

ÜÇ BOYUTLU HİLBERT DÖNÜŞÜMÜNÜN GRAVİTEDE MODEL VERİLERE UYGULANMASI

Application of Three Dimensional Hilbert Transformation To Gravity Model Data

Nihal BECERİK* ve Rahmi PINAR*

ÖZET

Yapıların yarattığı potansiyel alanların, x, y, z yönlerindeki türevlerine ulaşmak ve buradan hareketle yapı parametreleri hakkında bilgi edinmek amacıyla 3-boyutlu (3-B) Hilbert Dönüşümü kullanılmaktadır. Günümüze değin bu yöntem, manyetik prospeksiyonda, model verilere uygulanmıştır. Bu çalışmada 3-B Hilbert dönüşümünün gravitede uygulanabilirliği araştırılmıştır. Bu amaçla, ilk olarak gravit enokta kaynak potansiyelinin (U) analitik olarak birinci (g_x, g_y, g_z) ve ikinci ($g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}, g_{zx}, g_{zy}, g_{zz}$) bileşenleri elde edilmiştir. Bu bileşenler, gravitede ölçülebilen tek bileşen olan g_z çekim ifadesine 3-B Hilbert Dönüşüm uygulanarak da hesaplanmıştır. Her iki şekilde elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, yöntemin gravite verilerine sağlıklı bir şekilde uygulanabileceği anlaşılmıştır. Daha sonra, eğimli prizmatik yapılar model verisine 3-B Hilbert dönüşümü uygulanmış ve yapı sınırları sağlıklı olarak saptanmıştır. Sonuçta, Laplace diferansiyel denklemi kullanılarak hesaplanan g_{zz} bileşenine (ikinci düşey türev), 3-B Hilbert dönüşümü kullanılarak da ulaşılmıştır. Her iki şekilde hesaplanan g_{zz} bileşenleri karşılaştırıldığında uyum içinde oldukları görülmüştür. Böylece, günümüze değin Laplace diferansiyel denklemi kullanılarak elde edilen g_{zz} bileşenine, 3-B Hilbert dönüşümüyle de ulaşılabileceği ispatlanmıştır.

ABSTRACT

Three Dimensional (3-D) Hilbert Transformation has been applied to reach the derivatives of potential in x, y, z directions, and it is possible to estimate the structural parameters of a body. Up to now, this method has successfully applied to synthetic magnetic data. Applicability of 3-D Hilbert Transformation to gravity problems was explored in this study. To this end, first (g_x, g_y, g_z) and second ($g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}, g_{zx}, g_{zy}, g_{zz}$) derivatives for point source model in gravity were obtained analytically. The same derivatives were also calculated by applying the method of Hilbert Transformation to the gravity force g_z . Then the results obtained from this two approaches were compared. This comparison has shown that 3-D Hilbert Transformation can be successfully applied to gravity problems. 3-D Hilbert Transformation was also applied to the synthetic data of an inclined prismatic structures and the structure boundaries were determined successfully. Finally, g_{zz} (second vertical derivative) components which were calculated through the use of the Laplace differential equation, were also reached with 3-D Hilbert Transformation. As g_{zz} components, obtained by these two different methods, were compared, they were found to be in accord. Therefore, g_{zz} values can also be derived through the 3-D Hilbert Transformation besides the procedures of the Laplace differential equation which has been used up to now.

GİRİŞ

Hilbert dönüşümü elektrik mühendisliği ve sinyal analizinde uzun zamandır uygulanmasına rağmen (Bracewell 1965), jeofizik çalışmalarda ilk olarak 1970'li yıllarda kullanılmaya başlanmıştır. Hilbert dönüşümü yardımıyla potansiyel alanların ölçülemeyen bileşenleri hesaplanabilmekte ve elde edilen bu bileşenlerden de anomaliye neden olan yapının fiziksel parametreleri saptanabilmektedir.

2-boyutlu (2-B) Hilbert dönüşümü ilk olarak, manyetik verilerde yapı parametrelerinin tayini için kullanılmıştır (Nabighian 1972, Green ve Stanley 1975, Stanley ve Green 1976, Rao ve diğ. 1981, Mohan ve diğ. 1982, Rao ve diğ. 1983).

Sismik çalışmalarda, sismik izlerin Hilbert dönüşümü alınarak, sanal bileşene ulaşılır ve hesaplanan bu sanal bileşen ile sismik iz birlikte kullanılarak, karmaşık iz oluşturulur. Karmaşık izden, yansıma kuvveti ve anlık fazlar zaman ortamında saptanarak, jeolojik yapıya ulaşılmaya çalışılır (Taner ve diğ. 1979).

Pınar (1985), Orta Karadeniz bölgesi gravite verilerinin yorumu için 2-B Hilbert dönüşümünü kullanmıştır.

Jeofizikçiler, uzun yıllar boyunca gravite, manyetik ve SP yönteminde, 2-B Hilbert dönüşümünü kullanarak, yapı parametrelerini bulmaya çalışmışlardır. Ancak bu teknik uygulamada, incelenen yapının iki boyutlu potansiyel dağılımı sunması ve değerlendirmede kullanılacak profilin, yapı uzanımına dik doğrultuda alınmış olması koşulu ile sınırlıdır (Nelson 1986).

3-B Hilbert dönüşümü kullanılarak düşey ve yatay bileşenler arasındaki geçiş bağıntıları ilk olarak Nabighian (1984) tarafından verilmiştir. Nabighian (1984), bileşenler arasındaki geçiş bağıntılarını frekans ortamında tanımlamış ve manyetikte gömülü prizmatik bir model veriye 3-B Hilbert dönüşümünü uygulamıştır. Nelson (1986), 3-B Hilbert dönüşüm bağıntılarını uzay ortamında tanımlamış ve dönüşümü, manyetikte küp model verisine uygulamıştır.

Bu çalışmada, manyetik model verilere uygulanan 3-B Hilbert dönüşümünün, gravitede kuramsal verilere uygulanabilirliği araştırılmıştır. Bu amaçla gravitede nokta kaynak potansiyel verisinin g_z çekim ifadesine,

3-B Hilbert dönüşümü uygulanarak ölçülemeyen birinci (g_x, g_y) ve ikinci ($g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}, g_{zx}, g_{zy}, g_{zz}$) bileşenler elde edilmiştir. Aynı zamanda, sözkonusu bileşenler, U nokta kaynak potansiyelinin x, y ve z yönünde analitik türevleri alınarak da hesaplanmıştır. Her iki şekilde elde edilen bileşenler karşılaştırıldığında, iyi bir uyumun varlığı gözlenmiş ve 3-B Hilbert dönüşümünün gravitede başarıyla uygulanabileceği gösterilmiştir. Böylece, gravitede ölçülebilen tek bileşen olan g_z çekim ifadesini kullanarak, ölçülemeyen diğer bileşenlere ulaşmak mümkün olmaktadır.

Bu ispattan sonra, yöntemin anomaliye neden olan yapının sınırlarının tespit edilebilmesindeki uygulanabilirliğini araştırmak amacıyla eğimli prizmatik yapılar modeline 3-B Hilbert dönüşümü uygulanmıştır. Sonuç olarak, yöntemin X-Y düzlemindeki yapı sınırlarının belirlenmesinde oldukça başarılı olduğu görülmüştür.

BOYUTLU HİLBERT DÖNÜŞÜMÜNÜN TEORİSİ

3-B Hilbert Dönüşümüne Ait Temel Bağıntılar

Konvolüsyon teoremini kullanarak bir fonksiyonun Fourier ve Hilbert dönüşümleri arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde yazılabilir (Nabighian 1984):

$$F [g_z(x)] = -i \operatorname{sgn}(\omega) F [g_x(x)] = H.F [g_x(x)] \quad (1)$$

Burada;

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \frac{\omega}{|\omega|} = \begin{cases} +1 & \text{ise } \omega > 0 \\ 0 & \text{ise } \omega = 0 \\ -1 & \text{ise } \omega < 0 \end{cases}$$

ve

$$H = -i \operatorname{sgn}(\omega)$$

dır. Bu bağıntılarda; H frekans ortamı 1-B Hilbert dönüşüm işleçini, x uzay ortamı bağımsız değişkenini, ω frekans ortamı bağımsız değişkenini ve F ise Fourier dönüşümünü ifade etmektedir.

Potansiyel fonksiyonu U ve onun yatay ve düşey türevlerinin Fourier dönüşümleri arasında aşağıdaki ba-

ğintılar bulunmaktadır.

(a) İki boyutlu ortam için,

$$\begin{aligned} F\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] &= i\omega F(U), \\ F\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right] &= |\omega| F(U). \end{aligned} \quad (2)$$

(b) Üç boyutlu ortam için;

$$\begin{aligned} F\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] &= iu F(U), \\ F\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right] &= iv F(U), \\ F\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right] &= \sqrt{u^2 + v^2} F(U). \end{aligned} \quad (3)$$

Frekans ortamı ifadeleri

Hilbert dönüşüm çifti oluşturan, bir potansiyel alan verisinin yatay ve düşey bileşenleri arasındaki ilişki, (1) ve (2) eşitlikleri kullanılarak;

$$\frac{\partial U}{\partial z} = H\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] \quad (4)$$

$$F\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right] = -i \operatorname{sgn}(\omega) F\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] \quad (5)$$

ve

$$F\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial z}\right] = [1 + \operatorname{sgn}(\omega)] F\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] \quad (6)$$

Üç-boyutlu Hilbert dönüşümüne ulaşmak için pek çok yol vardır. Bu çalışmada, Nabighian (1984) tarafından geliştirilen yöntem kullanılmıştır. Nabighian (1984),

$$\sqrt{u^2 + v^2} = iu \frac{-iu}{\sqrt{u^2 + v^2}} + iv \frac{-iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (7)$$

eşitliğini kullanarak işe başlamıştır. Burada; u ve v iki boyutlu frekans ortamı bağımsız değişkenleridir. (7) eşitliği $F(U)$ ile çarpılarak ve (3) eşitliği kullanılarak,

$$F\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right] = \frac{-iu}{\sqrt{u^2 + v^2}} F\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] + \frac{-iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} F\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right] \quad (8a)$$

bulunur.

