JEOFİZİK 9,10;51-56

# HILBERT DÖNÜŞÜMLERİNİN GRAVİTE YÖNTEMİNDE KULLANILMASI

## Using Hilbert Transforms in Gravity Method.

**Rahmi PINAR* ve Zafer AKÇIĞ***

**ÖZ**

Yeraltını modellemek amacıyla kullanılan birçok yöntem vardır. Ancak karmaşık gradiyent yöntemi kullanılarak yeraltının modellenmesi pek yaygın değildir. Bunun da nedeni, arazi verilerinin birden fazla yapıyı içermesinden kaynaklanan, gösterdiği karmaşadır.

Bu çalışmada, bir gravite haritasında, çeşitli doğrultularda profiller alınmıştır. Bu profillerdeki gravite anomalisi değişimi modelin yatay yarı sonsuz tabaka olarak alınmasını gerektirmiştir. Söz konusu modelin parametreleri Hilbert dönüşümleri ile kuramsal olarak çözülmüştür. Daha sonra da gravite haritasında 10 adet keside uygulanarak modellere ait konum ve derinlik parametreleri belirlenmiştir. Bu parametreler kullanılarak yeraltının üç boyutlu modelleri kurulmuştur.

**ABSTRACT**

There are many methodts to model the underground. On the other hand modeling the underground by using the complex gradient method is not so common. The reason is the confusion which results from more than one structure in the field data.

In this survey, several profiles are determined in several directions on a gravity map. The change of the gravity anomaly in the profiles has necessiated to consider the model in concern have been theoretically solved by Hilbert transform. Later on, applying this in ten cross sections on a gravity map place and depth parameters of the models have been found out. They three dimensional models of the underground have then been founded by the help of these parameters.

### GİRİŞ

Potansiyel alanlarda, parametre saptanmasında doğrudan kullanılan bir çok yöntem vardır. Bunlardan bir tanesi de karmaşık gradiyent yöntemidir. Sözkonusu yöntem potansiyel alanlarda, özellikle manyetikte eski yıllardan bu yana uygulanmaktadır. Nabighian (1972) manyetikte, düşeyde, çok köşeli bir yapının köşe koordinatlarını saptamıştır. Manyetikte, eğimli dayka ait parametreler ise Rao be diğ. (1981) tarafından hesaplanmıştır. Yine manyetikte Mohan ve diğ. (1982) dayk ve silindir türü modellerin yapı parametrelerini belirlemiştir. Nabighian (1984) potansiyel alan bileşenleri arasında 2 ve 3 boyutlu Hilbert dönüşüm (HD) ilişkilerini kurmuş ve düşey bir prizmanın üst yüzey sınırlarını çıkartmıştır. Nelson (1988) ise, manyetikte 2 boyutlu dağılım gösteren alanlarda potansiyelin 2. bileşenleri arasındaki ilişkiyi HD kullanarak göstermiştir.

1980 li yıllardan bu yana ülkemizde de bu konuda çalışmalar yapılmıştır. Pınar (1985) HD leri yardımıyla düşey süreksizliklere ait paramatreleri saptamış ve sözkonusu yöntemi Orta Karadeniz gravite verilerine uygulanmıştır.

Gravite ve doğal potansiyel alanlarda HD leri kullanılarak birçok modelin parametrelerinin saptanması ise Akgün (1992) tarafından yapılmıştır.

### HİLBERT DÖNÜŞÜMLERİ

HD leri aşağıda gösterildiği gibi üç ana başlıkta incelenektir.

1.HD ne ait kuramsal içerik,

2.Potansiyel alan bileşenleri arasında HD nün kurulması,

3.Bilgi eğrileri.

