JEOFİZİK 1, 28 - 37, 1987

KALMAN SÜZGEÇ KURAMI

Theory of Kalman Filter

Ali SAYMAN*

ÖZET

Bu makalede geri beslemeli (feedback) bir süzgeç türü olan Kalman süzgecinin sismik tersevrişim (deconvolution) işlemine uygulanması gösterilmiştir.

Yakın zamana kadar, sismik tersevrişime genel yaklaşım olarak yansımış dalgacığa uygun istenilen çıkışı elde etmede sismik izlerin özilişkilerinden (autocorrelation) türetilen Wiener ters süzgeçleme tasarımı uygulanmıştır. Wiener süzgeç yöntemi durağan (stationary) olmayan stokastik süreçlere (process) zaman değişimli olarak da uygulanabilir; fakat bu durumda Wiener Hopf denkleminin çözümünü elde etmede güçlüklerle karşılaşılır. Bu güçlüğün ötesinden gelmek için, Kalman (1960) alışılagelmiş im (signal) ve gürültü işlevlerinden çok, im ve gürültü için durum-uzay gösterimi (state-space representation) ile kestirim (estimation) sorununa yaklaşabileceğini göstermiştir.

Kalman süzgeç denklemi çeşitli görüş noktalarından yaklaşılarak birçok yolla türetilebilir. Bu çalışmada en çok kullanılan Gauss olasılık varsayımı kullanılarak koşullu beklentinin (expectation) enküçükleştirilmesi yönteminden yararlanılmıştır.

Örnek uygulama amacı ile önce yansıma katsayıları ile kaynak sismik dalgacığın evrişiminden (convolution) sismik iz elde edilmiş, bu ize Gauss (normal) gürültüsü eklenerek gürültülü yapay sismik iz oluşturulmuştur. Çeşitli im/gürültü oranlarına sahip olan yapay sismik izlere Kalman tersevrişim süzgeci uygulanmıştır. Yapay veri uygulamaları, ayrık-Kalman süzgeç çıktılarının gürültüsüz yapay sismik izlere çok yaklaştığını göstermiştir.

ABSTRACT

In this paper, the use of Kalman filter to the seismic deconvolution problems in shown.

Up to recent times, the most common approach the seismic deconvolution has been the design of Wiener inverse filters which approximate a desired output corresponding to each reflected wavelet. These inverse filters are derived using the autocorrelation of seismic trace. The Wiener filtering is successfully applied to the stationary stochastic processes. The adaptive Wiener filter approach can also be applied to the nonstationary stochastic processes. However the Wiener-Hopf equation in that case is quite difficult to solve. The overcome this difficulty, Kalman (1960) changed the standard formulation of estimation problem by postulating a state-space representation for the signal and noise rather than using the conventional signal and noise correlation functions.

The Kalman filter equation can be derived from different point of views. The minimization of the conditional expectation method may be used with the Gaussian probability assumption which is the approach adopted in this study.

Beginning with illustrating some examples of the synthetic seismic traces were obtained from the convolution of the source seismic wavelet with the reflection coefficient series. Pseudo-white Gaussian noise were added to these traces. Kalman deconvolution filters are applied to the synthetic seismic traces with different signal to noise ratios. Synthetic data applications indicate that discrete-Kalman filter outputs nicely approach to the noiseless synthetic seismic traces.

* Yıldız Üniversitesi, Kocaeli Mühendislik Fakültesi, Jeofizik Bölümü, Kocaeli

GİRİŞ

Kalman süzgeç denklemleri çeşitli görüş noktalarından yaklaşılarak birçok yolla çıkarılabilir. Kalman (1960), Kalman ve Bucy (1961) doğrusal süreç ve öngörü hesaplamasına dik izdüşüm yöntemi uygulayarak Kalman süzgeç denklemlerini türetmişlerdir ve Gauss dağılımı varsayımı ile Smith (1965) aynı sonuçları elde etmiştir. Kalman süzgeç denklemlerinin çıkarılmasında stokastik yaklaşım Ho (1962), enküçük kareler Ho (1963), devingen (dynamic) programlama Cox (1964), Bayes yaklaşımı Ho ve Lee (1964), doğrusal regresyon Fagin (1964), enbüyük olabilirlik (maximum likelihood) Rauch ve diğ. (1964), yenilik (innovation) Kailath (1968) tarafından gösterilmiştir.