$v=0$ (İki-boyutlu ortam) için Fourier ve Hilbert dönüşümleri arasındaki ilişki;

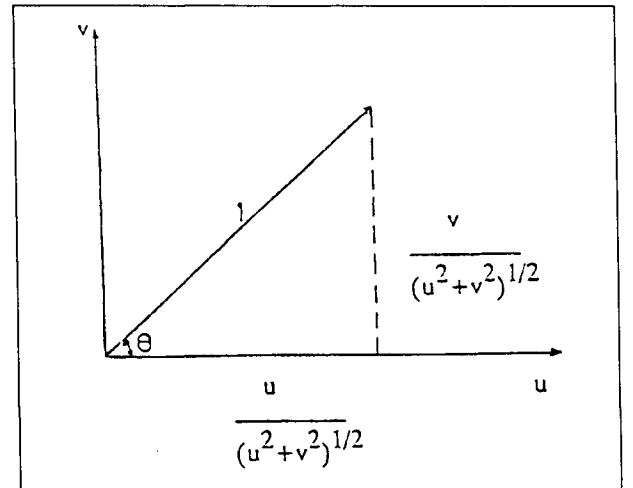
$$F\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right] = -i \frac{H}{|H|} \left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] = i \operatorname{sgn}(u) F\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] \quad (8b)$$

dır. Yukarıdaki (4), (5) ve (6) eşitlikleri bir potansiyel fonksiyonunun yatay ve düşey türevleri arasındaki iki-boyutlu Hilbert dönüşümünü ifade etmektedir. Nabighian (1984), bileşenleri $u/(u^2 + v^2)^{1/2}$ ve $v/(u^2 + v^2)^{1/2}$ olan, (u, v) uzayında birim vektör olarak verilen genleştirilmiş signum işlecini

$$\operatorname{sgn}(u, v) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} e_x + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} e_y$$

şeklinde tanımlamıştır (Şekil 1). Burada, e_x ve e_y , x ve y doğrultusundaki birim vektörlerdir. Eşitlik 1'de verilen iki boyutlu dönüşüm işleci, üç-boyutlu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$H = -i \operatorname{sgn}(u, v) = H_1 e_x + H_2 e_y$$



Şekil 1. (u, v) uzayında birim vektör olarak tanımlı genleştirilmiş signum fonksiyonu (Nabighian, 1984).
Figure 1. A generalized signum function defined as a unit vector in the (u, v) plane (Nabighian, 1984).

Burada;

$$H_1 = -\frac{iu}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (9a)$$

$$H_2 = -\frac{iv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

dır. Yatay türev işleçini;

$$\nabla_h = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y \quad (9b)$$

olarak ve (8a) eşitliğini kullanarak, bu iki vektörün çarpımı:

$$F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] = H.F \left[\nabla_h U \right] \quad (10a)$$

olur. Daha açık bir şekilde yazılırsa,

$$F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] = H_1.F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] + H_2.F \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] \quad (10b)$$

olur. Bu eşitlik, yatay türevlerden düşey birinci türevin hesaplanması için yeni bir yöntemi göstermektedir.

H_1 ve H_2 işleçleri Şekil 2'de verilmektedir. (3) ve (10a,b) bağıntıları kullanılarak,

$$F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] = -H_1.F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] \quad (11a)$$

$$F \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] = -H_2.F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

ya da,

$$F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] = -H_1.F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] \quad (11b)$$

$$H_1.F \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] = H_2.F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] \quad (12)$$

yazılabilir.

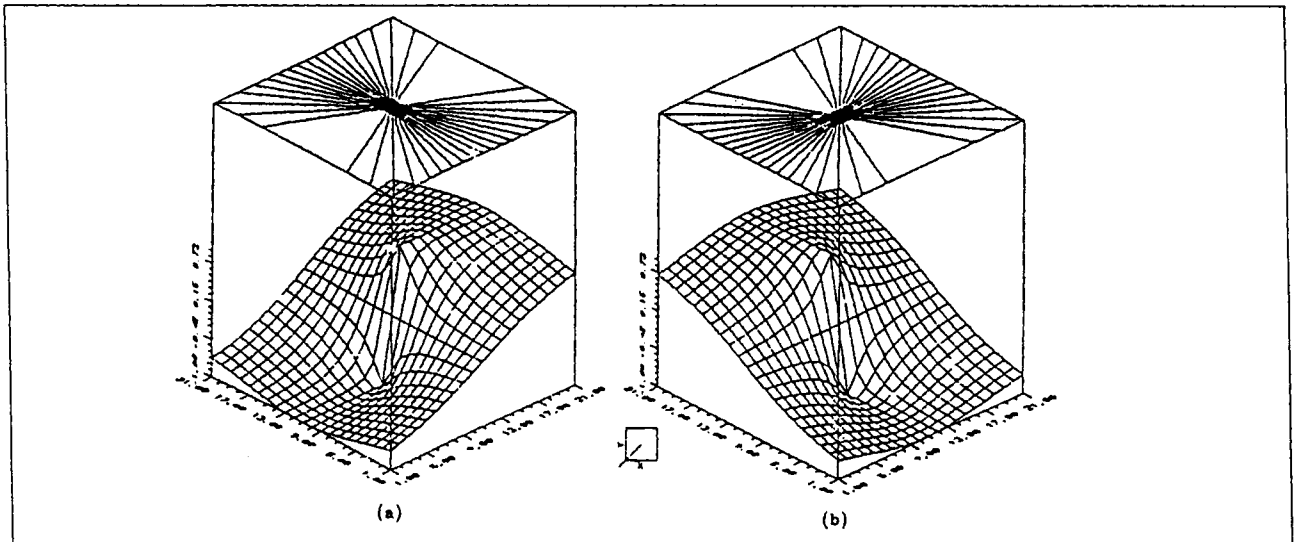
H , H_1 ve H_2 işleçleri aşağıdaki bağıntıları sağlar.

İki-boyutlu ortam ($v=0$, $H_1=H$, $H_2=0$) için;

(10a, b) ve (11a) eşitlikleri kullanılarak,

$$F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] = H.F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]$$

$$H.F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] = H.H.F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] = -F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]$$



Şekil 2. Frekans ortamında 3-B Hilbert dönüşüm işleçleri (Becerik, 1995). a) H_1 b) H_2 (İşleç boyu: 21 x 21)

Figure 2. 3-D Hilbert transformation operators in frequency domain (Becerik, 1995). a) H_1 b) H_2 (Operator length: 21x21)

eşitlikleri bulunur ve bunlardan yararlanılarak,

$$H_1 H_2 = -1 \quad (13a)$$

olduğu görülür.

Üç-boyutlu ortam için;

(10a,b), (11a,b) ve (12) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] &= H_1 \cdot F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] + H_2 \cdot F \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right], \\ H_1 \cdot F \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right] &= H_1 \cdot H_1 \cdot F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] + H_2 \cdot H_1 \cdot F \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right], \\ &= (H_1 \cdot H_1 + H_2 \cdot H_2) \cdot F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] = -F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur ve bunlardan yararlanarak,

$$H_1 \cdot H_1 + H_2 \cdot H_2 = -1 \quad (13b)$$

bulunur. H işlecinin gösterdiği gibi, (13b) eşitliği (13a) eşitliğinin üç-boyutlu ifadesidir. Sonuç olarak (6) eşitliği analitik sinyal tanımını iki boyuttan üç boyuta,

$$\begin{aligned} F \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial U}{\partial z} \right] &= \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right), \\ F \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] + \left(1 + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \cdot F \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] & \quad (14) \end{aligned}$$

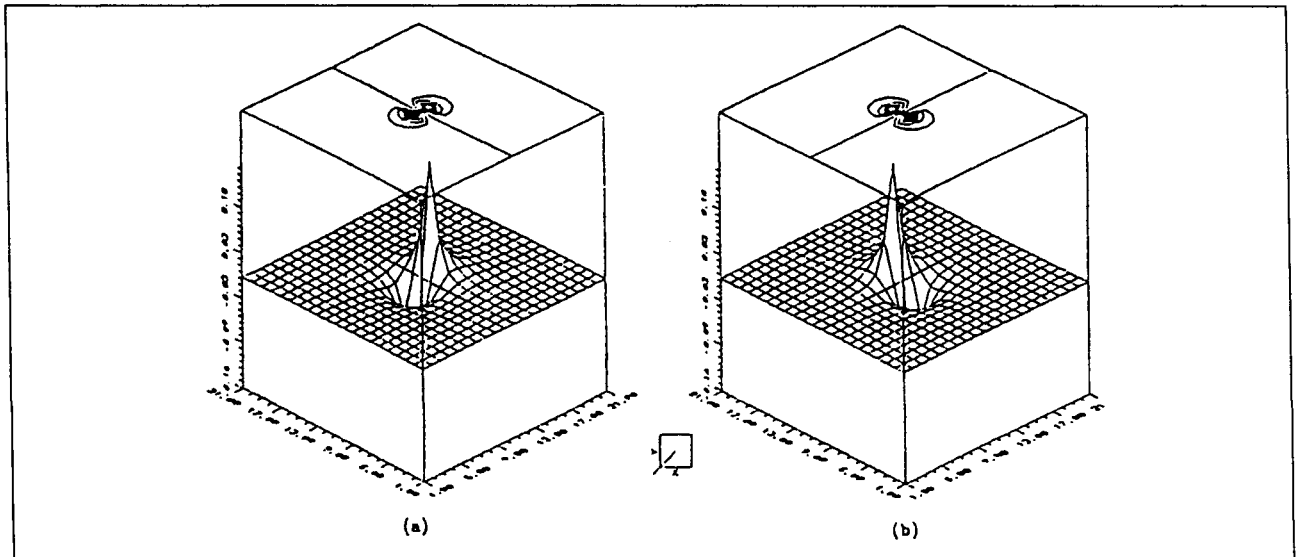
şeklinde genelleştirmektedir. Bu eşitlik, üç boyutlu sigma işlemi oldukça basit ve açık bir şekilde ifade etmektedir.