#### HD ait kuramsal içerik

Bir f(x) işlevinin HD, Cauchy kuramı kullanılarak (Bracewell 1986)

$$F_{Hi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')dx'}{x'-x} \qquad (1)$$

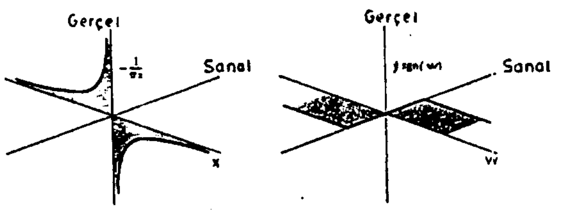
olarak verilir. Bilindiği gibi, (1) denkleminde $x=x'$ noktası için tümlev ıraksaktır. Dolayısıyla bu tümlevin alınabilmesi için Cauchy kuramı kullanılır. Denklemden de görüldüğü gibi $F_{Hi}(x)$, $f(x)$ in doğrusal bir işlevidir.

* DEÜ Mühendislik Fakültesi Jeofizik Mühendisliği Bölümü, Bornova-İZMIR

Dolayısı ile $F_{Hi}$, $f(x)$ işlevinin $-1/\pi x$ ile evrişiminden elde edilir.

$$F_{Hi} = -\frac{1}{\pi} \times f(x) \tag{2}$$

Bilindiği gibi, $-1/\pi x$ in spektrumu $j\mathrm{sgn}(w)$ işlevidir (Şekil 1).




**Şekil 1:** *$(-\pi x)^{-1}$ işlevi ve onun spektrumu olan jsgn(w)*

**Figure 1:** *The function $(-\pi x)^{-1}$ and its spectrum jsgn(w)*

Evrişim özelliklerinden yararlalınarak ters HD

$$f(x) = -\left(-\frac{1}{\pi \times}\right) \times F_{Hi} \tag{3}$$

olarak verilir. Şekil 1 den görüldüğü gibi "$w$" nin "+" değerleri için $j$, pozitif, "-" değerleri için de $j$, negatiftir. Spektrum ortamında böyle olan bir işlev, aynı zamanda bir süzgeç gibi davranır. Bu süzgeç, giriş verisinin genliklerinde hiçbir değişiklik yapmaz ancak evreyi "$w$" nın işaretine bağlı olarak $\pi/2$ radyan kadar öteler.

Uygulamada, orijinal sinyalin evresi $\pi/2$ kadar ötelenir ve genlikleri de "-" işareti ile çarpılmış olarak elde edilir. Bu noktada, jeofizik uygulamalarda evrenin $\pi/2$ olarak ötelenmesi ve genliklerin "-" ile çarpılmasının nelere yolaçtığına dikkat etmek gerekir.

HD, (2) denklemindeki evrişim yolu ile elde hesaplanabildiği gibi tek ve çift işlevler ve onların frekans ortamı ifadeleri de kullanılarak elde edilebilir (Pınar 1985). Bu yoldan gidilerek ayrık sinyaller için HD bağıntısı Mohan ve diğ. (1982) tarafından verilmektedir.

**Potansiyel alan bileşenleri arasında HD nün kurulması**

Potansiyel alanlarda, kaynaktan sonsuz uzaklıkta $\nabla^2 M=0$ dır. Dolayısıyla "$M$" potansiyelinin yönlü gradiyenleri, o yönlerdeki bileşenleri verir. Bu bileşenlerden düşey yönde olanı, gravitenin düşey bileşeni veya kısaca çekim kuvvatidir.

Potansiyel yönlü bileşenleri ve potansiyel işlevinin spektrumu arasında

$$\Im\left[\frac{\partial M}{\partial x}\right] = \Im[g_x] = jw\Im[M] \tag{4a}$$

$$\Im\left[\frac{\partial M}{\partial z}\right] = \Im[g_z] = |w|\Im[M] \tag{4b}$$

bağıntıları vardır. Bu bileşenler arasında da

$$g_z = Hi\,[g_z] \tag{5}$$

ve spektrum ortamında da

$$\Im[g_z] = -j\,\mathrm{sgn}(w)\,\Im\,[g_x] \tag{6}$$

veya

$$\Im[g_z] = j\frac{w}{|w|}\Im[g_x] \tag{7}$$

ilişkileri bulunmaktadır (Nabighian 1984).

