği için Miles ve Huberman'ın değerlendiriciler arası görüş birliği formülü tercih edilmiştir. Miles ve Huberman (1994) güvenirlik formülü (Güvenirlik = Görüş Birliği / (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı) kullanılmış ve kodlayıcılar arasındaki uyum oranı %89.9 olarak tespit edilmiştir.

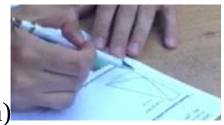
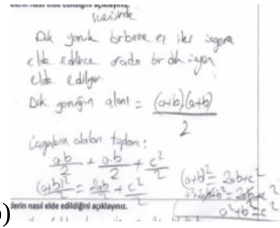
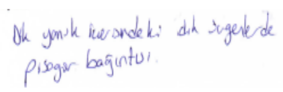
Etik Kurallara Uygunluk

Çalışmanın verileri 2019 yılında toplandığı için etik kurul belgesi alınmamıştır. Çalışmanın yazım sürecinde bilimsel, etik ve alıntı kurallarına uyulmuş; toplanan veriler üzerinde herhangi bir tahrifat yapılmamıştır.

BULGULAR VE YORUM

Ö1'in İspatından Elde Edilen Bulgular

Görüşme başladığında Ö1 soruyu sesli okumuş, verilen görsele baktıktan sonra *"evet burada bir dik yamuk var, dik yamuk içerisinde iki tane eş üçgenler çizilmiş, tabi bu eş üçgenleri çizince burada arada da bir tane ikizkenar dik üçgen oluşmuş"* şeklinde görseldekileri yorumlamıştır. Daha sonra görsel ile birlikte verilen açıklamaları *"Şimdi bu eşitliğe bakarsak* a *eşittir* iki *çarpı* bir *bölü 2ab artı* bir *bölü iki c kare, oda eşittir bir bölü iki a artı b'nin karesi oradan da c kare eşittir a kare artı b kare eşitliği elde edilmiş"* şeklinde sesli okumuştur. Daha sonra tekrar görsele bakarak *"şimdi burada dikkat edersek bu üçgenler birbirine eş üçgenler… Buradaki dik yamuğun alanını verecek formülü düşünürsek buradaki dik yamuğun alanı alt taban artı üst taban çarpı yükseklik bölü 2 olduğundan dik yamuğun alanı a+b çarpı a+b bölü 2 yani a+b nin karesi bölü 2'dir"* diyerek yamuğun alanını ayrılan üçgenlerin alanlarının toplamına eşitleyip Pisagor teoreminin ispatını tamamlamıştır. Özetlenecek olursa Ö1 görseli incelemiş (Şekil 3a) ilk önce dik kenar uzunlukları a ve b olan dik üçgenlere sonra bu dik üçgenler arasında oluşan kenar uzunluğu c olan ikizkenar üçgene dikkat etmiş en son bütüne bakarak yamuğun alanına odaklanmıştır. En son parçalı olan bu üçgenlerin alanlarını yamuğun alanına eşitlemiştir. Kâğıdına yazdıkları Şekil 3b'de verilmiştir.

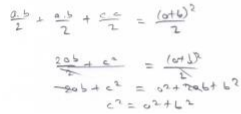
a)  b)  c) 

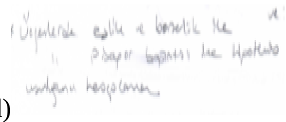
Şekil 3. Ö1'in Görseli Yorumlaması ve Kâğıdına Yazdıkları

Şekil 3b'den görüldüğü gibi Ö1 sesli ifade ettiklerini aynen kâğıdına aktarmıştır. Şekil 3c'de ilk uygulama verdiği cevap incelendiğinde *"Dik yamuk içerisindeki dik üçgenlerde pisagor bağıntısı"* ifadesi dikkate alınırsa Ö1'in sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden de Pisagor teoremi ile ilişkilendirebildiği söylenebilir.