Bu makalede ençok kullanılan ayrık doğrusal dizgeler (discrete linear systems) için, Gauss-Markov dizisi varsayımı kullanılarak koşullu beklentinin (conditional expectation) enküçükleştirme yönteminden Kalman süzgeç denklemlerinin nasıl elde edileceği gösterilmiştir (Meditch 1969, Greensite 1970, Singh ve Titli 1978, Sayman 1983).

Kalman süzgecinden yararlanarak sismik tersevrişim sorununun çözümü ilk kez Bayless ve Brigham (1970) tarafından denenmiştir.

Ott ve Meder (1972) temel ögeleri Kalman süzgeci ve ilgili durum uzay gösterimi olan bir öngörü-yanılgı süzgecini taslaklamışlardır. Bir boyutlu sönümlü harmonik salınımlara gürültü ekleyerek yansıma katsayılarını bulmuşlardır.

Crump (1974) yapay sismik ize ayrık-Kalman süzgecini uygulayarak süzgeçlenmiş yansıma katsayıları ile süzgeçlenmiş sismik iz elde etmiştir. Ayrıca, arazideki bir kesite Ayrık-Kalman süzgeci uygulayarak sorunları tartışmıştır.

Tamer (1977) Kalman süzgecinin yapay sismik verilere uygulanması üzerine çalışmalar yapmış; bir boyutlu sönümlü harmonik salınımlara eklenen gürültünün değişintisini değiştirerek tersevrişim işlemini gerçekleştirmiştir.

Kormylo ve Mendel (1978) sismik veriden yansıma katsayılarını enbüyük olabilirlik kestirim yönteminden elde edilebileceğini göstermişler ve yapay izlere uygulamışlardır.

Mendel ve diğ. (1981) Kalman süzgeç denklemlerini kullanarak çeşitli alanlarda incelemeler yapmışlardır.

Ashrafi ve Mendel (1982) soğurmasız katmanlı bir ortama ilişkin yansıma katsayıları dizisi ve varış zamanlarını kestirmek için enbüyük olabilirlik (maximum likelihood) kestirim yöntemini kullanmışlardır.

Aminzadeh ve Mendel (1983) katmanlı bir ortamda normal gelişle soğurma (absorption) etkisini durum-uzay gösteriminde incelemişlerdir.

Chi, Mendel ve Hampson (1984) enbüyük olabilirlik tersevrişime hızlı hesaplama yöntemi ile yaklaşımı yapay sismik ize ve arazi verisine uygulamışlardır.

KALMAN SÜZGEÇ TASARIMI: KURAM

Durum uzay gösteriminde, durum-değişken dizgesi ve gözlemsel işlem sırasıyla,

$$\underline{x}(k+1) = \Phi(k+1,k)\,\underline{x}(k) + \Gamma(k+1,k)\,\underline{u}(k) \quad (1)$$

$$\underline{z}(k+1) = H(k+1)\,\underline{x}(k+1) + \underline{v}(k+1) \quad (2)$$

bağıntıları ile gösterilebilir (Kuo 1970, Ogata 1970, Mendel 1973, Sayman 1983). Burada, $\underline{x}$ n-boyutlu durum yöneyi, $\underline{u}$ p-boyutlu gürültü veya giriş yöneyi; $\underline{z}$ m-boyutlu gözlem veya çıkış yöneyi, Φ nxn-boyutlu devinim denklemini gösteren geçiş dizeyi, Γ, nxp-boyutlu durum yöneyi üzerine giriş gürültüsünün etkisini gösteren, denetleme dizeyi, H. mxn-boyutlu ölçme değerinin durum yöneyi ile ilişkisini gösteren gözlem dizeyi, $\underline{v}$ m-boyutlu ölçü gürültüsü yöneyidir ve k zaman sayacını göstermektedir.

