

8. VE 11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL DÜŞÜNME AŞAMALARINDAKİ DAVRANIŞLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

COMPARISON OF 8 TH AND 11 TH GRADE STUDENTS BEHAVIOURS AT MATHEMATICAL THINKING

Murat KESKİN*, Serap AKBABA DAĞ**, Murat ALTUN***

* Afyon Kocatepe Üniversitesi Bolvadin MYO, mkeskin23@gmail.com

** Dumlupınar Üniversitesi Eğitim Fakültesi, akbaba.s@gmail.com

*** Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi, maltun@uludag.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmanın amacı sekizinci ve on birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarındaki yaşantı farklılıklarını incelemektir. Bu amaçla 14 sekizinci sınıf ve 11 on birinci sınıf öğrencisine matematiksel düşüncenin üzerinde durulan aşamalarını içeren 2 çalışma yaprağı uygulanmıştır. Veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Çalışma yapraklarından ve uygulama sırasında yapılan gözlemlerden elde edilen sonuçlar; sekizinci sınıf öğrencilerinin daha fazla olmakla birlikte her iki grubun da ispat aşamasına doğru ilerledikçe kendilerini hem matematiksel olarak hem de sözel olarak ifade etmek de zorlandıklarını göstermektedir.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel düşünme, matematiksel düşünme aşamaları, ilköğretim, ortaöğretim.

ABSTRACT

The aim of this study is to investigate the experience differences of eight and eleven grade students' related to specializing, generalizing, conjecturing and proving stages of mathematical thinking. For that purpose, were performed 2 worksheet that indicated mathematical thinking stages to 14 eight and 11 eleven grade students. The data structure was analyzed with discriptive analysis. The results that acquired from worksheets and observation during the perform were indicated they are forced to express themselves both mathematically and verbally that either groups progressively through to the proving stage, as well as further at eight grade students.

Keywords: Mathematical thinking, mathematical thinking stage, primary education, secondary education.

GİRİŞ

Matematik, düşünmeyi geliştirdiği bilinen en önemli araçlardan biridir. Bu nedendir ki matematik eğitimi temel eğitimin önemli yapı taşlarından birini, belki de en önemlisini oluşturur (Umay, 2003). Matematik öğretiminin amacı kişiye günlük hayatın gerektirdiği matematik bilgi ve beceri kazandırmak, ona problem çözmeyi öğretmek ve olayları problem çözme yaklaşımı içinde ele alan bir düşünme biçimi kazandırmaktır (Altun, 2008). Bu tür bir düşünme biçiminin gerekliliği, değişik zamanlarda ve biçimlerde vurgulanmış (Schoenfeld, 1992; Greenwood, 1993; Dunlap, 2001) ve özel olarak “Matematiksel Düşünme “ olarak adlandırılmıştır.

Matematiksel Düşünme; problemlerin çözümünde doğrudan veya dolaylı olarak matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin uygulanmasıdır (Henderson, 2002). Bir problemle karşılaşıldığında problemin cevabının ne olduğunu bulmaktan öte, problemin çeşitli boyutları ile ele alınarak incelenmesi matematiksel düşünceyi gerektirmektedir (Ferri, 2003).

Araştırmacılar matematiksel düşünceyi oluşturan bileşenleri farklı şekillerde tanımlamışlardır. Örneğin, Liu Po Hung (2003) tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, betimleme, genelleme, örnekleme, biçimsel ve biçimsel olmayan usa vurma, doğrulama vb. karmaşık süreçlerin matematiksel düşünceyi oluşturduğunu; Tall (2002) matematiksel düşüncenin, soyutlama, sentezleme, genelleme modelleme ve ispat gibi bileşenleri olduğunu ifade etmişlerdir. Stacey, Burton ve Mason (1985) da, matematiksel düşünmenin aşamalarını özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve doğrulama ve ikna etme süreçlerinden meydana geldiğinden söz etmektedirler.

Matematiksel düşünce yukarıda bahsedilen bileşenlerden oluşan bir yapıdır ve oluşum süreci belli aşamaları içermektedir. Belki söz konusu yapı değişik bileşenlerle de kurulabilir ama bu çalışmada matematiksel düşüncenin oluşum sürecini, özel değerler için durumu test etme (özelleştirme) , genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamaları üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu aşamaların seçilmesinin sebebi, tüm bileşenlerin tek bir çalışmada incelenebilmesinin güç olması ve araştırmacıların tanımladıkları matematiksel düşünme süreçlerinin birbiri içinde yer alıp bazılarının eş anlamlı kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Bu seçim, diğer bileşenlerin reddedilmesi anlamına gelmemektedir. Çalışmamızda üzerinde duracağımız bileşenler aşağıda açıklanmıştır.

Özel Değerler İçin Durumu Test Etme (Özelleştirme)

Özelleştirme, bir problem durumunu anlamak ve anlamlandırabilmek için belli ya da sistematik örnekleri seçmek ve problem üzerinde bu örnekleri inceleme anlamına gelmektedir. Özel değerler için durumu test etme tümevarımsal yaklaşım için bir başlangıç noktası olabilir (Burton, 1984). Özelleştirmede bir veya daha fazla örnek seçme, örnekler verme, bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, çizme gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010).

Genelleme

Genelleme yapma, öğrencilerin matematiksel düşünme ve problem çözme yoluyla elde ettiği sonuçların etki alanını ya da birkaç örnekten hareketle sonuçları daha genel ve daha geniş uygulanabilir olarak yeniden ifade edilmesi, genişletmesi olarak tanımlanmaktadır (Stacey, Burton, Mason, 1985; TIMMS,2003). Genelleme matematiksel sürecin merkezi sayılabilir. Genelleme ile özel durumlar için yapılan gözlemler genişletilerek genel

bir kural olarak ifade edilmektedir. Öğrencilerin genelleme yapmalarını sağlayacak bazı stratejiler: ilişkileri belirleme, varsayımları test etmek için örnekler oluşturma, mümkün olduğu kadar fazla sayıda ve çeşitlilikte örnekler toplama, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, aynı sonuca ulaşılan denemeleri belirleme ve benzer bir deneme yapma, varsayımlar ortaya koymadır (Bell, 1976; Akt. Pilten, 2008). Matematiksel genellemelerde belli sayıdaki adımlardan hareketle iddia hakkında karar verilmeye çalışılır. Bazı durumlarda genellemeye ulaşmak için iki üç adım yeterli olabilirken, bazı durumlarda ise sonlu sayıdaki adımların denenmesi genelleme yapmak için yeterli olmayabilir (Baki, 2006). Bu durum, genelleme sırasında özelleştirme işleminin de yapıldığını göstermektedir. (Arslan ve Yıldız, 2010)

Varsayımda Bulunma

Varsayım; deneye kanıtlanmamış olmakla birlikte kanıtlanabileceği umulan yargıdır (Karasar, 2006). Yargıda bulunmadan önce yeterli sayıda örnek incelenip bu örneklerdeki mevcut bağlantılar ve örüntüler keşfedilir, kanıtlama yolunda ise keşfedilen örüntülerden yola çıkarak bir yargıya varma sürecidir (Burton,1984).