Ö2'nin İspatından Elde Edilen Bulgular

Ö2 soruya baktıktan sonra *"bu soruda dik yamuk ile ilgili bir alan hesaplama var"* demiştir. Şekil 4a'daki gibi öncelikle verilen açıklamaya odaklanmıştır. Daha sonra *"dik yamuk üç tane dik üçgene parçalayarak ı alanları toplamı şeklinde almış ki şunlar zaten eş üçgenler (Şekil 4b) artı diğer üçgen alanları toplamını bulmuş"* şeklinde açıkladıktan sonra ispatı yapmaya başlamıştır. *"Üçgenlerin alanlarını hesaplayalım a çarpı b bölü iki şu üçgen şu üçgen artı a çarpı b bölü iki artı…… art c çarpı c bölü 2 … yamuğun alanı da a çarpı b bölü iki ...a çarpı b bölü iki .....Üçgenlerin alanları toplamı yamuğun alanına eşittir. Buradan eşitliklerden Pisagor bağıntısına gitmiş"* şeklinde ifade ederek kâğıda üçgenlerin alanlarını yazmış, üçgenin alanlarının toplamını yamuğun alanına eşitlemiş (Şekil 4c) ve Pisagor bağıntısını elde etmiştir.

a)  b)  c) 

d) 

Şekil 4. Ö2'nin Görseli Açıklaması, Birinci ve İkinci Görüşmede Kâğıdına Yazdıkları

Ö2'nin ilk görüşmede verdiği yanıt (Şekil 4d) ile ikinci görüşmede verdiği yanıt (Şekil 4c) karşılaştırıldığında, ilk görüşmede *"üçgenlerde eşlik, benzerlik ve Pisagor bağıntısı ile hipotenüs hesaplama"* şeklinde ifade ederken ikinci görüşmede görselden faydalanarak Pisagor bağıntısını elde etmiştir. Ö2 sadece görselden yola çıkarak yani matematiksel ifade verilmeden Pisagor bağıntısıyla ilişkilendirememiştir fakat Pisagor teoremini kullanarak hipotenüs hesaplanacağını ifade etmiştir.

Ö3'ün İspatından Elde Edilen Bulgular

Ö3 soruya inceledikten sonra *"görselden yararlanarak nasıl elde ediyoruz"* şeklinde soruda ne beklendiğini ifade etmiştir. Daha sonra *"üçgenlerin alanları toplamı aynı zamanda yamuğun alanı toplamına eşit olacağı için…. birbirine eşitlediğimizde buradan Pisagor bağıntısını elde ediliyor"* demiştir. Şekil 5a'da ki gibi soruyu okuduktan sonra görsele odaklanarak görsel üzerinde ispatın nasıl yapılabileceğini açıklamıştır. Araştırmacı kâğıda da yazar mısınız şeklinde yönlendirme yaptıktan sonra sözlü ifade ettiklerini kâğıda Şekil 5b'deki gibi aktarmıştır.

a) 

b) 

c) 

Şekil 5. Ö3'ün Birinci ve İkinci Görüşmede Kâğıdına Yazdıkları

Ö3'ün ilk görüşmede verdiği yanıt (Şekil 5c) ile ikinci görüşmede verdiği yanıt (Şekil 5b) karşılaştırıldığında, ilk görüşmede *"dik yamuk şekli"* şeklinde ifade ederken ikinci görüşmede kâğıdına Pisagor bağıntısının *"yamuğun alanı=üçgenlerin alanı toplamı"* şeklinde yazarak elde edilebileceğini yazmıştır. Fakat cebirsel olarak göstermemiştir. Ö3 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden Pisagor bağıntısı ile ilişkilendirememiş olarak yorumlanmıştır.

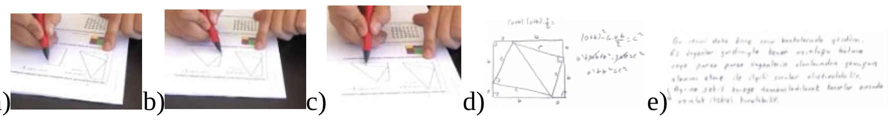
Ö4'ün İspatından Elde Edilen Bulgular

Ö4 soruya incelediğinde Şekil 6a'da gösterildiği gibi görsel ile birlikte verilmiş olan matematiksel ifadeye odaklanmıştır. *"Alan kısmı şimdi burada"* dedikten hemen sonra kuraldan yola çıkarak verilen görsel ile ilişki kurmaya başlamıştır. Şekil 5b'de gösterildiği gibi verilen ifadeleri görsel üzerinde açıklamıştır.

a) b) c) d) e)