Kalman süzgeci $[\underline{z}(1), \underline{z}(2), \ldots, \underline{z}(k)]$ ölçü değerlerine uygulanabilir. t_k zamanı (k kısaltılmış şekli) şimdiki zamanı, $t < t_k$ geçmiş zamanı, $t > t_k$ gelecek zamanı gösterir. t_j zamanına göre ölçü değerleri $[\underline{z}(1), \underline{z}(2), \ldots, \underline{z}(j)]$, temeline göre $\underline{x}(k)$ nın eniyi kestirimi $\hat{\underline{x}}(k/j)$ olarak gösterilir. Bu gösterime göre: $j < k$ ise $\underline{x}(k)$ nın eniyi öngörülmüş kestirimi (optimal predicted estimate); $j = k$ ise $\underline{x}(k)$ nın eniyi süzgeçlenmiş kestirimi (optimal filtered estimate); $j > k$ ise $\underline{x}(k)$ nın eniyi yuvarlatılmış kestirimini (optimal smoothed estimate) gösterir.

Denklem (1) ve (2) nin çözülmesiyle süzgeç denklemleri elde edilir. Bunun için aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır:

1) $\underline{u}(k)$ ve $\underline{v}(k)$ birbirinden bağımsız, Gauss beyaz gürültü dizileri olup, aşağıdaki niteliklere sahiptirler:

$$E[\underline{u}(k)] = 0 \quad (3)$$

$$E[\underline{u}(k)\underline{u}'(j)] = Q\,\delta_{kj} \quad (4)$$

$$E[\underline{v}(k)] = 0 \quad (5)$$

$$E[\underline{v}(k)\underline{v}'(k)] = R\,\delta_{kj} \quad (6)$$

$$E[\underline{v}(k)\underline{u}'(j)] = 0 \quad (7)$$

Burada δ_{kj} Kronecker-delta işlevidir. Q, pxp-boyutlu ve R, mxm-boyutlu artı yarı-kesin (pozitive semidefinite) dizeyleridir.

2) Başlangıç koşulu $\underline{x}(0)$ rastgele Gauss yöneyidir. Beklenen değer (ortalama) ve değişinti dizeyi aşağıda sırasıyla verilmiştir:

$$E[\underline{x}(0)] = 0 \quad (8)$$

$$E[\underline{x}(0)\underline{x}'(0)] = P(0) \quad (9)$$

3) Başlangıç koşulu $\underline{x}(0)$ yöneyi, $\underline{u}(k)$ giriş yöneyi ve $\underline{v}(k)$ gürültü yöneyi birbirinden bağımsızdır :

$$E[\underline{x}(0)\underline{u}'(0)] = 0 \quad \text{tüm } k \geqslant 0 \text{ için} \tag{10}$$

$$E[\underline{x}(0)\underline{v}'(0)] = 0 \quad \text{tüm } k \geqslant 0 \text{ için} \tag{11}$$

Denklem (3) den (11) e kadar verilen bağıntıların aşağıdaki özellikleri vardır :

1) Stokastik süreç $[\underline{x}(k)\ ;\ k = 0, 1, 2, \ldots]$ ve $[\underline{z}(i)\ ;\ i = 1, 2, \ldots, j]$ Gauss dağılımlıdır ve ortalaması sıfırdır.