Uzay ortamı ifadeleri

(10a,b) ve (11a,b) eşitlikleri frekans ortamında çarpma işlemi olduklarından, bunların uzay ortamı ifadeleri evrişim işlemine karşılık gelir. Nabighian (1984) bu özellikten yararlanarak aşağıdaki uzay ortamı işlemlerine ulaşmıştır:

$$\begin{aligned} h_1 &= F^{-1} \left(\frac{-iu}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ h_2 &= F^{-1} \left(\frac{-iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

h_1 ve h_2 işlemleri Şekil 3'de verilmektedir.



Şekil 3. Uzay ortamında 3-B Hilbert dönüşüm işlemleri (Becerik, 1995) a) h_1 b) h_2 (İşleç boyu: 21x21)

Figure 3. 3-D Hilbert transformation operators in frequency domain (Becerik, 1995). a) H_1 b) H_2 (Operato length: 21x21)

(10a,b) ve (11a,b) eşitliklerinin uzay ortamı ifadeleri, potansiyel alan verileri için, iki-boyutlu Hilbert dönüşümünün üç-boyutlu genelleştirilmiş şeklini gösterecektir. Burada, potansiyelin x, y ve z yönündeki türevleri olan;

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha) \frac{\partial U}{\partial z}}{r^3} d\alpha d\beta, \quad (16)$$

$$g_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\beta) \frac{\partial U}{\partial z}}{r^3} d\alpha d\beta, \quad (17)$$

$$g_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha) \frac{\partial U}{\partial \alpha} + (y-\beta) \frac{\partial U}{\partial \beta}}{r^3} d\alpha d\beta \quad (18)$$

ifadelerine ulaşılır. Burada (α, β) , (x, y) düzlemindeki integral noktalarıdır.

Eşitlik (16)'nın x, y ve z'ye göre kısmi türevleri alınarak (Nelson, 1988):

$$g_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)}{r^3} g_{xz} d\alpha d\beta, \quad (19)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)}{r^3} g_{\beta z} d\alpha d\beta, \quad (20)$$

$$g_{xz} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)}{r^3} g_{zz} d\alpha d\beta, \quad (21)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (16) yerine (17) ve (18) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki ifadelere ulaşılır:

$$g_{yx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\beta)}{r^3} g_{\alpha z} d\alpha d\beta, \quad (22)$$

$$g_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\beta)}{r^3} g_{\beta z} d\alpha d\beta, \quad (23)$$

$$g_{yz} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\beta)}{r^3} g_{\alpha z} d\alpha d\beta, \quad (24)$$

$$g_{zx} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha) g_{\alpha \alpha} + (y-\beta) g_{\alpha \beta}}{r^3} d\alpha d\beta, \quad (25)$$

$$g_{zy} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha) g_{\alpha \beta} + (y-\beta) g_{\beta \beta}}{r^3} d\alpha d\beta, \quad (26)$$

$$g_{zz} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha) g_{\alpha z} + (y-\beta) g_{\beta z}}{r^3} d\alpha d\beta. \quad (27)$$

Laplace Diferansiyel Denlemi ve 3-B Hilbert Dönüşümü ile İlişkisi

Eğer $U(x, y, z)$ en az iki kez diferansiyeli alınabilen skaler bir fonksiyon ise,

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (28)$$

Laplace diferansiyel denklemini sağlar.

Potansiyel dağılımları her mertebeden kısmi türevlere sahip olduklarından, serbest uzayın her noktasında Laplace diferansiyel denklemini sağlarlar (Kellogg 1929). U potansiyel fonksiyonunun kısmi türevi olan g_{zz} bileşeni, Laplace diferansiyel denklemi kullanılarak;

$$g_{zz} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

şeklinde tanımlanabilir. Eşitlik (27) kullanılarak;

$$g_{zz} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha) g_{\alpha z} + (y-\beta) g_{\beta z}}{r^3} d\alpha d\beta. \quad (29)$$

elde edilir. Bu eşitlik Laplace diferansiyel denklemini ile 3-B Hilbert dönüşümü arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

3-B HİLBERT DÖNÜŞÜMÜNÜN GRAVİTE MODELLERİNE UYGULANMASI

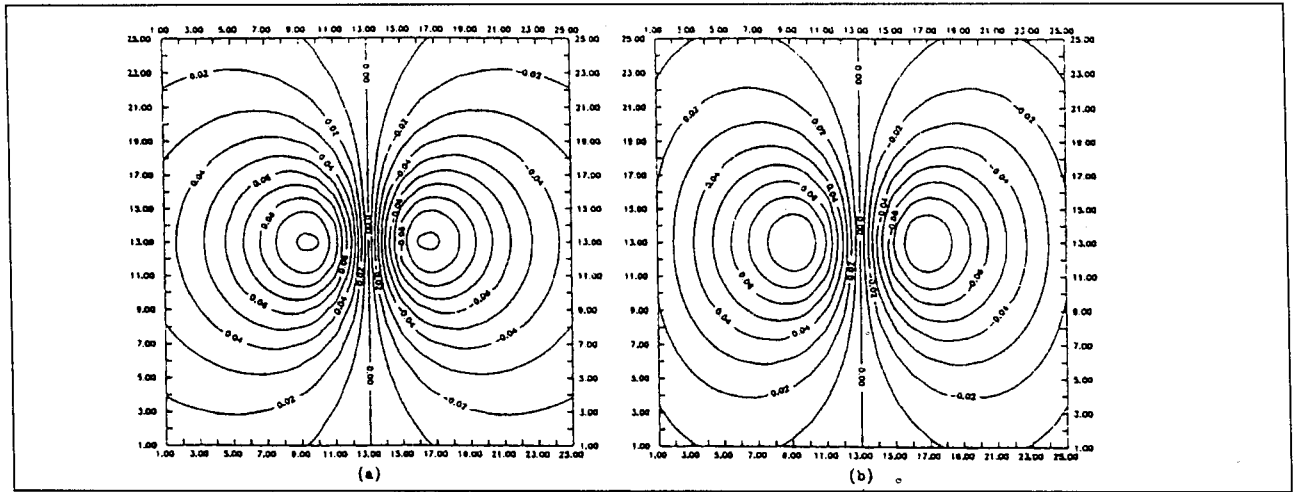
Gravite potansiyelinin düşey türevi olan g_z bileşenine, 3-B Hilbert dönüşümü uygulanmış ve düşey bileşenden hareketle, (16) ve (17) nolu bağıntılar kullanılarak, g_x ve g_y bileşenlerine ulaşılmıştır. İşlemin sağlamsını yapmak amacıyla, g_x ve g_y bileşenlerinden hareketle, (18) eşitliği kullanılarak g_z bileşenine dönülebilir.

g_x ve g_y bileşenlerinin sayısal türevleri alınarak, g_{xx} , $g_{xy} = g_{yx}$, g_{yy} bileşenleri elde edilir. Elde edilen ikin-

ci bileşenlerden, (25), (26) ve (27) bağıntıları yardımıyla, sırasıyla g_{zx} , g_{zy} ve g_{zz} bileşenlerine ulaşılır. g_{zz} bileşenine, (29) bağıntısında verilen, Laplace diferansiyel denklemi kullanılarak da ulaşmak mümkündür.