İspatlama

Bir iddianın doğruluğunu araştırma, niçin doğru olduğunu açıklama ve genelleme koşullarını kontrol etme aşamalarından oluşan bir süreçtir. Bir başka deyişle iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliğinin gösterilmesi süreci olarak tanımlanabilir (Baki, 2006). İspat yapma ana hatlarıyla tümevarım ve tümdengelim olmak üzere iki yoldan yapılabilir. Tümdengelim de kendi içinde doğrudan ispat, olmayana ergi, çelişki bulma gibi adlarla çeşitli yollara ayrılır (Çallıalp, 1999). Matematiksel ispatların iki amacı olup, birincisi varsayımın mantıklı adımların sıralanışı ile bir sona götürdüğünü göstermektir. İkinci amacı ise varsayımdan sonuca neden ve nasıl gidildiğini anlamak ve anlatabilmektir.

Matematiksel düşünme temelde günlük düşünme biçiminden farklı bir düşünme biçimi olmayıp, düşünmenin belli bir yöne doğru ilerlemesidir. Matematiksel düşünce, bir sorun ya da problemi çözme uğraşı içerisinde doğruya ulaşma çabasıdır (Yıldırım, 2010). Hacısalihoğlu ve arkadaşları (2003), matematiksel düşünce becerisinin, problemle uğraşarak, uğraşma çabaları sırasında gerçekleşen deneyimler ve deneyimler üzerinde düşünerek, tasarlanan bir problem sürecini çalışma gibi çeşitli aktivitelerle geliştirilebildiğini belirtmiştir. Hendersen (2002), matematiksel düşünmenin, problemler üzerinde açık ya da açık olmayarak matematiksel süreçlerin uygulanması olduğunu belirtmiştir. Buradan problem çözmenin matematiksel düşüncenin gelişiminde temel süreç olduğu anlaşılmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, sekizinci sınıf ve on birinci sınıf öğrencilerinde matematiksel düşüncenin, üzerinde durulan bileşenler açısından nasıl ve hangi aşamasına kadar gerçekleştiğini ve iki sınıf düzeyi arasında matematiksel düşünme düzeylerinin ne gibi farklılıklar gösterdiğini ortaya koymaktır. Böylece, Öğrenme faaliyetlerinde ve problem çözme sürecinde öğrencilerin nasıl bir düşünme biçimine sahip olduklarının belirlenmesi, onların nasıl öğrendikleri hakkında bir takım bilgiler verecektir. Ayrıca, farklı sınıf düzeylerinde gerçekleşen matematiksel düşünme biçimlerindeki farklılıklarının belirlenmesi ise, eğitim faaliyetlerinin hangi düzeyde ve nasıl verilmesi gerektiği ve öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin gelişiminin incelenmesini sağlayacaktır. Öğrencilerin bir sorun ya da problemi çözerken hangi matematiksel düşünmenin hangi aşamasına kadar gelebildiği o sınıf düzeyine uygun ünite ya da problem yapısını belirleme ve düşünce

yapılarının incelenmesi ile hangi aşamada sorun yaşadıklarının belirlenmesi, problem çözerken yaşadıkları sorunun ana kaynağını belirleme de yol gösterici olacaktır.

YÖNTEM

Araştırma makalelerinde bu bölümde yöntem kısmı yer almalı ve aşağıda belirtilen hususlar dikkate Bu çalışmada, nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Nitel araştırma bir duruma dâhil olan bireylerin algıların ya da olayların doğal ortamda gerçekçi bir şekilde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma yöntemi olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Çalışma Grubu

Çalışma grubunu, 2010-2011 öğretim yılında Afyonkarahisar'daki bir ilköğretim okulunun 8. sınıfına devam eden 14 ve bir lisenin 11. sınıfına devam eden 11 öğrenci oluşturmaktadır. Bu çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örnekleme yoluyla seçilmiştir. Yıldırım ve Şimşek (2006)'e göre bu örnekleme yöntemi yakın ve ulaşılması kolay olan bir durum seçilerek yapılır.

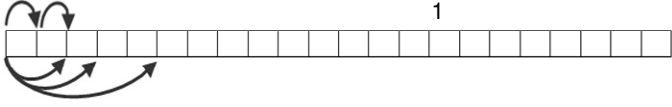
Çalışma grubuna dahil olan öğrenciler tamamen gönüllülük esasına göre seçilmiştir. Sınıf düzeylerinin seçiminde, bilimsel araştırmanın tekrar edilebilirlik ilkesinden hareketle, Arslan ve Yıldız (2010) tarafından yapılan çalışmanın farklı bir örnekleme uygulanması amacıyla 11. Sınıf öğrencileri seçilmiştir. 8. Sınıf düzeyi ise, öğretim kademeleri arasındaki farkın belirlenmesi amacıyla seçilmiştir.

Veri Toplama Araçları


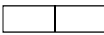

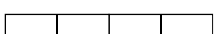
Bu çalışmada veriler araştırmacılar tarafından hazırlanan iki çalışma yaprağı ve uygulama sırasında yapılan yapılandırılmamış gözlemler yolu ile toplanmıştır. Her bir çalışma yaprağı bir soru ve bu sorunun cevaplanabilmesi ve matematiksel düşünmenin aşamalarının görülebilmesi için 4 alt soru ile desteklenmiştir. Her bir çalışma yaprağındaki soruların bu çalışmada ele alınan matematiksel düşünmenin aşamalarındaki davranışları ortaya koyulabilecek nitelikte düzenlenmiştir. Çalışma yapraklarındaki 1. sorular, özel değerleri için durumu test etme (özelleştirme), 2. sorular genelme, 3. sorular varsayımda bulunma ve 4. sorular ise ispat ile ilgilidir. Soruların belirlenen aşamalara yönelik olduğu kanaatine matematik eğitiminde uzman akademisyenlerin görüşleri neticesinde varılmıştır. Aşağıda çalışma yapraklarından bir tanesi örnek olarak verilmiştir.