Buraya dek potansiyelin ilk bileşenleri arasındaki ilişki kurulmuştur. Aynı zamanda potansiyelin ikinci bileşenleri (gradiyentleri) arasında da ilişkiler vardır (Nelson 1988).

$$g_{xx} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\alpha}{r^3} g_{\alpha z}\, d\alpha d\beta \tag{8}$$

$$g_{xz} = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\alpha}{r^3} g_{zz}\, d\alpha d\beta \tag{9}$$

Gradiyentlerin uzunluk ortamında birbirleri ile ilişkisi HD ile [(5) denklemine benzetilerek], spektrum ortamındaki ilişkisi ise signum işlevi ve gradiyentlerin spektrumundan [(6) ve (7) denklemlerine benzetilerek] yararlanılarak hesaplanır.

$$\Im[g_{xx}] = j\frac{w}{|w|}\Im[g_{xz}] \;,\; g_{xx} = Hi[g_{xz}] \tag{10}$$

$$\Im[g_{xz}] = j\frac{w}{|w|}\Im[g_{zz}] \;,\; g_{xz} = Hi[g_{zz}] \tag{11}$$

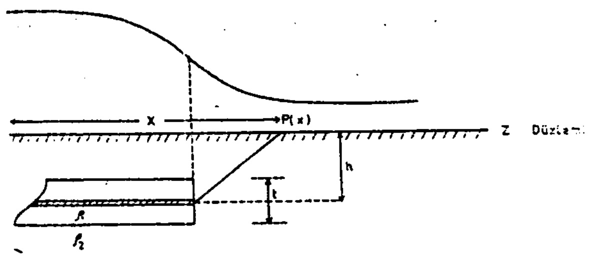
**Bilgi eğrileri**

Kuramsal model veya arazi çalışmalarından, yapının özelliklerini içeren tek bir belirti elde edilir. Bu belirtinin içinde, genelde , birden fazla parametrenin etkisi bulunur. Amaç ta bu parametrelerin belirlenmesidir. Örneğin gravitede bir küre probleminde bile üç parametre vardır. Bunlar kütle, derinlik, konum (yapının, profilin başlangıcından olan uzaklığı) parametreleridir. Elde edilen tek bir belirtiden, bu parametreler çözülmeye çalışılır. Oysa, gerçekte, tek bir eğriden bu parametrelerin çözülmesi bazı yanılgıları içerir. Bunun için, arazi eğrisinden (veya kuramsal model eğrisi) haraketle birden fazla işlev üretilmelidir. Üretilen bu işlevler "bilgi eğrileri" olarak isimlendirilir. Sözkonusu bilgi eğrileri aşağıda sunulmaktadır.

Potansiyel eğrisi [$M(x)$], potansiyelin düşev bileşeni ($gz=\partial M/\partial z$), potansiyelin $x$ ve $y$ yönlerindeki bileşenleri ($gx=\partial M/\partial x$ ve $gy=\partial M/\partial y$), bileşenleri gradiyentleri ($gxx$, $gxy$, $gxz$, $gyx$, $gyy$, $gyz$, $gzx$, $gzy$, $gzz$), genlik eğrisi [$A(x)$], evre eğrisi [$\phi(x)$], anlık genlik [$\partial A(x)/\partial x$] ve anlık evredir [$\partial\phi(x)/\partial x$]..

**Yatay yarı sonsuz tabaka parametrelerinin eldesi**

Uygulama bölümünde kullanılan arazi eğrileri yatay yarı sonsuz katman modeline benzediği için parametre çözümleri bu modele göre yapılmıştır (Şekil 2).