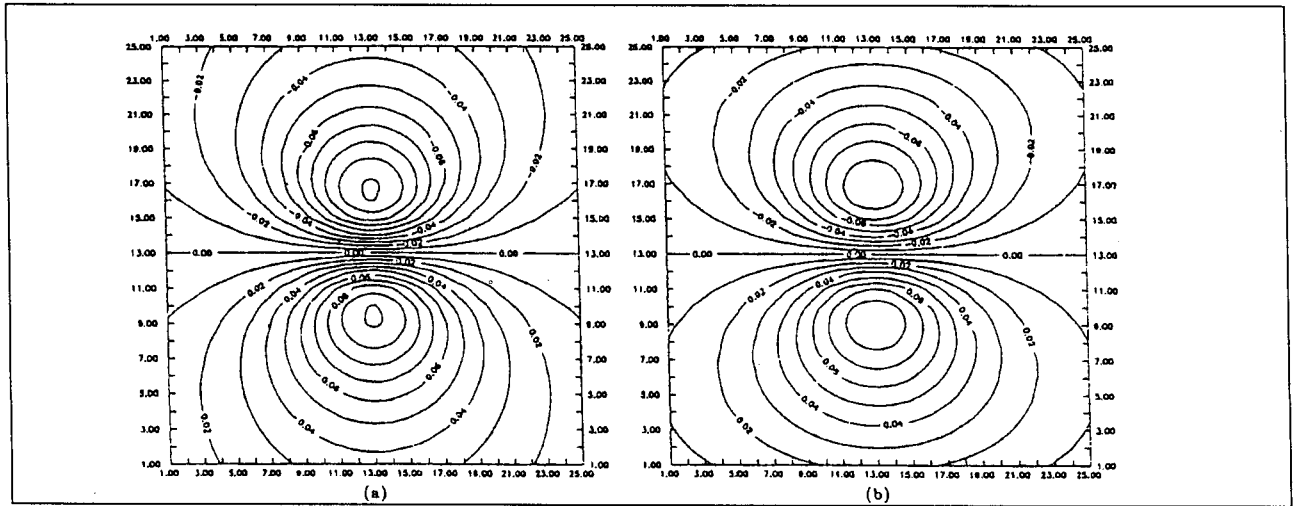
NOKTA KAYNAK POTANSİYELİ

Yöntemin gravitede uygulanabilirliğini ispatlamak amacıyla, ilk olarak nokta kaynak potansiyeli ve türevleri, Newton potansiyel bağıntısından analitik olarak hesaplanmıştır (Şekil 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, 9a, 10a, 11a, 12a)



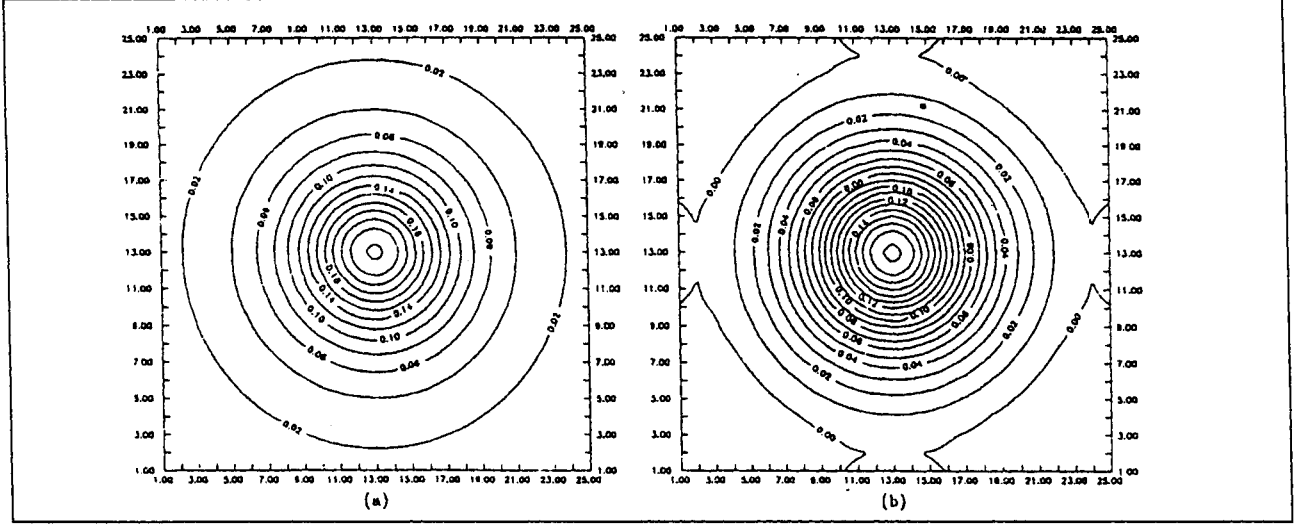
Şekil 4. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_x yatay türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) 3-B Hilbert dönüşümünden elde edilen (İşleç boyu: 25x25)

Figure 4. The horizontal derivative (g_x) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Derived from 3-D Hilbert transformation (Operator length: 25x25)



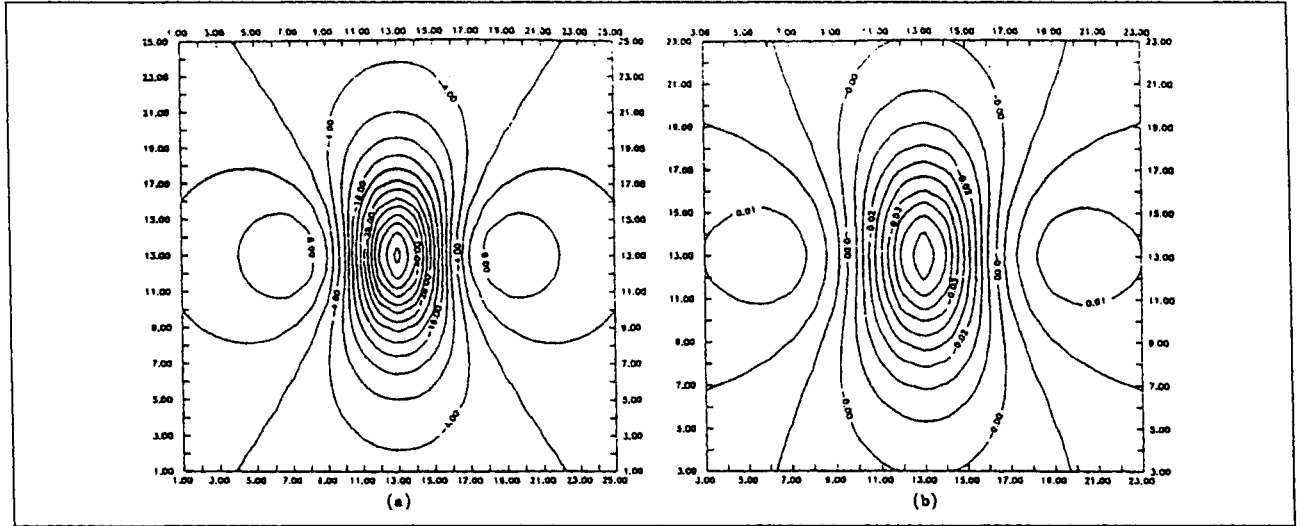
Şekil 5. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_y yatay türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) 3-B Hilbert dönüşümünden elde edilen (İşleç boyu: 25x25)

Figure 5. The horizontal derivative (g_y) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Derived from 3-D Hilbert transformation (Operator length: 25x25)



Şekil 6. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_z düşey türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) 3-B Hilbert dönüşümünden elde edilen (İşleç boyu: 25x25)

Figure 6. The vertical derivative (g_z) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Derived from 3-D Hilbert transformation (Operator length: 25x25)



Şekil 7. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_{xx} ikinci türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) Sayısal türevle ulaşılan.

Figure 7. The second derivative (g_{xx}) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Obtained from numerical derivation.

$$U = G \int \frac{dm}{r} \quad (30)$$

Burada;

$$dm = dx dy dz,$$

$$r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2},$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ cgs.} \quad (\text{Evrensel gravitasyonel}$$

çekim sabiti),

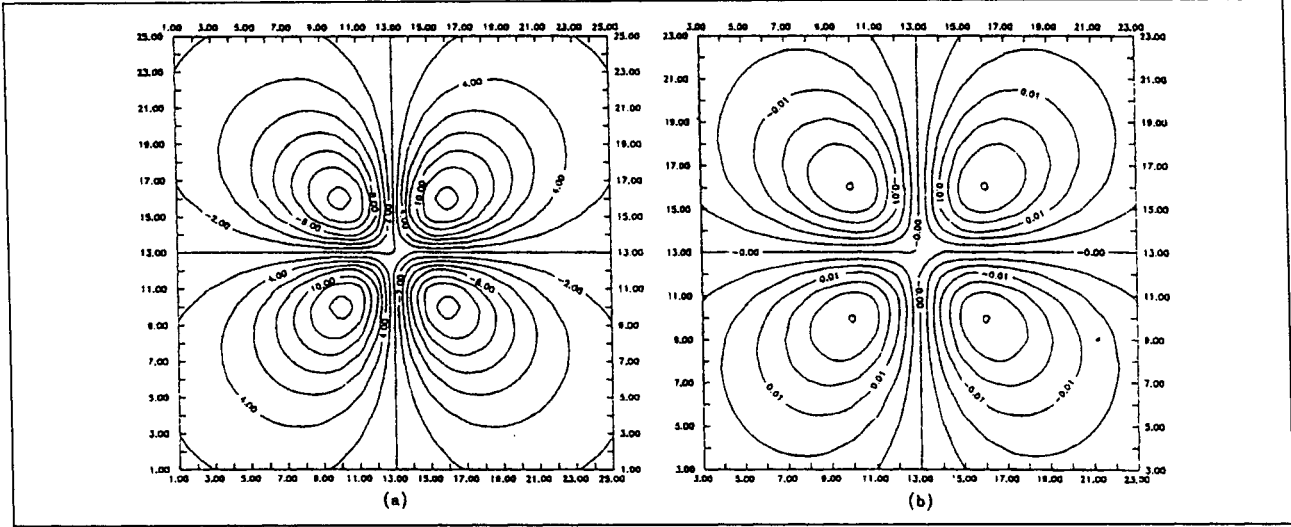
$$m = 1.0 \cdot 10^{15} \text{ gr} \quad (\text{Kütle}),$$