Şekil 1 - Çalışma Yaprağı 1 (Ç1)

Grup Elemanları:
Şekildeki gibi yan yana sıralanmış 22 küçük dikdörtgenden elde edilen şekilde kaç dikdörtgen vardır?



Bu soruyu cevaplamak için ilk önce aşağıdaki sorulara cevap veriniz.

Yan yana sıralanmış dikdörtgen sayısı	Elde edilen şekildeki toplam dikdörtgen sayısı
	1
	3
	?
	?

1. Yukarıda bir ve iki dikdörtgenden elde edilen şekil için oluşan dikdörtgen sayıları verilmiştir. 3 ve 4 dikdörtgenden oluşan şekillerdeki toplam dikdörtgen sayılarını hesaplayınız.
2. Şekilleri oluşturan dikdörtgen sayıları arttıkça oluşan toplam dikdörtgen sayılarının oluşturduğu örüntüyü matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz? Yazınız.
3. Oluşan dikdörtgen sayıları ile ilgili bir varsayımda bulunacak ve yukarıdaki şekildeki 22 dikdörtgenden oluşan şekil için bu varsayımı doğrulayacak işlemi yazınız.
4. n tane dikdörtgenden oluşan şekildeki toplam dikdörtgen sayısını bir formülle ifade ediniz? Matematiksel olarak bu formülü doğrulayacak/ispatalayacak işlemi yazınız.

Hazırlanan çalışma yapraklarının uygulanabilirliğini test etmek için 8. ve 11. sınıf öğrencileriyle pilot çalışma yapıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapıp sorular için gerek süre belirlenmiştir. Asıl uygulama için öğrencilere 1 ders saati süre verilmiştir. Öğrencilerden 2 şerli gruplar halinde çalışmalarını istenmiştir.

Verilerin Analizi

Çalışma yapraklarının incelenmesinden elde edilen veriler, betimsel analiz kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Betimsel analizde temelde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayacağı bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır. Bu amaçla elde edilen veriler sistematik bir biçimde betimlendikten sonra bu betimlemeler açıklanır, yorumlanır ve bir takım sonuçlara ulaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Matematiksel düşünmenin aşamalarındaki öğrenci davranışlarını incelenmesinin amaçlandığı çalışma yapraklarından elde edilen veriler de betimsel analiz yöntemiyle analiz edilmiştir. Verilerin analizi için yapılan işlemler aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

1. Verilerin analizine başlamadan önce verilmesi beklenen muhtemel cevapları içeren bir cevap anahtarı hazırlanmıştır.
2. İki çalışma yaprağındaki her bir soruya her bir 8. ve 11. Sınıf öğrenci grubunun verdiği yazılı cevaplar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Öncelikle verilen cevapların tümü analiz edilerek söylenen her bir kelimenin anlamına odaklanılarak öğrencilerin nasıl akıl yürüttükleri üzerinde durulmuştur.

3. Her bir öğrencinin cevabı sınıf seviyeleri gözetilerek 2 çalışma yaprağındaki tüm sorular için ayrı ayrı kodlanmıştır.
4. Öğrencilerin cevapları benzerliklerine göre düzenlenmiş ve daha genel kategoriler elde edilmiştir.
5. Kodlamanın güvenilirliği açısından tüm öğrenci cevapları araştırmacılar tarafından ayrı ayrı incelenmiştir.
6. Birbiriyle uyumsuz kodlamalar için çalışma yaprakları araştırmacılar tarafından tekrar birlikte incelenip kodlama konusunda görüş birliğine varılmıştır.
7. Araştırmanın geçerliği konusunda da dış geçerliği sağlamada betimsel analizin temel özelliklerinden doğrudan alıntılar yapma ve verileri ayrıntılı yorumlayarak sağlanmıştır.

Sınırlılıklar

Bu çalışmada hazırlanan çalışma yapraklarındaki sorular sadece matematiksel düşünmenin belirlenen aşamalarına yönelik olarak hazırlanıp o aşamalarda öğrenci davranışlarını incelemeye yöneliktir. Ayrıca bu çalışma Afyonkarahisar İlinde 14 sekizinci sınıf, 11 on birinci sınıf öğrencisi ile sınırlıdır.

BULGULAR

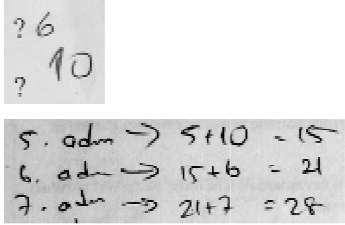
Bu bölümde matematiksel düşünmenin belirlenen özel değerler için durumu test etme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat aşamaları ile ilgili 8.ve 11 sınıf öğrencilerinin çalışma yapraklarındaki sorulara verdikleri cevapların analizi sonucunda ulaşılan bulgulara yer verilmiştir.

Özel Değerler İçin Durumu Test Etme

Çalışma yapraklarının birinci soruları özel değerler için durumu test etme ile ilgilidir. Bu sorular sırasıyla (Ç1S1) “ bir ve iki dikdörtgenden elde edilen şekil için oluşan dikdörtgen sayıları verilmesi ve 3 ve 4 dikdörtgenden oluşan şekillerdeki toplam dikdörtgen sayılarının bulunması” ve (Ç2S2) satranç tahtasındaki toplam kare sayısı probleminde ise “1x1,2x2,3x3 ‘lük tahtalardaki kare sayıları verilmiş olup, 4x4 değeri için kaç kare olduğunun bulunması” şeklindedir.

Bu aşamadaki davranışlar öğrenci cevaplarından hareketle 2 kod altında toplanmıştır. Bunlardan ilki Kod1; istenilenleri özel durum için doğru bilme ve Kod2, verilen değerler için yanlış sonuçlar bulma ya da soruyu boş bırakma şeklindedir. Aşağıdaki tabloda özel değerler için durumu test etme basamağı ile ilgili kodlar, 8 ve 11. sınıf öğrencilerinin bu kodlara uygun verdikleri cevap sayıları ve örnek cevaplar verilmiştir.