Şekil 6. Ö4'ün Görsel ile Kural Arasındaki İlişki Kurma Süreci

Daha sonra *"… burada parça parça alanların hesabı (Şekil 6b) … iki çarpı a çarpı b bölü 2 … yani şuradaki üçgenin (Şekil 6b) a çarpı b'nin yarısı buradaki üçgen (Şekil 6c) a çarpı b'nin yarısı şurası (Şekil 6d'de gösterildiği gibi eşitliği göstererek) iki tane eş üçgenin alanı"* diyerek soruda görselin yanında verilen eşitlik ifadesindeki ilk ifadenin görselde neresi olabileceğini göstermiştir. Daha sonra *"artı birde içerideki dik üçgen alanı toplanmış ... şu eşitlik... (açıklamadaki en son kısmı göstererek) bu eşitlikte de yamuğun alanına eşitlenebilir. Burada mesela şuradaki a artı b'nin parantez karesi dediğimiz (Kuralda verilen ifadeyi bir adım ileri götürüyor Şekil 6e) a artı b alt taban çarpı üst taban çarpı yükseklik. a artı b bölü yani çarpı bir bölü iki dedik. Bu ikisinin eşitliğini yazdığımız zaman …."* demiş fakat bu aşamadan sonra yazmamış ve soruda verilen kısım üzerinden açıklama yapmıştır *"zaten ifade c kare eşittir a kare artı b kare şeklinde gelir"* şeklinde ispatı yapmıştır. Bu aşamadan sonra süreç sonlandırmamış ve *"onun haricinde başka bu soruda daha çok hani eşlik benzerlik konusunda çok fazla karşılaştım mesela şekil tamamlama kısmında da bu tarz sorular vardı ben şöyle temsili şu şekilde bir çizim yapayım. (Şekil 7a) Şimdi genelde eşlik benzerlikte kare ile ilgili çok fazla soru yazıyorlar. Şimdi şuradan şöyle aldım. (Şekil 7b) şuradan şöyle. (Şekil 7c) İki tane üçgenimiz eş. Aynı şekli katlayıp şu tarafa koydum. Hani şu a şu b şu a kadarsa"* diyerek kareye tamamlamış ve *"İçinde bir kare oluştu."* demiştir. *"Tüm alandan …… den üçgenlerin alanlarını yani …. Çıkarttığımda içindeki karenin alanına yani* c^2 *ye eşit olacak."* demiştir.



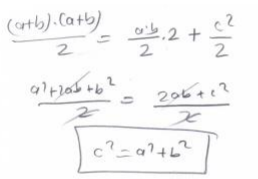
a) b) c) d) e)

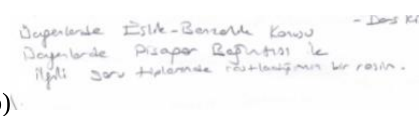
Şekil 7. Ö4'ün Çizmiş Olduğu Şekiller, Birinci ve İkinci Görüşmedeki Kâğıdı

Ö4'ün ilk görüşmede verdiği yanıt (Şekil 7e) ile ikinci görüşmede verdiği yanıt (Şekil 7d) karşılaştırıldığında ilk görüşmede *"Eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğu bulma veya parça parça üçgenlerin alanlarından yamuğun alanını elde etme, ayrıca şekil kareye tamamlanarak kenarlar arasında uzunluk ilişkisi kurulabilir"* şeklinde ifade ederken ikinci görüşmede görselden faydalanarak Pisagor bağıntısının nasıl elde edileceğini açıklamıştır. Ö4 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli tam olarak Pisagor bağıntısıyla ilişkilendirememiştir.

Ö5'in İspatından Elde Edilen Bulgular

Ö5 soruyu okuduktan sonra *"bu soruda yamuk ve yamuğun içerisinde ikizkenar dik üçgen… ikizkenar dik üçgenden yararlanarak açıların eşliğinden… iki tane eş üçgen verilmiş. Bu yamuğun alanı ile iki tane eş üçgen ve ikizkenar dik üçgenin alanları toplamı birbirine eşit olduğuna ait bir formül ve buradan da Pisagor bağıntısına ait bir özdeşlik elde etmemiz isteniyor. Burada ben hemen yamuğun alanını yapıyorum. Alt ile üst taban"* diyerek üçgenlerin alanları toplamını yamuğun alanına eşitleyerek gerekli işlemleri yapmıştır.

a) 

b) 