2) $E[\underline{x}(j)\underline{u}'(k)] = 0\ ;\ k \geqslant j,\ j = 0, 1, 2, \ldots$ (12)

3) $E[\underline{z}(j)\underline{u}'(k)] = 0\ ;\ k \geqslant j,\ j = 1, 2, \ldots$ (13)

4) $E[\underline{x}(j)\underline{v}'(k)] = 0\ ;\ k$ ve j için $j = 0, 1, 2, \ldots$ ve $k = 1, 2, \ldots$ (14)

5) $E[\underline{z}(j)\underline{v}'(k)] = 0\ ;\ k \geqslant j,\ j, k = 1, 2, \ldots$ (15)

Burada Φ, Γ ve H dizeylerinin bilindiği varsayılmıştır.

ÖNGÖRÜ DENKLEMLERİNİN ÇIKARILMASI

Devingen dizge için verilen denklem (1) in her iki tarafının ölçü değerine göre koşullu ortalaması alınırsa,

$$\begin{aligned} &E[\underline{x}(k+1) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \underline{z}(k)] = \Phi(k+1, k) \\ &E[\underline{x}(k) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \underline{z}(k)] + \Gamma(k+1, k) \\ &E[\underline{u}(k) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \underline{z}(k)] \end{aligned} \tag{16}$$

elde edilir. Denklem (13) e göre $\underline{u}(k)$ ve $\underline{z}(k)$ birbirinden bağımsızdır. Böylece,

$$E[\underline{u}(k) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \underline{z}(k)] = E[\underline{u}(k)] = 0$$

olur. Bu değer denklem (16) da yerine konulursa,

$$\hat{\underline{x}}(k+1 \mid k) = \Phi(k+1, k)\hat{\underline{x}}(k \mid k) \tag{17}$$

bağıntısı ile tek-adım durum yöneyi için öngörülmüş kestirim elde edilmiş olur.

Tek-adım öngörülmüş yanılgı ortak değişinti dizeyi (covariance matrix) ise

$$\begin{aligned} P(k+1 \mid k) = E\,[\,&[\underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1 \mid k)] \\ &[\underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1 \mid k)]'\,] \end{aligned} \tag{18}$$

bağıntısı ile saptanabilir.

Tek-adım öngörü yanılgısı,

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{x}}(k+1 \mid k) &= \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1 \mid k) \\ &= \Phi(k+1, k)[\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k|k)] + \Gamma(k+1, k)\,\underline{u}(k) \\ &= \Phi(k+1, k)\,\tilde{\underline{x}}(k|k) + \Gamma(k+1, k)\,\underline{u}(k) \end{aligned} \tag{19}$$

bağıntısı ile gösterilir. Bu değerler denklem (18) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi'(k+1, k) \\ &+ \Phi'(k+1, k)\,E\,[\,[\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k|k)]\,\underline{u}'(k) \mid \underline{z}(1), \ldots, \\ &\underline{z}(k)\,]\,\Gamma'(k+1, k) \\ &+ \Gamma(k+1, k)\,E\,[\underline{u}(k)\,[\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k|k)\,]' \mid \underline{z}(1), \ldots, \\ &\underline{z}(k)\,]\,\Phi(k+1, k) \\ &+ \Gamma(k+1, k)\,Q\Gamma'(k+1, k) \end{aligned}$$

bulunur. Denklem (12)ye göre $E[\underline{x}(k)\underline{u}'(k)] = 0$ dır. Ayrıca $\underline{u}(k)$ nın ortalama değeri sıfırdır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} &E[\hat{\underline{x}}(k|k)\underline{u}'(k) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \underline{z}(k)] = \\ &\hat{\underline{x}}(k|k)\,E[\underline{u}'(k|k)] = \hat{\underline{x}}(k|k)\,E[\underline{u}'(k)] = 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece tek-adım ortak değişinti dizeyi

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi'(k+1, k) \\ &+ \Gamma(k+1, k)\,Q\Gamma'(k+1, k) \end{aligned} \tag{20}$$

bağıntısı ile saptanmış olur (Meditch 1969, Singh ve Titli 1978, Sayman 1983).