Tablo 1 - Özel Değerler İçin Durumu Test Etme (Özelleştirme)

		8. sınıf	11. sınıf	Örnek cevaplar
Kod1				
İstenilenleri özel durum için doğru bilme	Ç1 S1	11	10	

	Ç2	10	10	?30	
	S1				$(4.4) + (3.3) + (2.2) + 1 = 30$
Kod2					
Verilen değerler için yanlış sonuçlar bulma ya da soruyu boş bırakma	Ç1	3	1	?6	85
	S1			?8	87
	Ç2	4	1	?25	21
	S1				

Yukarıdaki tablo incelendiğinde bu basamakta öğrencilerin pek de sorun yaşadıkları söylenemez. 8 ve 11 sınıfları karşılaştırılacak olursak; 8. sınıflardan Ç1S1 için 3 öğrenci grubu, Ç2S2 İçin ise 4 öğrenci grubunun verilen değerler için yanlış sonuçlar buldukları ya da soruları boş bıraktıkları görülmektedir. Bu sayılar her iki soru için 11.sınıflarda sadece bir öğrenci grubu ile sınırlıdır. Bu bize 8. sınıfların bu aşamada biraz daha zorlandıklarını fakat genel anlamda her iki grubunda özel değerler için durumu test etme aşamasında zorlanmadıklarını ortaya koymaktadır. Ayrıca Ç1S1 örnek cevabında görüldüğü gibi bazı öğrencilerin bir genellemeye ulaşabilmek için verilen değerler dışında da özel değerler için durumu test ettikleri görülmektedir.

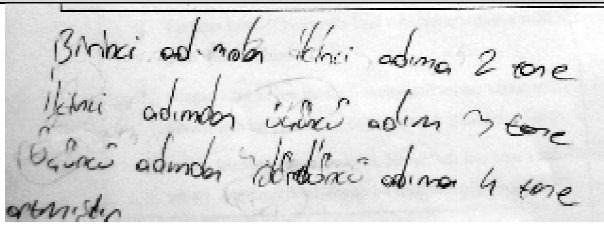
Genelleme

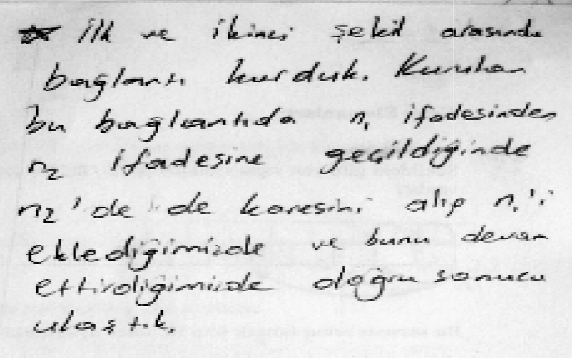
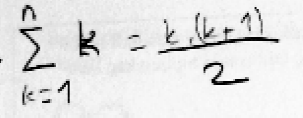
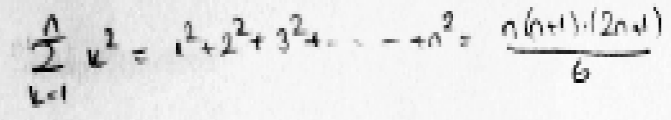
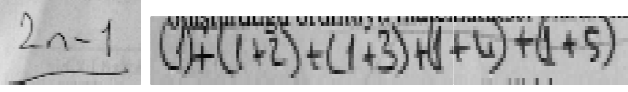
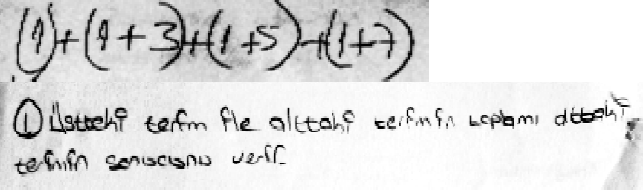
Çalışma yapraklarının ikinci soruları genelleme aşaması ile ilgili olup (Ç1S2), bu sorular sırasıyla şekilleri oluşturan dikkörtgen sayıları arttıkça oluşan toplam dikkörtgen sayılarının oluşturduğu örüntüyü matematiksel olarak nasıl ifade edileceğini yazılması ve tahtaların büyüdükçe artan kare sayılarının oluşturduğu örüntüyü matematiksel olarak nasıl ifade edileceği sorularıdır (Ç2S2).

Genelleme aşaması için elde edilen öğrenci cevapları 4 kod altında toplanmıştır. Bunlar; Kod1: Sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade etme, Kod2: Sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etme, Kod3: Sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel veya matematiksel olarak yanlış ifade etme, Kod4: Soruyu boş bırakanlar olarak belirlenmiştir.

Aşağıda genelleme basamağı ile ilgili kodlar, 8 ve 11. sınıf öğrencilerinin bu kodlara uygun verdikleri cevap sayıları ve örnek cevaplar verilmiştir.

Tablo 2 - Genelleme

	8. sınıf	11. sınıf	Örnek cevaplar
Kod1			
Sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade	Ç1	2	1
	S2		
			

etme				
	Ç2	0	1	
	S2			
Kod2				
Sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etme				
	Ç1	0	5	
	S2			
	Ç2	0	4	
	S2			
Kod3				
Sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi sözel veya matematiksel olarak yanlış ifade etme				
	Ç1	1	1	
	S2			
	Ç2	1	1	
	S2			
Kod4				
Soruyu cevapsız bırakma	Ç1	11	4	
	S2			
	Ç2	13	5	
	S2			

Yukarıdaki Tablo incelendiğinde 8 sınıf öğrencilerinin tamamına yakınının bir genelleme yapmaktan kaçındıkları ve soruları boş bırakmayı tercih ettikleri görülmektedir. Bu bize 8. Sınıf öğrencilerinin birkaç örnekten hareketle sonuçları daha genel ve daha geniş uygulanabilir olarak yeniden ifade etmede zorlandıklarını göstermektedir. 11. Sınıf öğrencilerinin ise sözel olarak genelleme de bulunmaktan çok sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etme de taraf oldukları söylenebilir.