**Şekil 2:** *Gravitede yatay yarı sonsuz tabaka modeli.*
**Figure 2:** *Semi infinitive horizontal layer model in gravity.*

Çekim bileşeni.

$$g_z(x) = 2k\Delta\rho t\left[\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{z-h}{x-d}\right)\right] \qquad (12)$$

denklemiyle verilir. (12) denkleminin düşey ve yatay gradiyentleri

$$g_{zz}(x) = \frac{\partial g_z(x)}{\partial z} = 2k\Delta\rho t\frac{x-d}{h^2+(x-d)^2} \qquad (13)$$

$$g_{zx}(x) = \frac{\partial g_z(x)}{\partial z} = 2k\Delta\rho t\frac{h}{h^2+(x-d)^2} \qquad (14)$$

dır. Evre ve genlik eğrileri

$$\phi(x) = \arctan\left(\frac{g_{zz}(x)}{g_{zx}(x)}\right) = \arctan\left(\frac{h}{x-d}\right) \qquad (15)$$

$$A(x) = \left\{\left[g_{xx}(x)\right]^2 + \left[g_{zx}(x)\right]^2\right\}^{1/2} = 2k\Delta\partial t\left[h^2+(x-d)^2\right]^{1/2} \qquad (16)$$

dır. (15) denkleminde $x=d$ noktasında arctan eğrisi sonsuza gider yani evre eğrisinin sonsuza uzandığı yer konum parametresi olan "$d$" yi verir. "$d$" elde edildikten sonra, sırasıyla aşağıdaki parametler bulunur.

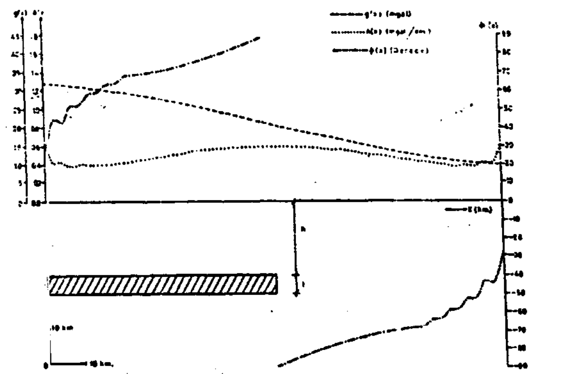
$$g_z(x=d) = k\pi\Delta\rho t \qquad (17)$$

$$t = \frac{g_z(x=d)}{\pi k\Delta\rho} \qquad (18)$$

$$h = \frac{2}{\pi}\frac{g_z(x=d)}{A(x=d)} - \frac{t}{2} \qquad (19)$$

$$\Delta\rho = \frac{A(x=d)g_z(x=d)}{26.65\, g_z(x=d) - 41.9\, h\, A(x=d)} \qquad (20)$$

Şekil 3 te 25km derinde, 5 km kalınlığında $\Delta\rho=0.2$ gr/cm3 yoğunluk farklı bir yapıya ait bilgi eğrileri görülmektedir. (15), (18) ve (19) denklemleri kullanılarak parametreler çözüldüğünde %1 farklılıkla kuramsal değerlere ulaşılmıştır.

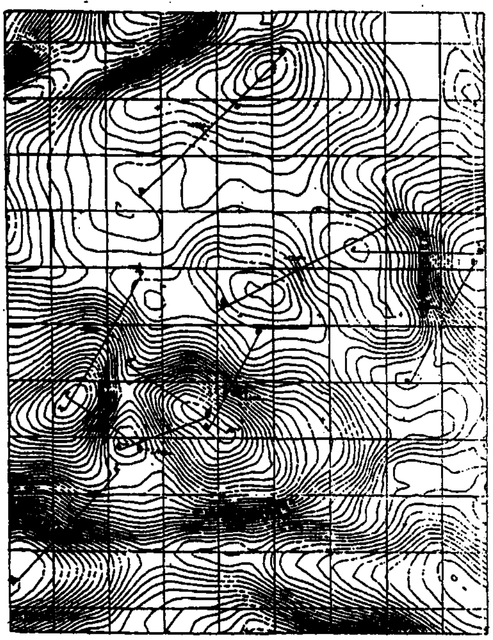


**Şekil 3:** *Kuramsal yarı sonsuz tabaka modeline ait bilgi eğrileri.*
**Figure 3:** *The information curve belong to theoretical semi-infinitive horizontal layer model.*