DÜZELTME DENKLEMLERİNİN ÇIKARILMASI

Eniyi süzgeçlenmiş kestirim,

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1|k+1) = E\,[\underline{x}(k+1) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \\ \underline{z}(k), \underline{z}(k+1)\,] \end{aligned} \tag{21}$$

bağıntısı ile gösterilebilir. Gauss koşullu beklentinin özelliğinden,

$$\begin{aligned} &E\,[\underline{x}(k+1) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \underline{z}(k), \underline{z}(k+1)\,] \\ &= E\,[\underline{x}(k+1) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \underline{z}(k), \tilde{\underline{z}}(k+1|k)\,] \\ &= E\,[\underline{x}(k+1) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(z), \ldots, \underline{z}(k)\,] \\ &+ E\,[\,\underline{x}(k+1) \mid \underline{z}(k+1|k)\,] \end{aligned} \tag{22}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{z}}(k+1|k) &= \underline{z}(k+1) - E\,[\underline{z}(k+1) \mid \underline{z}(1), \\ &\underline{z}(2), \ldots, \underline{z}(k)\,] = \underline{z}(k+1) - \tilde{\underline{z}}(k+1|k) \end{aligned} \tag{23}$$

dır. Bu bağıntı (k + 1) de gerçek ve öngörülmüş ölçüler arasındaki farktır ve "kalıntı ölçü" olarak adlandırılmıştır.

Denklem (2) öngörülmüş ölçü kestirim tanımlamasında yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \hat{\underline{z}}(k+1|k) &= E\,[\underline{z}(k+1) \mid \underline{z}(1), \underline{z}(2), \ldots, \underline{z}(k)\,] \\ &= H(k+1)\,E\,[\underline{x}(k+1) \mid \underline{z}(1), \ldots, \underline{z}(k)\,] \\ &+ E\,[\,\underline{v}(k+1) \mid \underline{z}(1), \ldots, \underline{z}(k)\,] \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (15) e göre ikinci terim sıfır olduğundan,

$$\hat{\underline{z}}(k+1|k) = H(k+1)\hat{\underline{x}}(k+1|k) \tag{24}$$

bulunur.

Denklem (22) denklem (21) de yerine konulursa,

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1|k) + E[\underline{x}(k+1) \\ |\underline{z}(k+1|k)] \tag{25}$$

elde edilir. Burada $\underline{x}(k+1)$ ve $\tilde{\underline{z}}(k+1|k)$ sıfır ortalamalı Gauss dağılımını sağlar. Bundan yararlanarak aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$E[\underline{x}(k+1)|\tilde{\underline{z}}(k+1|k)] = P_{x\tilde{z}} P^{-1}_{\tilde{z}\tilde{z}} \tilde{\underline{z}} \tag{26}$$

Bu bağıntıda,

$$P_{x\tilde{z}} = E[\underline{x}(k+1)\tilde{\underline{z}}'(k+1|k)]$$

$$P_{\tilde{z}\tilde{z}} = E[\tilde{\underline{z}}(k+1|k)\tilde{\underline{z}}'(k+1|k)]$$

olarak tanımlanır. Diğer yandan,

$$\kappa(k+1) = P_{x\tilde{z}} P^{-1}_{\tilde{z}\tilde{z}}$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre,

$$E[\underline{x}(k+1)|\tilde{\underline{z}}(k+1|k)] = \kappa(k+1)\tilde{\underline{z}}(k+1|k)$$

yazılabilir. Öte yandan denklem (23), (24) ve (17) den,

$$\tilde{\underline{z}}(k+1|k) = \underline{z}(k+1) - H(k+1)\Phi(k+1,k) \\ \hat{\underline{x}}(k|k) \tag{27}$$