Şekil 8. Ö5'in Birinci ve İkinci Uygulamada Kâğıdına Yazdıkları

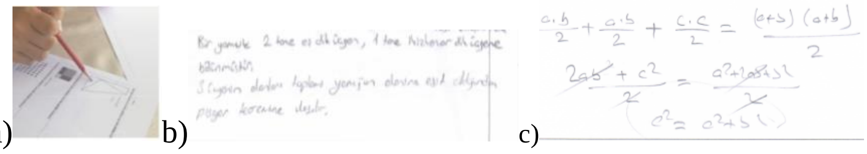
Ö5'in ilk görüşmede verdiği yanıt (Şekil 8b) ile ikinci görüşmede verdiği yanıt (Şekil 8a) karşılaştırıldığında, ilk görüşmede *"Üçgenlerde eşlik – benzerlik konusu, üçgenlerde Pisagor bağıntısı ile ilgili soru tipleri"* şeklinde ifade ederken ikinci görüşmede görselden faydalanarak Pisagor bağıntısını elde etmiştir. Ö5 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli Pisagor bağıntısıyla ilişkilendirebilmiştir.

Ö6'nın İspatından Elde Edilen Bulgular

Ö6 soruyu inceledikten sonra görüşme boyunca ifade ettikleri aşağıda verilmiştir.

> "*Şimdi ilk soruda görselden faydalanarak (Şekil 9a) verilen eşitlikleri nasıl elde ettiğimizi açıklayacağız. Burada bizim bir tane yamuğumuz var. Bu yamuk iki eş dik üçgen ve bir tane de ikizkenar dik üçgene ayrılmış. Biz burada üç üçgenin alanını hesaplayarak Pisagor teoremine ulaşacağız. Burada birinci üçgenimin alanı taban çarpı yükseklik bölü ikiden a çarpı b bölü iki, diğeri de aynı şekilde a çarpı b bölü ikiden artı ikizkenar dik üçgende c çarpı c bölü ikiden eşitliğimizi sağlayalım neye yamuğun alanına, yamuğun alan formülümüz neydi üst taban artı alt taban çarpı yüksekliğim yine a artı b bölü iki. Burada ab'nin karesi artı c kare bölü iki eşittir düzeltiyorum şurayı iki ab olacak Burası burada da a kare artı iki ab artı b'nin karesi bölü iki sonucunu elde ettik bunları götürdük karşılıklı iki ab'leri götürdük c'nin karesi eşittir a kare artı b kareden yani Pisagor teoremine ulaşmış oluyoruz* "

Görüldüğü gibi Ö6 süreç boyunca duraksamadan ispatlamıştır.


a) b) c)

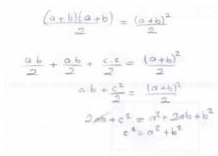
Şekil 9. Ö6'nın Görseli Açıklaması, Birinci ve İkinci Görüşmede Kâğıdına Yazdıkları

Ö6'nın ilk görüşmede verdiği yanıt (Şekil 9c) ile ikinci görüşmede verdiği yanıt (Şekil 9b) karşılaştırıldığında, ilk görüşmede *"Eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğu bulma veya parça parça üçgenlerin alanlarından yamuğun alanını elde etme, ayrıca şekil kareye tamamlanarak kenarlar arasında uzunluk ilişkisi kurulabilir"* şeklinde ifade ederken ikinci görüşmede görselden faydalanarak Pisagor bağıntısını elde etmiştir. Ö6 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli tam olarak Pisagor bağıntısıyla ilişkilendiremediği söylenebilir.

Ö7'nin İspatından Elde Edilen Bulgular

Ö7 soru ile karılaştıktan sonra (Şekil 10a) *"Yamuğun alanından üçgenlerin alanları toplamı ile yamuğun alanını eşleştirerek Pisagor bağıntısına ulaştım"* demiştir.

a) 
b) 

c) 

Şekil 10. Ö7' nin Görseli Açıklaması, Birinci ve İkinci Görüşmede Kâğıdına Yazdıkları