## UYGULAMALAR

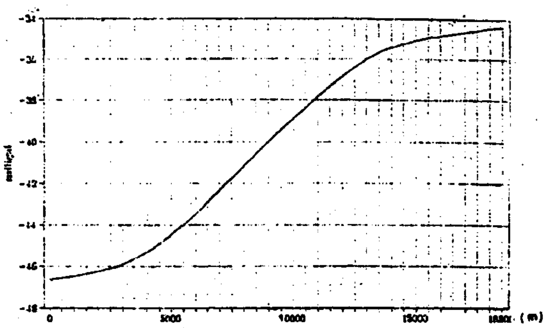
Yöntemin arazi uygulaması için Şekil 4 te görülen gravite haritası kullanılmıştır. Yeraltı yapısının çıkartılması amacıyla değişiklik yönlerde 10 adet kesit alınmıştır.

(13) ve (14) denklemleri kullanılarak karmaşık gradiyentler ve (15), (16) denklemleri de kullanılarak genlik ve evre eğrileri çizilmiştir. Bunlardan yararlanarak ve (18) (19) bağıntıları da kullanılarak h ve t parametreleri saptanmıştır. AA′ profiline ait düşey bileşen [$g_z(x)$] Şekil 5 te yatay [$g_{zx}(x)$] ve düşey gradiyentleri [$g_{zz}(x)$] Şekil 6 da, genlik ve evre eğrileri de Şekil 7 ve 8 de verilmektedir.



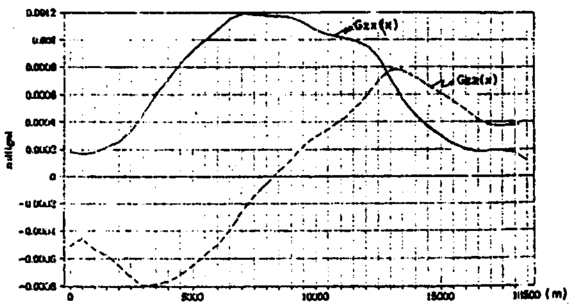
**Şekil 4:** *Gravite haritası ve kesit yerleri*

**Figure 4:** *The gravity map and location of the profile.*



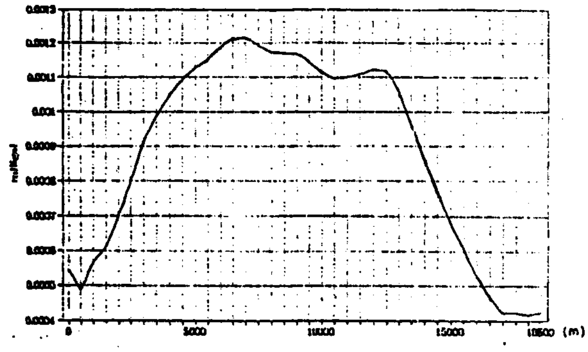
**Şekil 5:** *AA′ profiline ait $g_z(x)$ anomalisi.*

**Figure 5:** *The $g_z(x)$ anomaly belongs AA′ profile.*



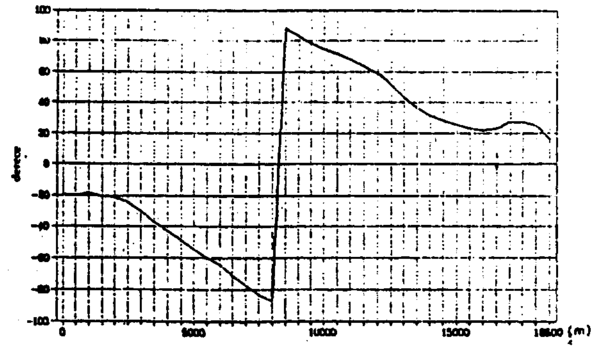
**Şekil 6:** *AA′ profiline ait bilgi eğrileri [$g_{zx}$ (x), $g_{zz}$ (x)z]*