elde edilir. Böylece,

$$E[\underline{x}(k+1)\tilde{\underline{z}}(k+1|k)] = \kappa(k+1)[\underline{z}(k+1) \\ - H(k+1)\Phi(k+1,k)\underline{x}(k|k)]$$

bulunur. Bu bağıntı ve denklem (17), denklem (25) de yerine konulursa,

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k+1) = \Phi(k+1.k)\hat{\underline{x}}(k|k) + \kappa(k+1) \\ [\underline{z}(k+1) - H(k+1)\Phi(k+1,k)\hat{\underline{x}}(k|k)] \tag{28}$$

bağıntısı ile durum yöneyinin eniyi süzgeçlenmiş kestirimi elde edilmiş olur.

κ (k+1), KALMAN SÜZGEÇ KAZANCININ HESAPLANMASI

Denklem (27), denklem (2) ve öngörü yanılgısının tanımından,

$$\tilde{\underline{z}}(k+1|k) = H(k+1)\tilde{\underline{x}}(k+1|k) + \underline{v}(k+1) \tag{29}$$

yazılabilir. Bu bağıntıdan yararlanarak,

$$P_{\tilde{z}\tilde{z}} = E\{[\underline{z}(k+1) - \hat{\underline{z}}(k+1|k)] \\ [\underline{z}(k+1) - \underline{z}(k+1|k)]'\} \\ = H(k+1)P(k+1|k)H'(k+1) \\ + H(k+1)E[\tilde{\underline{x}}(k+1|k)\underline{v}'(k+1)] \\ + E[\underline{v}(k+1)\tilde{\underline{x}}'(k+1|k)]H'(k+1) + R(k+1) \tag{30}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıda ortadaki iki terimin beklenen değeri sıfırdır. Ortadaki birinci terim, ikinci terimin devriği olduğundan, birinci terimin sıfır olduğunu göstermek yeterlidir. Ortadaki birinci terimin beklenen değeri,

$$E[\tilde{\underline{x}}(k+1|k)\underline{v}'(k+1)] = E[\underline{x}(k+1)\underline{v}'(k+1)] \\ - E[\underline{x}(k+1|k)\underline{v}'(k+1)] \tag{31}$$

biçiminde yazılabilir. Denklem (14) e göre denklem (31) in birinci terimi sıfırdır.

Ölçü değerleri, $[\underline{z}(1), \underline{z}(2), \ldots, \underline{z}(j)]$, temeline göre $\underline{x}(k)$ nın doğrusal kestirimi

$$\hat{\underline{x}}(k|j) = \sum_{i=1}^{j} A(i)\underline{z}(i) \tag{32}$$

bağıntısı ile tanımlanabilir. Burada A(i), nxm-boyutlu bir dizeydir (Meditch 1969, Sayman 1983).

Denklem (13) e göre, gözlem değerleri $\underline{z}(i)$ ile ölçü gürültüsü $\underline{v}(k)$ nın değerleri birbirinden bağımsız olduğundan, denklem (31) in ikinci teriminin

$$E[\underline{x}(k+1|k)\underline{v}'(k+1)] = \\ A(i)E[\underline{z}(i)\underline{v}'(k+1)] = 0 \tag{33}$$

olduğu görülür. Böylece denklem (31) deki eşitliğin sıfır olduğu saptanmış olur. Denklem (30) yeniden yazılırsa,

$$P_{\tilde{z}\tilde{z}} = H(k+1)P(k+1|k)H'(k+1) + R(k+1) \tag{34}$$

elde edilir.