$$z_0 = d = 5 \text{ km} \quad (\text{Derinlik}),$$

$$\Delta x = \Delta y = 1 \text{ km} \quad (\text{Örnekleme aralığı})$$

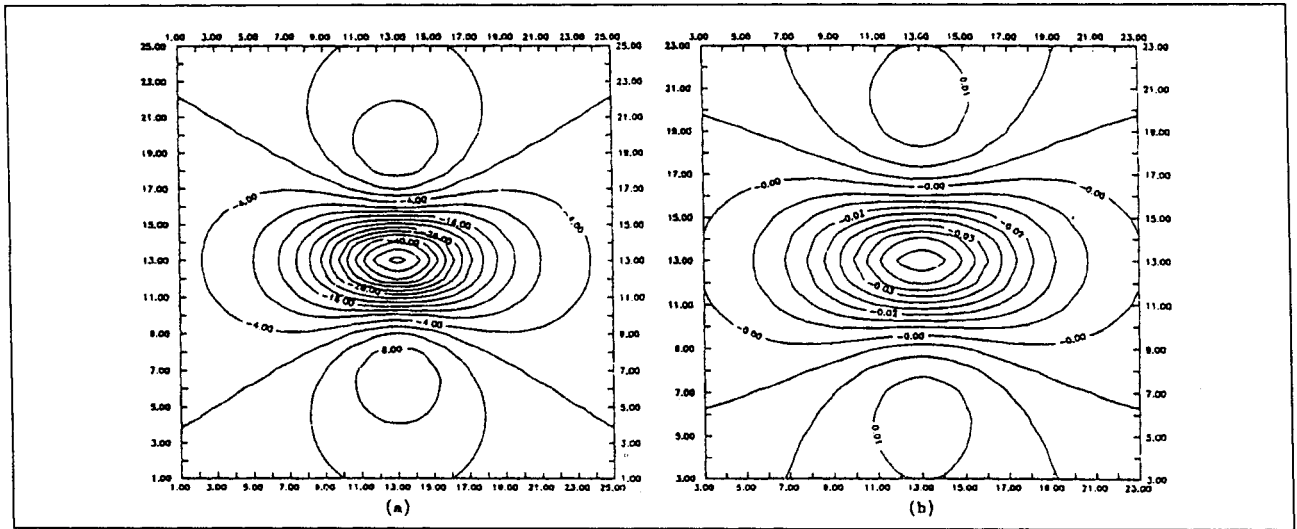
$$\text{Veri uzunluğu: 25 km} \quad (\text{X ve Y doğrultusunda})$$

dır. Daha sonra nokta kaynak potansiyel verisinin g_z



Şekil 8. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_{xy} ikinci türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) Sayısal türevle ulaşılan.

Figure 8. The second derivative (g_{xy}) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Obtained from numerical derivation



Şekil 9. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_{yy} ikinci türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) Sayısal türevle ulaşılan.

Figure 9. The second derivative (g_{yy}) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Obtained from numerical derivation.

çekim ifadesine, 3-B Hilbert dönüşümü uygulanarak ölçülemeyen birinci (g_x, g_y) ve ikinci ($g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}, g_{zy}, g_{zz}$) bileşenler elde edilmiştir.

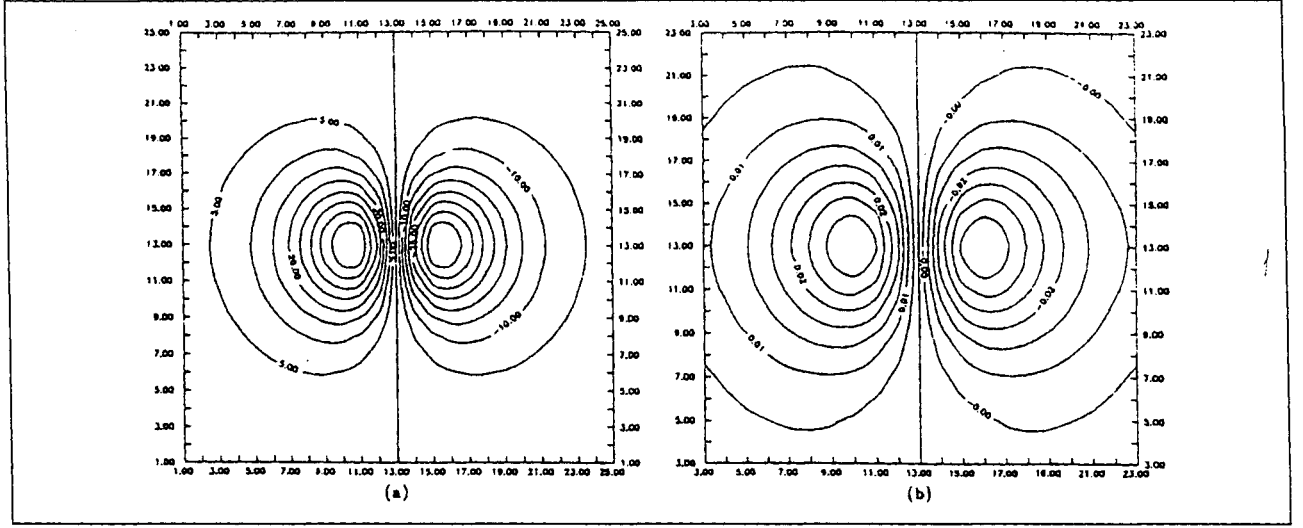
Nokta kaynak potansiyeli için elde edilen;

- g_x, g_y, g_z bileşenleri, Şekil 4b, 5b ve 6b'de

- $g_{xx}, g_{xy} = g_{yx}, g_{yy}$ bileşenleri, Şekil 7b, 8b ve 9b'de,

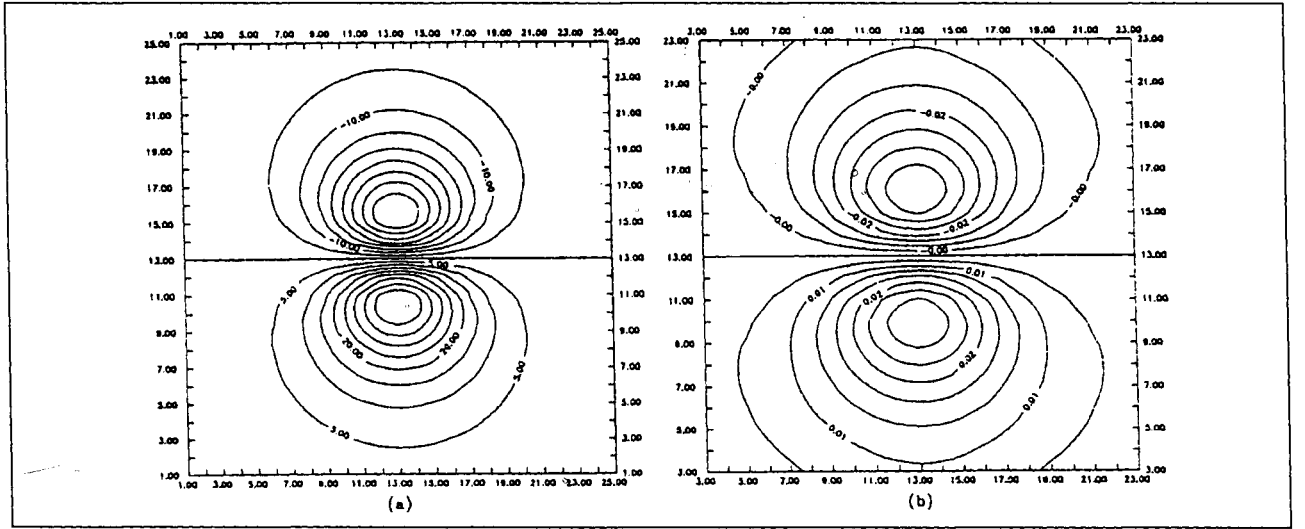
- g_{zx}, g_{zy} ve g_{zz} bileşenleri, Şekil 10b, 11b ve 12b'de verilmektedir.

Gravite potansiyelinin ikinci düşey türevi olan g_{zz} bileşeni analitik olarak, Hilbert dönüşümü ve Laplace diferansiyel denklemi kullanılarak hesaplanmıştır. Bunlar sırasıyla Şekil 12a, b, c'de verilmektedir. Söz konusu şekiller karşılaştırıldığında, benzer oldukları, yalnızca genlik değerlerinde bazı farklılıkların bulunduğu görülmektedir.



Şekil 10. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_{zx} ikinci türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) 3-B Hilbert dönüşümünden elde edilen (İşleç boyu: 21x21)

Figure 10. The second derivative (g_{zx}) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Derived from 3-D Hilbert transformation (Operator length: 21x21).



Şekil 11. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_{zy} ikinci türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) 3-B Hilbert dönüşümünden elde edilen (İşleç boyu: 21x21)..