Ö7'nin ilk görüşmede verdiği yanıt (Şekil 10c) ile ikinci görüşmede verdiği yanıt (Şekil 10 b) karşılaştırıldığında, ilk görüşmede *"yamuk alanı üçgenlerin alanları toplamına eşittir"* şeklinde ifade ederken ikinci görüşmede görselden faydalanarak Pisagor bağıntısını elde etmiştir. Ö7 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli tam olarak Pisagor bağıntısıyla ilişkilendirdiği söylenebilir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Sözsüz ispatı yapma sürecinde katılımcılar soruyu okuma, soruyu açıklama, plan yapma, görseldeki geometrik şekilleri inceleme, görselde verilen ilişkileri açıklama, verilen matematiksel ifadeleri görsel üzerinde gösterme, kavramsal bilgi ifade etme, kavramsal bilgiyi görsele uyarlama, ispatı yapma, değerlendirme yapma gibi aşamaları izlemişlerdir. Bu aşamalar Boero (1999), Heinze ve Reiss (2004) aşamalarına benzemektedir. Görseldeki geometrik şekilleri inceleme ve verilen matematiksel ifadeleri inceleme sonra matematiksel ifade ile görsel arasında ilişki kurma aşamasının tüm ispat sürecini yönlendirdiği görülmektedir. Dolasıyla Doruk'un (2016) ifade ettiği gibi ispata başlamadan önce başarılı bir argümantasyon süreci geçirme ispat yapma sürecinde önemlidir. Bu çalışmada kullanılan Pisagor teoremin sözsüz ispatında öğretmenler yamuğun alanı ve üçgenin alanı ile ilgili kavramsal bilgiye sahip olduklarından hatırlama ya da sorarak öğrenme yoluna gitmemişlerdir. Bu nedenle ispat yapma süreci ön öğrenmeler ile ilişkilidir yani ispat yapma sürecinde kavramsal bilginin de önemli bir boyut olduğu ifade edilebilir. Bu bulgu Karras (2012) geometrik bilgi düzeyi iyi olan öğretmen adaylarının sözsüz ispatları daha iyi çözebildiği önceden öğrenilmiş bilgiyi kullanmayı gerektirdiği görüşünü desteklemektir. İspatı yapma aşaması var olan bilgilerin transferi, işlem yapabilme becerisi gibi birçok değişkeni içinde bulundurmaktadır. Bu aşamada ispat yapmada başarısız olma ile ilgili çalışmaların (Bardelle, 2009) bulgularını desteklemektedir. Diğer taraftan öğrencilere ispat ve muhakeme becerisinin öğretimi ve gelişimi öğretmenlere bağlıdır. Chambers (1999) Pisagor teoremini "en iyi" öğretme yöntemi için öğretmenlere farklı seçenekler sunmak, alternatif yaklaşımlar üzerinde düşünmeye teşvik etmek ve öğretmenleri Pisagor teoremini öğretme bağlamında ispat konusunu düşünmeye zorlamak olduğunu ifade etmiştir. Nitekim öğretmenler eğer Pisagor teoreminin uzunluk ile mi alan ile mi verilmesi konusunda derin anlayış sahibi olabilirlerse hem nasıl ispatlanacağı hem de nasıl doğrulanacağı konusunda rehberlik edebileceklerdir. Dolayısıyla bu ispatların derslerde kullanılması, öğrenciye ispat becerisinin yanında muhakeme yapabilme, sonuca ulaşabilmesi için değerlendirme ve matematiksel bilgiyi kullanabilme olanağı sağlayacağı düşünülmektedir.

Öneriler

Bu çalışmada Pisagor teoreminin Garfield tarafından yapılan sözsüz ispat süreci incelenmiştir. Pisagor teoreminin bundan başka birçok sözsüz ispatı bulunmaktadır. Farklı sözsüz ispatlar ile de benzer çalışmalar yapılabilir. Ayrıca yalnızca öğretmenlerin görsel akıl yürütme becerileri incelenmiştir. Bu çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının ve öğrencilerin sözsüz ispat yapma süreçleri karşılaştırılabilir benzerlik ve farklılıkları belirlenebilir.

KAYNAKÇA

Almeida, D. (1996). Variation in proof standarts: Implication for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27, 659–665. doi:10.1080/0020739960270504.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 3*(1), 118-127.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2011). *Icons of Mathematics: An Exploration of Twenty Key Images*. Washington, DC: Mathematical Association of America

Arslan, (2019). *Matematiksel ve mantıksal akıl yürütmede Kant'ın görü kavramının Hintikka tarafından yeniden yapılandırılmasının bir eleştirisi.* (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Boğaziçi Üniversitesi / Sosyal Bilimler Enstitüsü. İstanbul

Bardelle, C. (2009). Visual Proofs: An Experiment. V. Durand-Guerrier et a (Dü.), *Annual meeting CERME6* (s. 251-260). Lyon: INRP.