Varsayımda Bulunma

Çalışma yapraklarının üçüncü soruları varsayımda bulunma aşaması ile ilgili olup bu sorular sırasıyla (Ç1S3) Oluşan dikdörtgen sayıları ile ilgili bir varsayımda bulunması ve verilen 22 dikdörtgenden oluşan şekil için bu

varsayımı doğrulayacak işlemi yazmaları ve (Ç2S3) oluşan kare sayısı ile ilgili matematiksel bir varsayımda bulunmaları ve 8x8'lik satranç tahtası için bu varsayımı doğrulayacak işlemleri yazmaları sorularıdır.

Varsayımda bulunma aşamasından elde edilen öğrenci cevapları 3 kod altında toplanmıştır. Öğrencilerin sözel olarak varsayımda bulunmaları kod1, matematiksel olarak varsayımda bulunmaları kod2, soruları cevapsız bırakmaları kod3 olarak belirlenmiştir.

Aşağıda varsayımda bulunma basamağı ile ilgili kodlar, 8 ve 11. sınıf öğrencilerinin bu kodlara uygun verdikleri cevap sayıları ve örnek cevaplar verilmiştir.

Tablo 3 - Varsayımda Bulunma

		8. sınıf	11. sınıf	Örnek cevaplar
Kod1				
Sözel olarak varsayımda bulunma	Ç1 S2	2	1	Bir önce terimle bir sonraki terimin toplamı sonucu veriyor
	Ç2 S2	1	1	<p>3- Birer tane kare alırsak 64 karedir. kareleri birim olanlardan 2'sali aldığımız için her kareden ikiser tane çıkarırız. 7.7'den üç tane 4'lü vardır. Aynı maddede 9'lu karelerden 6.6'dan 36 tane vb. ... en son büyük karede 1 tane vardır. Yani kareler toplamı $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2$ şeklinde bulunur</p>
Kod2				
		8. sınıf	11. sınıf	Örnek cevaplar
Matematiksel olarak varsayımda bulunma	Ç1 S2	0	6	$\sum_{k=1}^n k = \frac{k(k+1)}{2}$
	Ç2 S2	0	4	$\frac{n}{2} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Kod3				
Soruları cevapsız bırakmaları	Ç1 S2	12	4	
	Ç2 S2	13	6	

Tablo incelendiğinde grupların daha çok sözel varsayımda bulunmayı tercih ettikleri görülmektedir. Matematiksel varsayımda bulunmada, her iki grupta da sıkıntı vardır. Fakat 8. sınıflarda bu sıkıntı daha da artmaktadır. 8. Sınıf grubunda matematiksel olarak varsayımda bulunabilen öğrenci grubu çıkmamış olup bu grup daha çok sözel olarak varsayımda bulunma eğilimindedirler. Yinede 8. sınıf grubunun yarısından fazlası varsayımda bulunma aşamasına gelememişlerdir. 11. Sınıf grubunda ise sözel varsayımdan çok matematiksel olarak varsayımda bulunma eğilimi vardır. Fakat özeleştirme ve genelleme aşamaları ile karşılaştığında sorulara cevap veren grup sayılarında düşüş gözlemlenmiştir. Ayrıca çalışma yapraklarının uygulanması sırasında öğrenciler varsayımda bulunma ve genelleme aşamalarını birbirinden ayırmakta güçlük çekmişler ve bu konuda yardım istemişlerdir. Bu gözlem genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarının bulgularını da destekler niteliktedir.

Varsayımda bulunma ve genelleme aşamaları öğrencilerin zorlanmalarından da anlaşılacağı gibi benzer aşamalar gibi görünmektedir. Genelleme, temelde bir örnekten hareketle geniş örnek kümesi ile ilgili tahminde bulunmayı içerirken, varsayımda bulunma, daha üst düzey aşama olarak bulunulan tahminin doğruluğunu test etmeyi içeren dögüsel bir süreçtir (Stacey, vd. 1985). Aynı aşamalar olmamakla birlikte birbirine çok yakın ve birbirini tamamlayıcı nitelikteki aşamalardır.

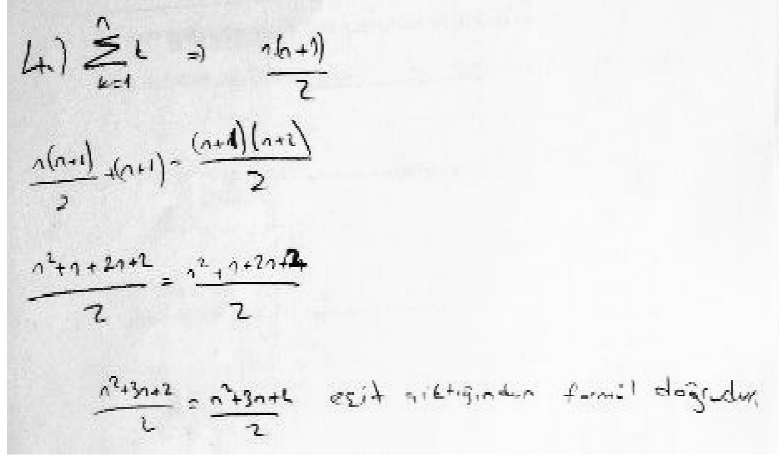
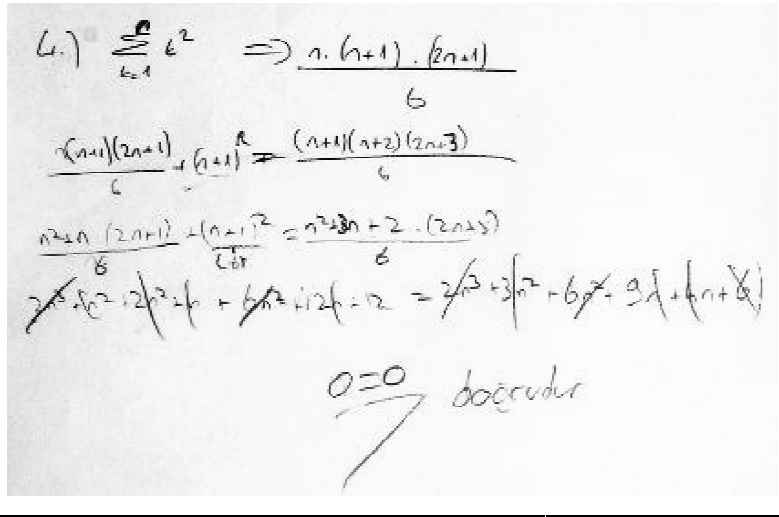
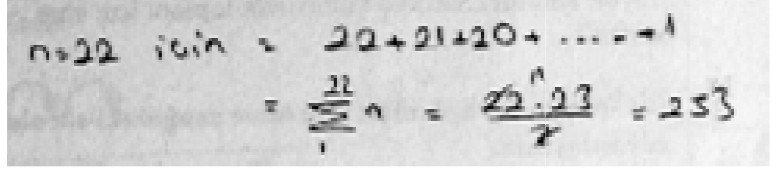
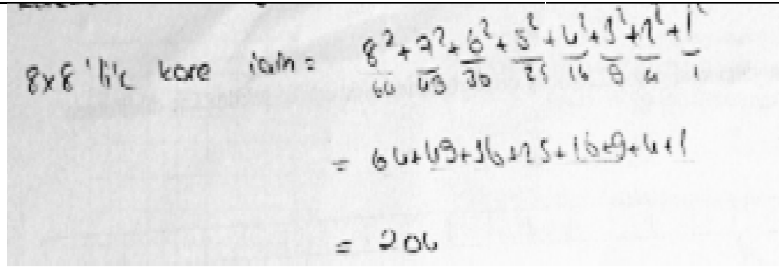
İspat