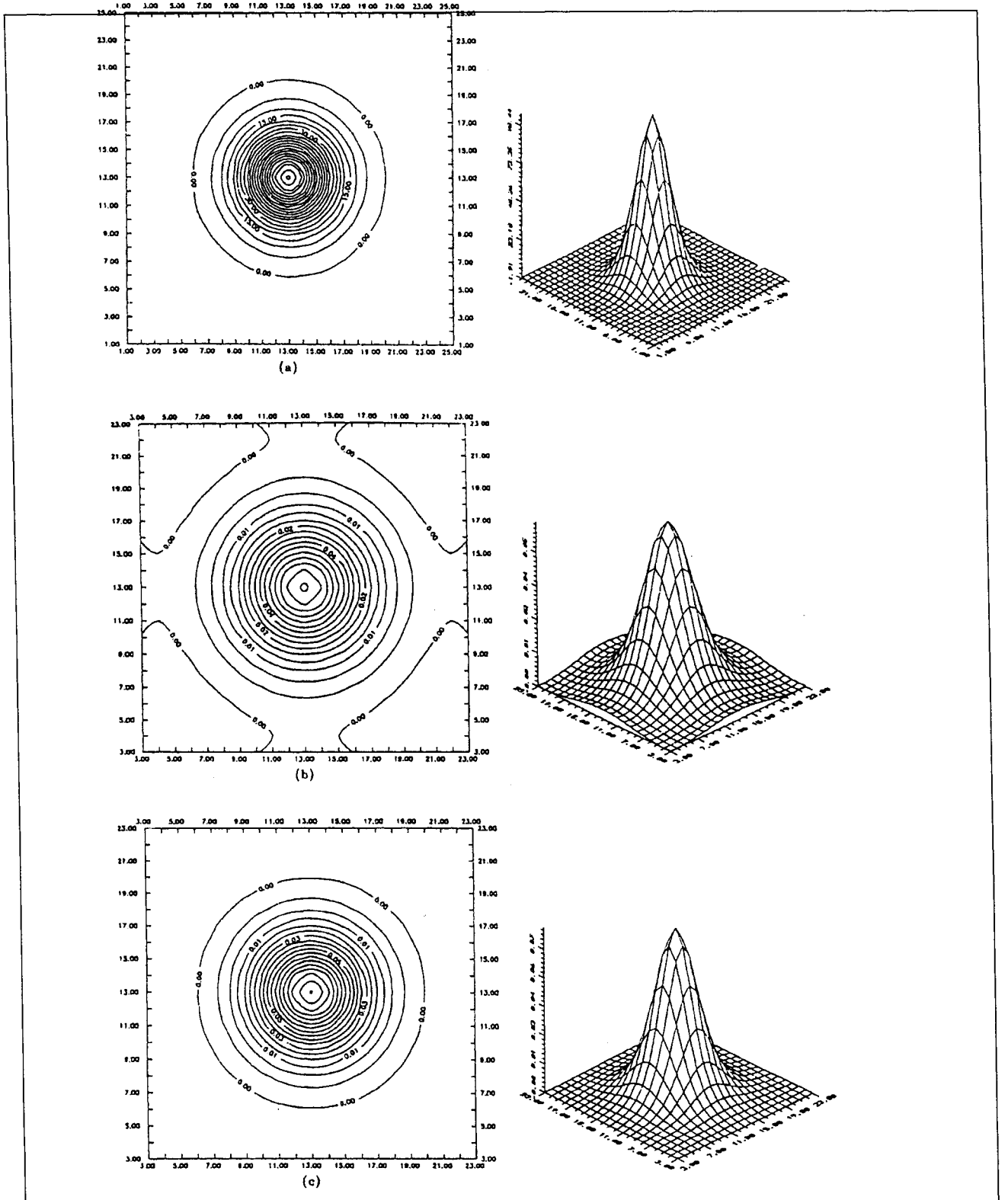
Figure 11. The second derivative (g_{zy}) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Derived from 3-D Hilbert transformation (Operator length: 21x21).

Her iki şekilde elde edilen bileşenler karşılaştırıldığında, iyi bir uyumun varlığı gözlenmiş ve 3-B Hilbert dönüşümünün gravitede başarıyla uygulanabileceği gösterilmiştir. Ayrıca, Laplace diferansiyel denklemleri kullanılarak ulaşılan g_z bileşenine, 3-B Hilbert dönüşümüyle de ulaşılabilmektedir.

EĞİMLİ PRİZMATİK YAPILAR

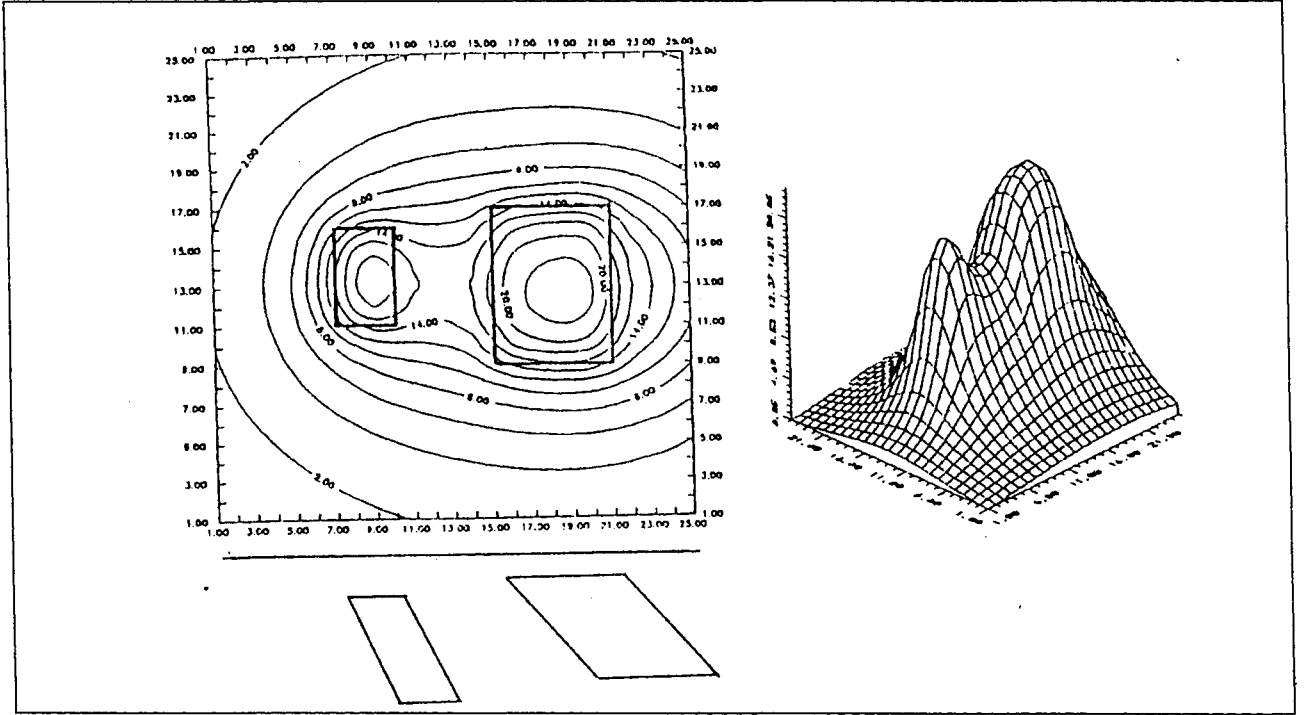
Yöntemin gravitede uygulanabilirliğini ispatlayan nokta kaynak potansiyeli örneğinden sonra 3-B Hilbert dönüşümü, yapı sınırları belli olan eğimli prizmatik yapılar modeline uygulanmıştır.

Eğimli prizmatik yapıların gravite çekim ifadesi g_z ,



Şekil 12. Gravite nokta kaynak potansiyelinin g_{ZZ} ikinci türevi. a) Analitik olarak hesaplanan, b) 3-B Hilbert dönüşümünden elde edilen (İşleç boyu: 21x21), c) Laplace diferansiyel denkleminde elde edilen.

Figure 12. The second derivative (g_{ZZ}) of the gravity point source potential. a) Analytically calculated, b) Derived from 3-D Hilbert transformation (operator length: 21x21), c) Derived from Laplace differential equation.



Şekil 13. Eğimli prizmatik yapılar modeli için gravite potansiyelinin g_z düşey türevi (3-B Talwani Modelleme programı ile elde edilen).

Figure 13. The vertical derivative (g_z) of the gravity potential for the inclined prismatic structures model (derived from 3-D Talwani Modelling Programme).

aşağıda verilen parametreler kullanılarak 3-B Talwani modelleme programıyla hesaplanmıştır (Şekil 13).

Veri uzunluğu : 25 km. (X ve Y doğrultusunda)

Önekleme aralığı : 1 km.

Yoğunluk farkları : 0.4, 0.2 gr/cm³.

Lamina sayısı : 3

Lamina köşelerinin sayısı : 4, 4, 4

Soldaki bloğun

laminalarının derinlikleri : 1.5, 5.5, 9.5 km.