Bell, C. (2011). Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. *Mathematics Teacher, 104*(1), 690-695.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. (July/August 1999)

Boyacı, H.S. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerisi:karma yöntem çalışması.* (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Boğaziçi Üniversitesi / Sosyal Bilimler Enstitüsü. İstanbul

Chambers, P. (1999). Teaching Pythagoras' theorem. Still hazy after all these years. Mathematics in School, 28(4), 22-24.

Civak R.A. (2020). *Bir yedinci sınıfta matematiksel uygulamaların gelişimi: Öğrencilerin orantısal akıl yürütmelerinin gelişiminin incelenmesi.* (Yayınlanmamış Doktora tezi) Orta Doğu Teknik Üniversitesi / Sosyal Bilimler Enstitüsü. Ankara

Çırakoğlu, T. (2020). Cebirsel akıl yürütme uygulamalarının toplama ve çıkarma işlemindeki kavram yanılgılarına ve hatalarına etkisi. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans tezi) Trabzon Üniversitesi / Lisansüstü Eğitim Enstitüsü. Trabzon

Doruk, M. (2016). Investigation of preservice elementary mathematics teachers' argumentation and proof processes in domain of analysis (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Flores, A. (1993). Pythagoras Meets Van Hiele. School Science and Mathematics. 93(3)

Gierdien, F. M. (2007). From "Proofs without words" to "Proofs that explain" in secondary mathematics. *Pythagoras, 65,* 53-62. doi:10.4102/pythagoras.v0i65.92

Gülşen, İ. (2012). Matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumlarının incelenmesi. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi) Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ankara

Hanna, G. (1991). *Research on mathematical proof*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (*pp*. 54-61). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education*, *39*(1–2), 73–78. doi:10.1007/s11858-006-0005-0.

Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at lower secondary level—a video study. *ZDM International Journal on Mathematics* Education, 36(3).

Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning-the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(2), 255-265.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S., (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher ve J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition*. (ICMI Study Series) University Press, 70-95.

Karrass, M. (2012). *Diagrammatic Reasoning Skills of Pre-Service Mathematics Teachers (*.Unpublished Doctoral Thesis), Columbia University, Graduate School of Arts and Sciences. doi:10.7916/D8PK0P5M

Lockhart, P. (2009). *A Mathematician's Lament.* https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf adresinden alımıştır.

Meriç, G.A. (2019). *Argümantasyon Teorisi'nin bilimsel akıl yürütmedeki ve fen bilimleri eğitimindeki rolü.* (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi / Sosyal Bilimler Enstitüsü Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2018). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: MEB.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). An expanded sourcebook qualitative data analysis. (Second Edition). California: Sage Publications, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000).Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Peresini, D., & Webb, N. (1999). Analyzing Mathematical Reasoning in Students' Responses Across Multiple Performance Assessment Tasks. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12/ Lee V. Stiff, 1999 Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Rodd, M. M. (2000). On mathematical warrants: Proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (3), 221-244.

Saikia, M. P. (2015). The Pythagoras theorem. *Asia Pac. Math. Newsl.* 5(2), 5–8.

ORCID

Handan DEMİRCİOĞLU ORCID 0000-0001-7037-6140
Ebru ARSLANTAŞ İLTER ORCID 0000-0002-1616-6393

SUMMARY

Introduction

Reasoning is thinking deeply, considering all the variables. Individuals with developed reasoning skills can form many thoughts and opinions in the face of any event and can reach new inferences, assumptions and even conclusions based on these thoughts. For these reasons, reasoning requires the use of a wide variety of thinking styles (Peresini & Webb, 1999). The most important of these thinking styles is mathematical thinking. Since proof is a sub-dimension of mathematical thinking, improving students' proof skills will also improve their mathematical thinking skills. In order for the learning and teaching process to be meaningful, teaching methods and techniques should be determined by taking into account variables such as students' interests, readiness levels, and learning styles (MEB, 2018). In this context, visualization is one of the effective techniques. Hershkowitz, Arcavi, and Bruckheimer (2001) point out that visualization may be more central to mathematics than high-level reasoning, perhaps even more than formal symbolic proofs. Visual reasoning skills are of course important for mathematicians as well as scientists, engineers, architects, computer scientists, doctors, artists and others (Karrass, 2012). While there are many studies on reasoning in the country (for example: Çırakoğlu, 2020; Civak 2020; Meriç, 2019; Arslan, 2019; Boyacı, 2019), there is almost no study on visual reasoning.