Çalışma yapraklarının dördüncü soruları ispat aşaması ile ilgili olup bu sorular sırasıyla (Ç1S4) “n tane dikdörtgenden oluşan şekildeki toplam dikdörtgen sayısını bir formülle ifade edilip, matematiksel olarak bu formülü doğrulayacak/ispatlayacak işlemi yazmaları” ve (Ç2S4) “ n tane kareden oluşan $n \times n$ 'lik bir tahtada oluşacak kare sayısı, bunun formülle ifade edilmesi, matematiksel olarak bu formülü doğrulayacak/ispatlayacak işlemi yazılması” sorularıdır.

İspat aşamasından elde edilen öğrenci cevapları üç kod altında toplanmıştır. Kod1: cebirsel ispat (tümevarımla), Kod2: aritmetik ispat, Kod3 ise cevapsız bırakılan sorular olarak belirlenmiştir.

Aşağıda ispat basamağı ile ilgili kodlar, 8 ve 11. sınıf öğrencilerinin bu kodlara uygun verdikleri cevap sayıları ve örnek cevaplar verilmiştir.

Tablo 4 - İspat

		8. sınıf	11. sınıf	Örnek cevaplar
Kod1				
Cebirsel İspat yapma (tüme varımla)	Ç1 S2	0	4	 <p> $4.) \sum_{k=1}^n k \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$ $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2}$ $\frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} \text{ eşitlikten dolayı formül doğrudur}$ </p>
	Ç2 S2	0	3	 <p> $4.) \sum_{k=1}^n k^2 \Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ $\frac{n^2+n}{6} \cdot (2n+1) + \frac{(n+1)^2}{6} = \frac{n^2+3n+2}{6} \cdot (2n+3)$ $\cancel{2} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6} + \cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} = \cancel{2} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{3} + \cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}$ $0=0 \text{ doğrudur}$ </p>
		8. sınıf	11. sınıf	Örnek cevaplar
Kod2				
Aritmetik İspat (Değişkene değer vererek)	Ç1 S2	0	1	 <p> $n=22 \text{ için } = 22+21+20+\dots+1$ $= \frac{22}{2} \cdot 23 = \frac{22 \cdot 23}{2} = 253$ </p>
	Ç2 S2	0	1	 <p> $8 \times 8 \text{ 'li}' \text{ kare için } = 8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$ $= 64+49+36+25+16+9+4+1$ $= 206$ </p>

Kod3				
Soruları	Ç1	14	6	
cevapsız bırakmaları	S2			
	Ç2	14	7	
	S2			

Yukarıdaki tablo incelendiğinde, gruplardan 8. sınıfların ispatlama aşamasına kadar gelemedikleri bu aşama ile ilgili soruları boş bıraktıkları gözlemlenmiştir. 11. sınıflarda ise cebirsel ispat yapmada aritmetik ispata göre daha başarılı oldukları fakat genel olarak grubun yarısından azının bu aşama ile ilgili soruları cevaplamaya çalıştıkları diğer grupların ise ispat ile ilgili soruları cevapsız bıraktıkları gözlemlenmiştir.

TARTIŞMA ve SONUÇ

Gruplardaki öğrencilerin çalışma yapraklarının özelleştirme ile ilgili sorularını yapmada sıkıntı çekmemeleri matematik derslerinin işlenirken hem ilköğretim hem ortaöğretimde işlemsel bilgiye yönelik çalışmaların üzerinde durulduğunu göstermektedir. Özelleştirme basamağından sonra genelleme basamağını bazı öğrenciler atlayıp varsayımda bulunma aşamasına geçmişlerdir. Genelleme ve sonrasında varsayımda bulunma aşamasında sırasıyla bir önceki aşamaya göre başarı düşmüş olup 11. sınıf öğrencileri genelde belirtilen süreçlerde daha başarılıdır. 8. sınıf öğrencileri ise bu aşamalardaki sorulara daha çok sözel olarak cevap verme eğiliminde oldukları gözlemlenmiştir. Bu durum 8. sınıf öğrencilerinin bir durumu matematiksel olarak ifade etmede 11. sınıf öğrencilerine göre daha çok zorlandıklarını göstermektedir. Öğrencilerin bu konuda sıkıntı yaşamaları Arslan ve Yıldız (2010) ile Uğurel ve Morali (2010) çalışmaları ile paralellik göstermektedir.

Bulgular genel olarak ele alındığında 8. sınıf grubunun daha çok olmakla birlikte her iki grubunda ispat aşamasına doğru ilerledikçe başarılarının düştüğü, kendilerini hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmekte zorlandıkları görülmüştür. Fakat benzer gruplarda ispatı konu edinen bazı araştırmalar incelendiğinde bu çalışmanın sonuçlarının farklılaştığı gözlemlenmektedir.