Sağdaki bloğun

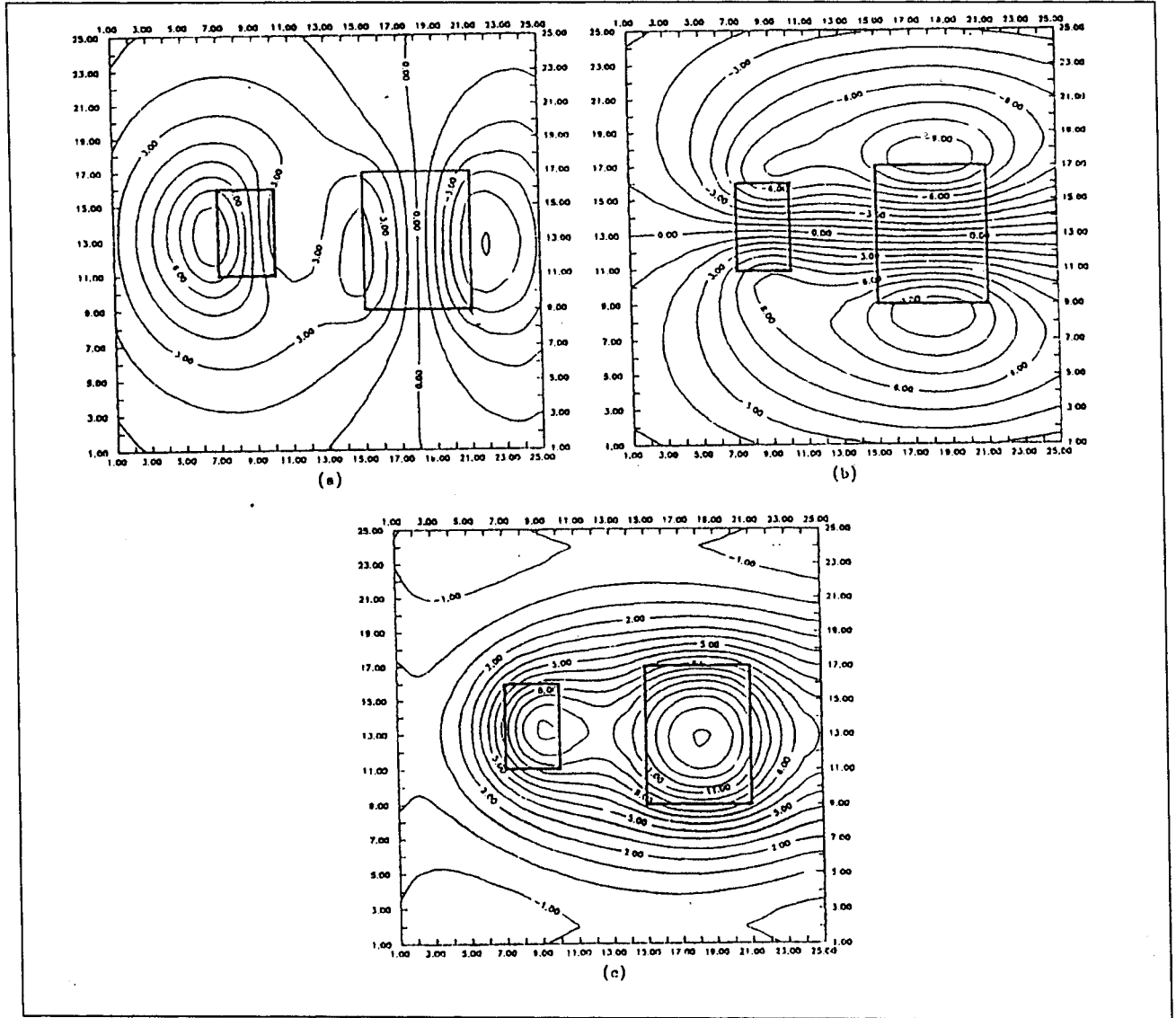
laminalarının derinlikleri : 1, 5, 9 km.

Soldaki bloğun köşe koordinatları

Köşe No:	Z=1.5 km		Z=5.5 km		Z=9.5 km	
	X	Y	X	Y	X	Y
1	6	10	10	10	14	10
2	6	15	10	15	14	15
3	9	15	13	15	17	15
4	9	10	13	10	17	10

Sağdaki bloğun köşe koordinatları

Köşe No:	Z=1 km		Z=5 km		Z=9 km	
	X	Y	X	Y	X	Y
1	14	8	18	8	22	8
2	14	16	18	16	22	16
3	20	16	24	16	28	16
4	20	8	24	8	28	8



Şekil 14. Eğimli prizmatik yapılar modeli için gravite potansiyelinin, Hilbert dönüşümü ile hesaplanan, birinci türevleri (İşleç boyu: 25x25). a) g_x , b) g_y , c) g_z .

Figure 14. The first derivatives of the gravity potential obtained from 3-D Hilbert transformation for the inclined prismatic structures model (Operator length: 25x25). a) g_x , b) g_y , c) g_z .

Eğimli prizmatik yapılar modeli için elde edilen;

– g_x , g_y ve g_z bileşenleri Şekil 14’de,

– g_{xx} , $g_{xy} = g_{yx}$, g_{yy} bileşenleri, Şekil 15’de,

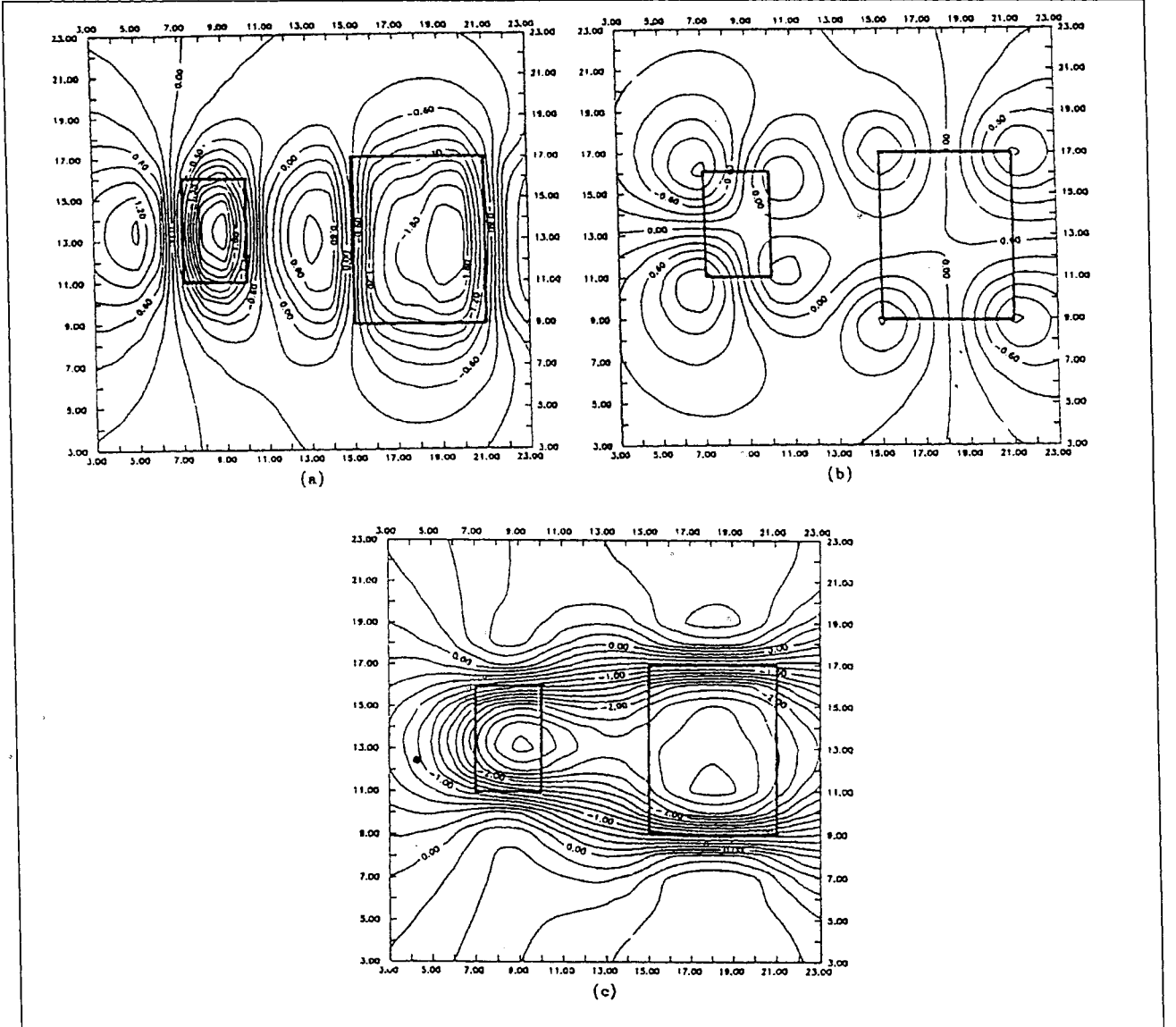
– g_{zx} , g_{zy} ve g_{zz} bileşenleri, Şekil 16a,b ve 17a’da,

– Laplace diferansiyel denkleminde sayısal olarak

hesaplanan g_{zz} bileşeni, Şekil 17b’de verilmektedir.

3-B Hilbert dönüşümü yardımıyla g_z çekim ifadesinden elde edilen bileşenlerin incelenmesiyle:

- g_y ve g_{zy} bileşenlerindeki, maksimum/minimum odakların ve g_{yy} bileşenindeki, dönüm noktalarının uzanımları, x yönündeki yapı sınırlarını,



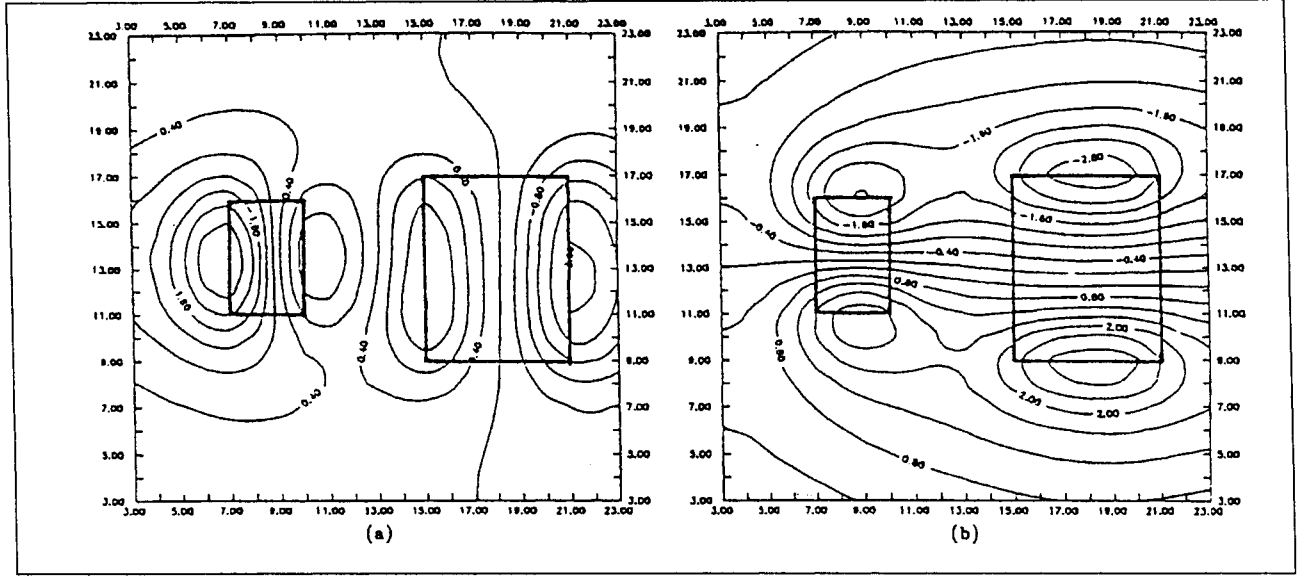
Şekil 15. Eğimli prizmatik yapılar modeli için gravite potansiyelinin, sayısal türevle elde edilen, ikinci türevleri. a) g_{xx} , b) g_{xy} , c) g_{yy} .