**Figure 6:** *The information curves [$g_{zx}$ (x), $g_{zz}$ (x)z] belongs to AA′ profile.*



**Şekil 7:** *AA′ profiline ait genlik evre eğrisi.*

**Figure 7:** *An amplitude curve belongs to AA′ profile.*



**Şekil 8:** *AA′ profiline ait evre eğrisi.*

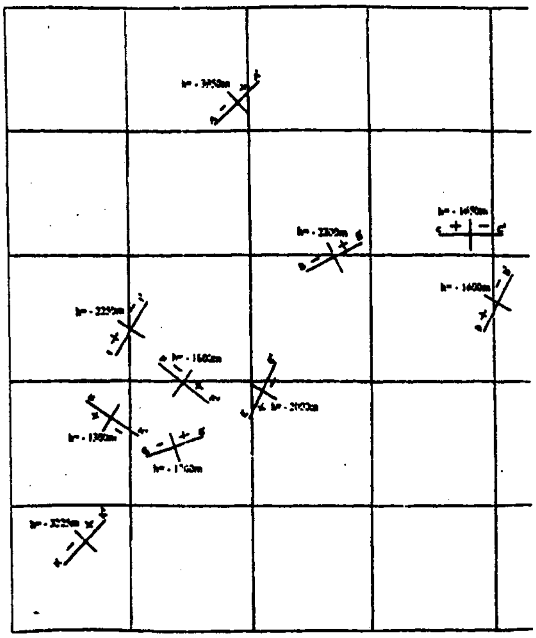
**Figure 8:** *The phase curve belongs to AA′ profile*

**Çizelge 1:** *Profillere ait HD çözüm sonuçları (birim metredir)*

**Table 1:** *The result of HD solution belong to profiles (unit is meter).*

| Kesitler | AA′ | BB′ | CC′ | DD′ | EE′ |
|---|---|---|---|---|---|
| Derinlik (h) | -3950 | -2300 | -1650 | -1600 | -2000 |
| Orta nokta (d) | 11350 | 10925 | 13665 | 11400 | 11000 |
| Kesitler | FF′ | GG′ | HH′ | II′ | KK′ |
| Derinlik (h) | -1800 | -1700 | -1350 | -2250 | -3225 |
| Orta nokta (d) | 10400 | 11750 | 10650 | 14300 | 13300 |

Çizelge 1 deki parametreler haritaya döküldüğünde, göreceli olarak blokların birbirlerine yükseltileri ortaya çıkar (Şekil 9).



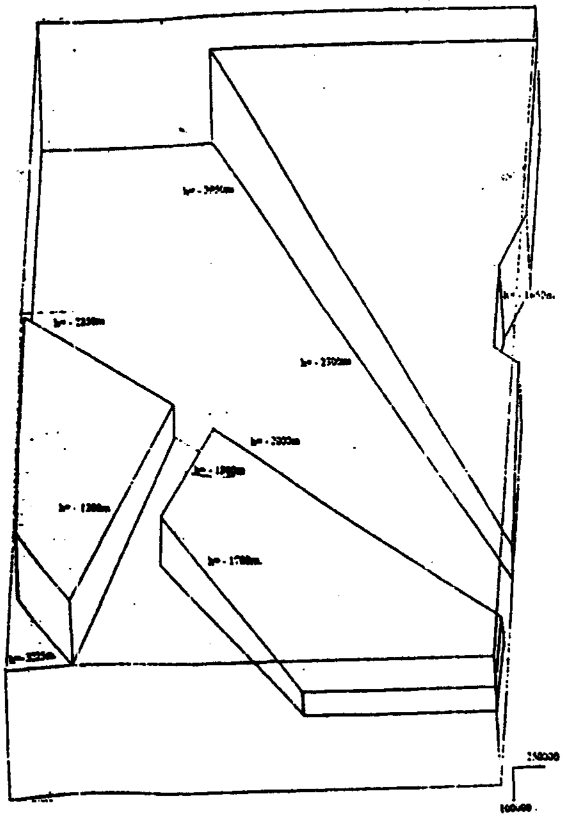
**Şekil 9:** *Değerlendirmeden sonra elde edilen parametreler*
**Figure 9:** *The parameters obtained after the process*