Lise öğrencileri üzerinde yapılan çalışmalarda (Özer ve Arıkan, 2002; Arslan ve Yıldız, 2010) öğrencilerin varsayımları özel sayısal değerlerle aritmetik olarak ispat etmeye çalıştıkları ve cebirsel ispattan kaçındıkları bulgusu elde edilmiş ve buna gerekçe olarak öğrencilerin cebirsel ispat yapmak yerine özel bazı sayısal örneklere bağlı yaklaşımlarda bulunmalarının sonuçta doğru ve geçerli bir ispatın geliştirilmesini engellemektedir görüşü savunulmuştur. Bu çalışmada ise aksi bir durum söz konusudur. İspat yapan 11. Sınıf öğrenci gruplarının daha çok cebirsel ispata yöneldikleri gözlemlenmiştir. Bunun nedeni çalışma yapılan 11. sınıf öğrencilerinin başarı düzeyi yüksek bir lisenin öğrencileri olmasından kaynaklanıyor olabilir. İlköğretim ve ortaöğretim programlarında matematiksel düşünme süreçlerinin önemi vurgulanmakta olmasına rağmen bu süreçlerin öğrencilerdeki gelişiminin işlevselliğini ortaya koyacak çalışmalara ayrıca öğrencilerin bu süreçleri öğrencilere yaşatacak olan öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin matematiksel düşüncenin aşamalarındaki yaşantılarını daha iyi anlayabilmek için yukarıda sayılan çeşitli gruplarda matematiksel düşüncenin aşamalarını konu edinecek çalışmalara ihtiyaç olduğu düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Alkan, H., Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen Adaylarında Matematiksel Düşüncenin Gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3), 221-236.
- Altun, M. (2008). İlköğretim İkinci Kademe (6, 7 ve 8. Sınıflarda) Matematik Öğretimi (5. Baskı). *Bursa: Alfa Aktüel Yayınları*.
- Arslan, S., Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156).
- Baki, A. (2006). Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi. *Trabzon: Derya*.
- Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal of Researching Mathematics Education*, Vol. 15(1), 35-49.
- Çallıalp, F. (1999). Örnekler İle Soyut Matematik (3. Baskı), *İstanbul: Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Yayınları*.
- Dunlap, J. (2001). *Mathematical Thinking*.
<<http://www.mste.uiuc.edu/courses/ci431sp02/students/jdunlap/WhitePaperII.doc>> (2011, Mayıs 4)
- Greenwood, J. J. (1993). Teaching and Assessing Mathematical Power and Mathematical Thinking, *The Arithmetic Teacher*, Nov 1993, 41,3: ProQuest Education Complete pg.144.
- Ferri, R. B. (2003). *Mathematical Thinking Styles- An Empirical Study*.
<http://www.dm.unipi.it/clusterpages/didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_BorromeoFerri_cerme3.pdf> (2011, Mayıs 4)
- Hacisalihoğlu, H. H., Mirasyedioğlu, Ş., Akpınar, A. (2003). Matematik Öğretimi (1. Baskı), *Ankara: Asil Yayın Dağıtım*.
- Henderson, P. (2002). *Materials Development In Support Of Mathematical Thinking*.
<<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=783001>> (2011, Nisan 22).
- Karasar, N. (2006). Bilimsel Araştırma Yöntemi. *Ankara: Nobel*.
- Liu, P. H. (2003). Do Teachers Need To Incorporate The History Of Mathematics In Their Teaching?, *The Mathematics Teacher*, 96(6), 416.
- Lutfiyya, L. A. (1998). Mathematical Thinking Of High School Students In Nebraska. *International Journal of Mathematics Education and Science Technology*. Vol. 29 (1), 55 – 64.
- Özer, Ö., Arıkan, A. (2002). Eylül. Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapma düzeyleri. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, *Orta Doğu Teknik Üniversitesi*, Ankara.
- Pilten, P. (2008). Üst Biliş Stratejileri Öğretiminin İlköğretim 5. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Muhakeme Becerilerine Etkisi. Yayınlanmamış Doktora Tezi. *Ankara: G.Ü Eğitim Bilimleri Enstitüsü*.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371). *New York: Macmillan*.
- Stacey, K., Burton, L., Mason, J. (1985). Thinking Mathematically. *England: Addison-Wesley Publishers*.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?, Conference of the University of Chicago School Mathematics Project.

Tall, D. (2002). Advanced Mathematical Thinking. USA: Kluwer Academic Publishers.

TIMSS. (2003). IEA's TIMSS 2003 International Report on Achievement in the Mathematics Cognitive Domains: Findings from a Developmental Project International Association for the Evaluation of Educational Achievement. TIMSS & PIRLS International Study Lynch School of Education, Boston College.

Uğurel, I., Moralı, S. (2010). Bir Ortaöğretim Matematik Dersindeki İspat Yapma Etkinliğine Yönelik Sınıfçı Tartışma Sürecine Öğrenci Söylemleri Çerçevesinde Yakından Bakış, *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28: 134-154.

Umay, A. (2003). Matematiksel Muhakeme Yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.

Yıldırım, A., ŞİMŞEK, H. (2006). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri. Ankara: Seçkin.

Yıldırım, C. (2010). Matematiksel Düşünme (6. Baskı). İstanbul: Remzi Kitabevi.

SUMMARY

The aim of this study is to investigate the experience differences of eight and eleven grade students' related to specializing, generalizing, conjecturing and proving stages of mathematical thinking. For that purpose, two worksheets were performed that included mathematical thinking stages to 14 eight and 11 eleven grade students. The data structure was analyzed with descriptive analysis. Qualitative research is defined as research method that is followed qualitative process intended to expose individuals' perceptions or the incidents as realistic in native atmosphere (Yıldırım and Şimşek, 2006). The study's research group was elected by the way of easily reachable state sample method that is the one of the purposive sampling methods. According to Yıldırım and Şimşek (2006), this sample method is performed by elected a close and easy to reach case. Students who are involved in the working group have been selected on the basis of voluntary participation. According to Yıldırım and Şimşek (2006), this sampling method is used by electing a close and easy to reach case. Students who are involved in the working group have been selected on the basis of voluntary participation. Selection of grade levels of scientific research with the principle of reproducibility, 11 grade students were selected with the aim of a different sampling implementation of made investigation by Arslan and Yıldız (2010). As for that 8 grade level was selected for the determine the differences between instructional grade.

The data were gathered through two worksheets made by investigators and through unstructured observations in course of practice. Each worksheet was supported with one question and four sub-questions to receive a reply to this question and to observe mathematical thinking levels. Questions were regulated that reveals the behaviors in mathematical thinking levels that addressed in this research. As a result of the opinions of scholars specialized in mathematics education has been concluded that the questions are on the mathematical thinking levels. In order to determine the applicability of worksheets after the pilot study with for eight and eleventh grade students were made arrangements and were determined required time for the questions. For the actual implementation it was given duration a lesson. Students are asked to work in groups of two. Data are observed by descriptive analysis method. Descriptive analysis basically brings together data that similar to each other within the framework of specific themes as regulates that reader can understand and comments. Data which were obtained for this purpose were systematically described then; these descriptions were clarified, were commented and got some results (Yıldırım and Şimşek, 2006).