Nonverbal proofs are very old. Deductive steps are based on figures, diagrams and graphs. This means that understanding the proof is possible by reading the pictures. Non-verbal proofs are expressed as proofs that are not words, based only on diagrams, perhaps numbers, letters, arrows, dots and related symbolic expressions, and the construction of which is left to the reader (Bardelle, 2009). Examining the visual reasoning skills of mathematics teachers is the focus of this study. The Pythagorean theorem is one of the greatest discoveries in Saikia (2013), as well as one of the most important (Flores, 1993), best known (Alsina and Nelsen, 2011) and most proven mathematical theorems. When the studies on the Pythagorean theorem were examined, no study was found in which the visual reasoning skills of mathematics teachers were examined in the context of the Pythagorean theorem.

Method

In this study, the research method was determined as qualitative research and designed as a case study, since the visual reasoning skills of the participants in the process of making nonverbal proofs were examined. Each participant was treated as a situation. Case studies are one of the most common ways to conduct qualitative research and describe the existing situation. Since there are not many studies on reasoning in the process of making nonverbal proof in mathematics education, each mathematics teacher was considered as a situation.

Participants

The research was carried out with seven volunteer mathematics teachers. The teachers were coded as S1, S2,… S7. Two teachers participating in the research are graduates of the Faculty of Education. There are also four teachers with 5-10 years of professional experience. While there is

one teacher with 14 years of teaching experience, two teachers have been teaching for over 20 years. On a class basis, 5 teachers at high school level, one teacher at both high school and secondary school level, and one teacher at secondary school level continue to work.

Data collection and analysis

Data were collected through two interviews with the participants. In the first interview, only visuals were given and the answers they gave were collected in written form. In the second interview, they were asked to explain how the nonverbal proof of the Pythagorean theorem was done by using thinking aloud technique. In each interview, an appointment was made with the teachers in advance, it was stated that the process would be recorded with a camera in the second interview in order not to cause data loss, and it was tried to ensure that no teacher would experience any uneasiness because of this. Participants were informed about the purpose of the study and were asked to verbalize everything they thought during the process. All participants proved it in 2-5 minutes.

The data obtained from the interviews were converted into written documents. In the thinking aloud session, the critical behaviors that the participants showed/drawn with their hands or pencils on the visual were supported by screenshots. While validity in qualitative research refers to the fact that the researcher checks and controls the accuracy of the findings through certain processes, reliability refers to the consistency between the researchers of different studies and projects and the way they view the researcher. In this context, the researcher was involved in the entire data collection process and transferred all the data he obtained and all his observations. He presented the post-implementation data collection process and analysis process in detail. At all stages of the research, the findings were made in line with the opinions presented to the experts in the field.

Content analysis method was used while analyzing the data of the research. In the analysis of the data, the written documents obtained from the interviews and the camera recordings of the interviews were examined and the behaviors of each participant in the proving process were coded. In the analysis process, each participant was handled separately. For the reliability of the research, the consensus formula of Miles and Huberman was preferred. Miles and Huberman (1994) reliability formula (Reliability = Consensus / (Agreement + Disagreement)) was used and the agreement rate among the coders was determined as 89.9%.

Conclusion and Discussion

The participants followed the stages such as reading the question, explaining the question, making a plan, examining the geometric shapes in the image, explaining the relationships given in the image, showing the given mathematical expressions on the image, expressing the conceptual information, and making adaptations, giving conceptual information to the visual, making a proof, and making an evaluation. These stages are similar to Boero (1999), Heinze and Reiss (2004). After examining the geometric shapes in the image and analyzing the given mathematical expressions, it is seen that the stage of establishing a relationship between the mathematical expression and the visual directs the whole proof process. Therefore, as Doruk (2016) states, it is important to have a successful argumentation process before starting the proof. It can be stated that conceptual knowledge is as important a dimension as pre-learning in the visual proof process. This finding *supports the view of Karras (2012) that pre-service teachers with good geometric knowledge can solve visual proofs better and require using previously learned information. The stage of proof includes many variables such as the transfer of existing information and the ability to act. It supports the findings of the studies (Bardelle, 2009) on not being able to prove at this stage. In this study, the Pythagorean theorem was examined. Similar studies can be done with different visual evidence. In addition, only the visual reasoning skills of teachers were examined. The results of this study can identify comparable similarities and differences in the processes of prospective teachers and students.*