Şekil 9 da (+) ile gösterilenler yatay yarı sonsuz katmanın orta noktasının, yüzeyden olan derinliklerini, birbirini kesen iki doğrunun kesim yerleri de, profilin başlangıcından olan uzaklıklarını vermektedir. Örneğin AA′ profili için sözkonusu derinlik 3950 m. profilin başlangıcından olan uzaklık ise 11350 m dir. (Çizelge 1, Şekil 9). Buna göre katmanların gidişleri ve blok yükseklikleri arasında ilişki kurularak yeraltı 3 boyutlu olarak modelliğinde Şekil 10 elde edilir.

## SONUÇ ve TARTIŞMALAR

Parametre saptanması için basit modellerde uygulanan karmaşık gradiyent yöntemi, kriterler doğru olarak konduğunda, karışık yapılarda da kullanılabilir. Bu çalışmada önerilen kesit türü değerlendirmelerde, profilin yönünün seçilmesi önemlidir. Profiller, genelde kurama uyan ve basit yapıları yansıtan anomalilerden oluşmalıdır. Kuşkusuz ki belirtileri modele uymayan çözümler yapılırsa yanılgılı sonuçlara ulaşılır.

Bu çalışmada, HD leri tek boyutlu olarak uygulanmış, yeraltının 3 boyutlu modelleri kurulmaya çalışılmıştır. Oysa, daha doğrusu 2 boyutlu uygulamalar yaparak yeraltının 3 boyutlu modellerinin kurulmasıdır. Ancak 2 boyutlu dağılımda yeraltı çok karışık olduğundan dolayı bu gerçekleştirilememiştir. Kuşkusuz ki yöntemin 2 boyutlu olarak, karışık modellerdeki çözümlerinin geliştirilmesi, sonuçlar açısından daha doğru olacaktır.



**Şekil 10:** *Alana ait üç boyutlu model.*
**Figure 10:** *The three dimensional model belongs to field.*

## KAYNAKLAR


**Akçığ, Z. ve Pınar, R., 1994,** *Gravite ve Manyetik Arama Yöntemleri, DEÜ Mühendislik Fakültesi Yayınları No.249*

**Akgün, M., 1992,** *The complex gradient method in the potential fields, DEÜ, Graduate School of Natural and App. Sciences (Thesis of Ph.D)*

**Bracewell, R., 1984,** *The Fourier Transform and Its Applications: Mc-Graw Hill Book Co.*

**Mohan, N. L., Sandararajan, N., and Rao, S. V. S., 1982,** *Interpretation of some two dimensional magnetic bodies using Hilbert Transform: Geophysics, 47,376-387*

**Nabighian, M. N., 1972,** *The analytic signal of two dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: its properties and use for automated interpretation, Geophysics, 37, 507-517.*

**Nabighian, M. N., 1984,** *Toward a three dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transform fundamental relations. Geophysics, 49, 780-786.*

**Nelson, J.B., 1988,** *Calculation of the magnetic gradient tensor from total field gradient measurements and its application to geophysical interpretation, Geophysics, 53, 957-966.*

**Pınar, R., 1985,** *Karmaşık gradiyent yönteminin düşey süreksizliklere uygulanması ve bilgisayarla gerçekleştirimi, EÜ Bilg. Araşt. ve Uyg. Mer. Der., 8. 1-17.*

**Rao, D.A., Babu, H.V.R., and Narayan P.V.S., 1981,** *Interpretation of magnetic anomalies due to dikes: The complex gradient method, Geophysics, 46, 1572-1578.*