According to evidences that obtained through the answers regarding the determined levels of mathematical thinking, students had a troubled with the first questions of the worksheets regarding examined the condition for special values. Even though eight grade students had difficulty in this stage, in general terms both groups were not forced by further.

According to the second questions about the generalization level, almost all of the eight grade students are avoided from making a generalization and preferred to leave questions blank. This is demonstrated us the eight year students forced by in expressing the results that starting from several samples again as more general and broader applicable. Eleventh grade students preferred to express mathematically relationship between numbers or variables rather than generalized as verbal.

According to the third questions about the hypothesize level, it seen that groups prefer to assume that they are more verbal. Both groups have problems about mathematical assumption level. However the problems increase at eight grade levels. More than half of the eight grade students could not reach the level of assumption. Eleven

grade students had tendency of mathematically assumption rather than verbal assumption. However it was observed decline number of group who answered the question when encountered with privatization and generalization levels.

According to fourth questions regarding proof level, it was observed that eight grade students could not move up to this point and left blank the questions. However eleventh grade students achieved algebraic proof more than arithmetical proof but in general it was observed less than half of the groups trying to answer the questions but the other groups left blank the questions about this level.

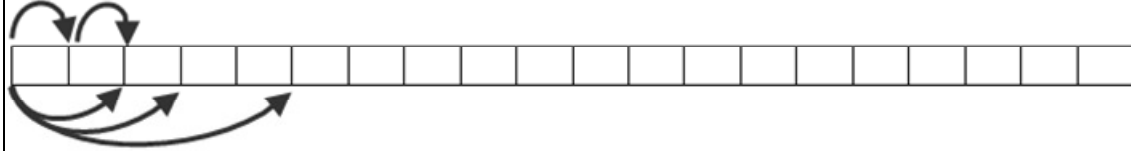
According to findings, it is adduced that not to be down in the dumps in connection with privatization of students' worksheets and while math classes were being studied, both primary and secondary school it is emphasized on operational knowledge. After the privatization level certain students skipped the generalization level to assumption level. Generalization level and after it at the assumption level respectively achievement decreased so far as the preceding one. Current state demonstrates that eight grade students are forced as expressing a case mathematically rather than eleventh grade. The students have trouble with it shows parallels with the work of Arslan and Yıldız (2010) with Uğurel and Moralı (2010).

In general it was observed that either groups achievement decrease as proceeding while findings were dealt and that they are forced while expressing themselves both mathematically and verbal. However it was observed in similar groups when is inspected certain research that had proof as a subject that this research findings differentiate.

It was observed that eleventh grade students groups who prove more tended to algebraic prove. This is because under study eleventh grade of high school students may be due to a high level of achievement for the students. Despite the fact that emphasized the importance of the processes of mathematical thinking processes in primary and secondary school curriculum, it is required that studies which betray students' development and functionality. Additionally it is thought that studies which should be raised about mathematical thinking levels to be able to understand mathematical thinking levels related to applicant and teachers who will perpetuate these processes to the students.

EK 1:**ÇALIŞMA YAPRAĞI 1****Grup Elemanları:**



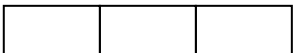
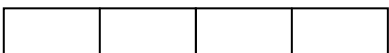
Şekildeki gibi yan yana sıralanmış 22 küçük dikdörtgenden elde edilen şekilde kaç dikdörtgen vardır?



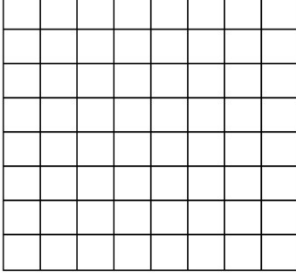
Bu soruyu cevaplamak için ilk önce aşağıdaki sorulara cevap veriniz.

Yan yana sıralanmış dikdörtgen sayısı
toplam dikdörtgen sayısı

Elde edilen şekildeki

	→	1
	→	3
	→	?
	→	?

1. Yukarıda bir ve iki dikdörtgenden elde edilen şekil için oluşan dikdörtgen sayıları verilmiştir. 3 ve 4 dikdörtgenden oluşan şekillerdeki toplam dikdörtgen sayılarını hesaplayınız.
2. Şekilleri oluşturan dikdörtgen sayıları arttıkça oluşan toplam dikdörtgen sayılarının oluşturduğu örüntüyü matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz? Yazınız.
3. Oluşan dikdörtgen sayıları ile ilgili bir varsayımda bulunacak ve yukarıdaki şekildeki 22 dikdörtgenden oluşan şekil için bu varsayımı doğrulayacak işlemi yazınız.
4. n tane dikdörtgenden oluşan şekildeki toplam dikdörtgen sayısını bir formülle ifade ediniz? Matematiksel olarak bu formülü doğrulayacak/ispatalayacak işlemi yazınız.

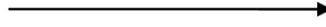
EK 2:**ÇALIŞMA YAPRAĞI 2****Grup Elemanları:**

Satranç tahtası 64 küçük kareden oluşan 8x8 lik bir büyük karedir. Satranç tahtasında toplam kaç kare vardır?

Bu soruyu cevaplamak için önce aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Oluşan kare sayısı

1x1



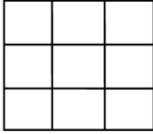
1



2x2



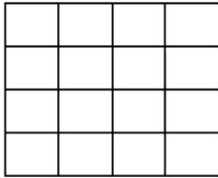
5



3x3



14



4x4



?

1. Yukarıda 4x4'lük bir tahtada kaç kare olduğunu hesaplayınız.
2. Tahtalar büyüdükçe artan kare sayılarının oluşturduğu örüntüyü matematiksel olarak nasıl ifade ediniz?
3. Oluşan kare sayısı ile ilgili matematiksel bir varsayımda bulunun ve 8x8'lik satranç tahtası için bu varsayımı doğrulayacak işlemleri yazınız.
4. n tane kareden oluşan nxn'lik bir tahtada kaç tane kare oluşur? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü doğrulayacak/ispatalayacak işlemi yazınız.