Figure 15. The second derivatives of the gravity potential obtained from numerical derivation for the inclined prismatic structures model. a) g_{xx} , b) g_{xy} , c) g_{yy} .

- g_x ve g_{zx} bileşenlerindeki, maksimum/minimum odakların ve g_{xx} bileşenindeki, dönüm noktalarının uzanımları, y yönündeki yapı sınırlarını,
- g_{xy} bileşenlerindeki, maksimum minimum odakların ise yapı köşelerini belirlediği sonucuna ulaşılmaktadır.

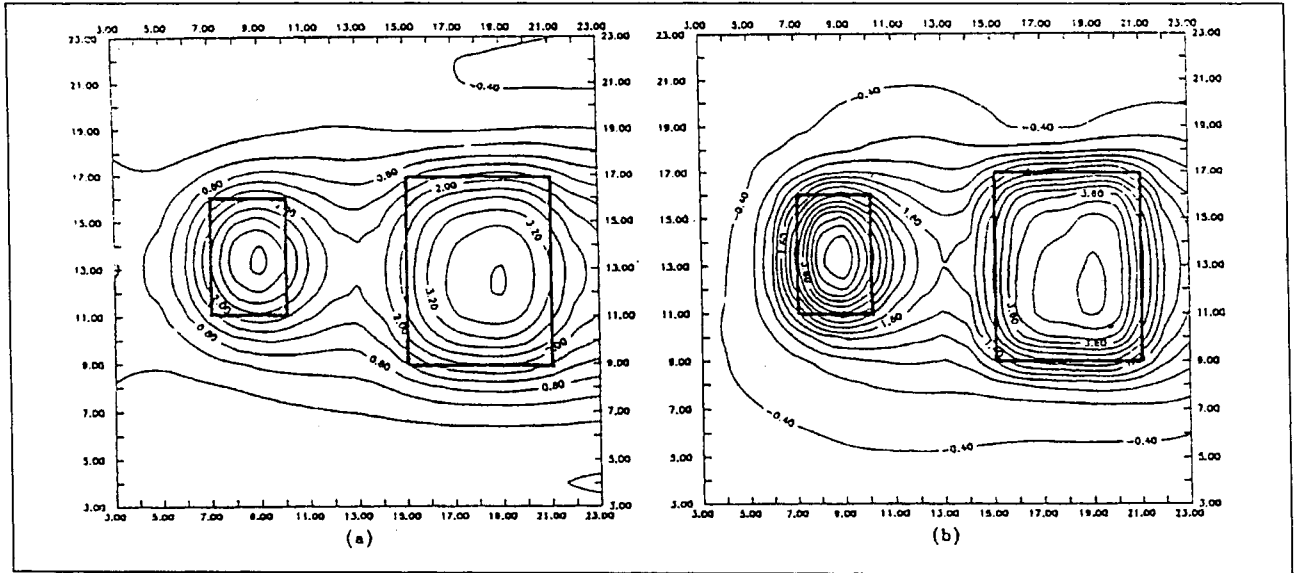
SONUÇLAR

2-B Hilbert dönüşümünün pratikte kullanılabilirliği, incelenen yapının iki boyutlu potansiyel dağılımı sunması ve değerlendirmede kullanılacak profilin, anomali uzanımını dik kesmesi koşulu ile sınırlı olmasına rağmen, 3-B Hilbert dönüşümü hiçbir sınırlama olmaksızın Newton potansiyel dağılımını sağlayan tüm kütle-



Şekil 16. Eğimli prizmatik yapılar modeli için gravite potansiyelinin, Hilbert dönüşümü ile hesaplanan, ikinci türevleri (İşleç boyu: 21x21). a) g_{zx} , b) g_{zy} .

Figure 16. The second derivatives of the gravity potential obtained from 3-D Hilbert transformation for the inclined prismatic structures model (Operator length: 21x21). a) g_{zx} , b) g_{zy} .



Şekil 17. Eğimli prizmatik yapılar modeli için gravite potansiyelinin g_{zz} ikinci türevi. a) 3-B Hilbert dönüşümü ile hesaplanan (İşleç boyu: 21x21), b) Laplace diferansiyel denkleminde elde edilen.

Figure 17. The second derivative (g_{zz}) of the gravity potential for inclined prismatic structures model. a) Obtained with 3-D Hilbert transformation (Operator length: 21x21), b) Derived from Laplace differential equation.

lere uygulanabilir. 3-B Hilbert dönüşümü gravite modellerine başarıyla uygulanabilmekte ve dönüşüm yardımıyla gravite potansiyelinin tüm birinci ve ikinci türevlerine ulaşılabilmektedir.

Bilindiği gibi gravite yönteminde, yalnızca potansiyelin birinci düşey türevi olan g_z çekim ifadesi ölçülebilmektedir. Diğer birinci ve ikinci bileşenler, Hilbert dönüşümü kullanılarak hesaplanabilmekte ve bu bileşenler

yardımıyla anomaliye neden olan yapının X–Y düzlemindeki sınır ve köşeleri kolaylıkla belirlenebilmektedir.

Günümüze değin, Laplace Diferansiyel denklemlerle ulaşılan potansiyelin ikinci düşey türevi olan g_{zz} bileşenine, 3–B Hilbert dönüşümü kullanılarak ulaşılabilmektedir.

Bu çalışma sırasında farklı uzunluktaki 3–B Hilbert dönüşüm işleci ile yapılan uygulamalar sonucunda, uzun işleç boyunun en iyi sonucu verdiği gözlemlenmiş ve bu nedenle veri boyuna eşit işleç boyu ile çalışılmıştır.

Yöntemin arazi verilerine uygulanabilirliğinin araştırılması, çalışmanın daha sonraki adımları için amaç edinilmiştir.

KAYNAKLAR

- Becerik, N. 1995, The Application of 3–D Hilbert Transformation in Gravity Method, Yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Bracewell, R.M. 1965, The Fourier Transform and Its Application; Mc Graw–Hill, Newyork.
- Green, R. and Stanley, J.M. 1975, Application of a Hilbert Transform Method to the Interpretation of Surface–Vehicle Magnetic Data; Geophysics, V. 23, p. 18–27.
- Kellog, A.D. 1929, Foundations of Potential Theory; Springer–Verlag Berlin Heidelberg Newyork, p. 123.
- Mohan, N.L., Sundararajan, N., and Rao, S.V.S. 1982, Interpretation of Some 2–D magnetic Bodies using Hilbert Transforms; Geophysics, V. 47, p. 376–387.
- Nabighian, M.N. 1972, The Analytic Signal of Two Dimensional Magnetic Bodies with Polygonal Cross–Section: Its Properties and Use for Automated Interpretation; Geophysics, V.37, p. 507–517.
- Nabighian, M.N. 1984, Toward a Three Dimensional Automatic Interpretation of Potential Field Data via Generalized Hilbert Transforms: Fundamental Relations; Geophysics, V.49, p. 780–786.
- Nelson, J.B. 1986, An Alternate Derivation of the Three–Dimensional Hilbert Transform Relations from First Principles; Geophysics, V. 51, p. 1014–1015.
- Nelson, J.B. 1988, Calculation of the Magnetic Gradient Tensor from Total Field Gradient Measurements and Its Application to Geophysical Interpretation; Geophysics, V. 53, p. 957–966.
- Pınar, R. 1985, Karmaşık Gradient Yönteminin Düşey Süreksizliklere Uygulanması ve Bilgisayarla Gerçekleştirimi; E.Ü. Bilgisayar Araştırma ve Uygulama Merkezi Dergisi, Cilt: 8, Sayı: 1, sf. 1–17.
- Roa, O.A., Babu, H.V.R. and Narayan, P.V.S. 1981, Interpretation of magnetic Anomalies due to Dikes: The Complex Gradient Method; Geophysics, V. 46, p. 1572–1578.
- Rao, O.A., Babu, H.V.R. 1983, Quantative Interpretation of Self–Potential Anomalies due to 2–D Sheet–Like Bodi; Geophysics, V. 48, p. 1659–1664.
- Stanley, J.M. and Green, R. 1976, Gravity Gradients and the Interpretation of Truncated Plates; Geophysics, V. 41, p. 1370–1376.
- Taner, M.T., Koehler, F. and Sheriff, R.E. 1979, Complex Seismic Trace Analysis; Geophysics, V. 44, p. 1041–1063.