Benzer biçimde $P_{x\tilde{z}}$ hesaplanırsa,

$$P_{x\tilde{z}} = E[\underline{x}(k+1)\tilde{\underline{z}}'(k+1|k)] \\ = E[\tilde{\underline{x}}(k+1|k)\tilde{\underline{x}}'(k+1|k)]H'(k+1) \\ + E[\tilde{\underline{x}}(k+1|k)\underline{v}'(k+1)] \\ + E[\hat{\underline{x}}(k+1|k)\tilde{\underline{x}}'(k+1|k)]H'(k+1) \\ + E[\hat{\underline{x}}(k+1|k)\underline{v}'(k+1)]$$

elde edilir. Denklem (31), (33) ve koşullu beklentinin özelliğinden yararlanarak, bu bağıntıda ikinci, üçüncü ve dördüncü terimlerin sıfır olduğu görülür. Bu nedenle,

$$P_{x\tilde{z}} = P(k+1|k)H'(k+1) \tag{35}$$

elde edilir. Denklem (34) ve (35), yukarıda değinilen κ (k+1) in tanımlanmasında yerine konulursa,

$$\kappa(k+1)=P(k+1|k)H'(k+1)/[H(k+1)P(k+1|k)H'(k+1)+R(k+1)] \quad (36)$$

bağıntısı elde edilir. R(k+1) in artı ve belirli dizey olduğu varsayılırsa, bunun evriğinin de var olduğu kabul edilebilir. κ(k+1), Kalman süzgeç kazancı olarak adlandırılır (Medich 1969, Singh ve Title 1978, Sayman 1983).

P(k+1|k+1) NIN HESAPLANMASI

Tek-adım süzgeçlenmiş yanılgı ortak değişinti dizeyi,

$$P(k+1|k+1)=E[\underline{\tilde{x}}(k+1|k+1)\underline{\tilde{x}}'(k+1|k+1)] \quad (37)$$

bağıntısı ile saptanır. Denklem (28) ve (29) yardımıyla $\underline{\tilde{x}}(k+1|k+1)$ hesaplanabilir :

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{x}}(k+1|k+1) &= \underline{x}(k+1)-\underline{\hat{x}}(k+1|k+1)\\ &= \underline{x}(k+1)-[\underline{\hat{x}}(k+1|k)+\kappa(k+1)\underline{\tilde{z}}(k+1|k)]\\ &= \underline{\tilde{x}}(k+1|k)-\kappa(k+1)\,[H(k+1)\underline{\tilde{x}}(k+1|k)+\underline{v}(k+1)]\\ &=[I-\kappa(k+1)H(k+1)]\underline{\tilde{x}}(k+1|k)-\kappa(k+1)\underline{v}(k+1) \quad (38)\end{aligned}$$

Burada I, nxm-boyutlu birim dizeydir. Denklem (31) e göre,

$$E[\underline{\tilde{x}}(k+1|k)\underline{v}'(k+1)]=0$$

olduğundan, bunun devriği de sıfır olur.

Kestirim yanılgısının ortak değişinti dizeyi,

$$\begin{aligned}P(k+1|k+1)=&[I-\kappa(k+1)H(k+1)]E[\underline{\tilde{x}}(k+1|k)\underline{\tilde{x}}'(k+1|k)\\ &\cdot[I-\kappa(k+1)H(k+1)]'\\ &+\kappa(k+1)H(k+1)\underline{v}'(k+1)]\kappa'(k+1)\\ =&[I-\kappa(k+1)E(k+1)]P(k+1|k)[I-\kappa(k+1)H'(k+1)]'\\ &+\kappa(k+1)R(k+1)\kappa'(k+1)\end{aligned}$$

bağıntısıyla gösterilir. Bir dizi matematik işlemden sonra,

$$P(k+1|k+1)=[(I-\kappa(k+1)H(k+1)]\,P(k+1|k) \quad (39)$$

bağıntısı ile süzgeçlenmiş yanılgı ortak değişinti dizeyi hesaplanmış olur (Meditch 1969, Sage ve Melsa 1971, Singh ve Title 1978, Sayman 1983).

Şekil 1'de Ayrık-Kalman süzgecinin işlevsel çizeneği (block-diagram), Şekil 2'de ayrık-Kalman süzgeci hesaplamasının akış çizeneği (flow chart) görülmektedir.

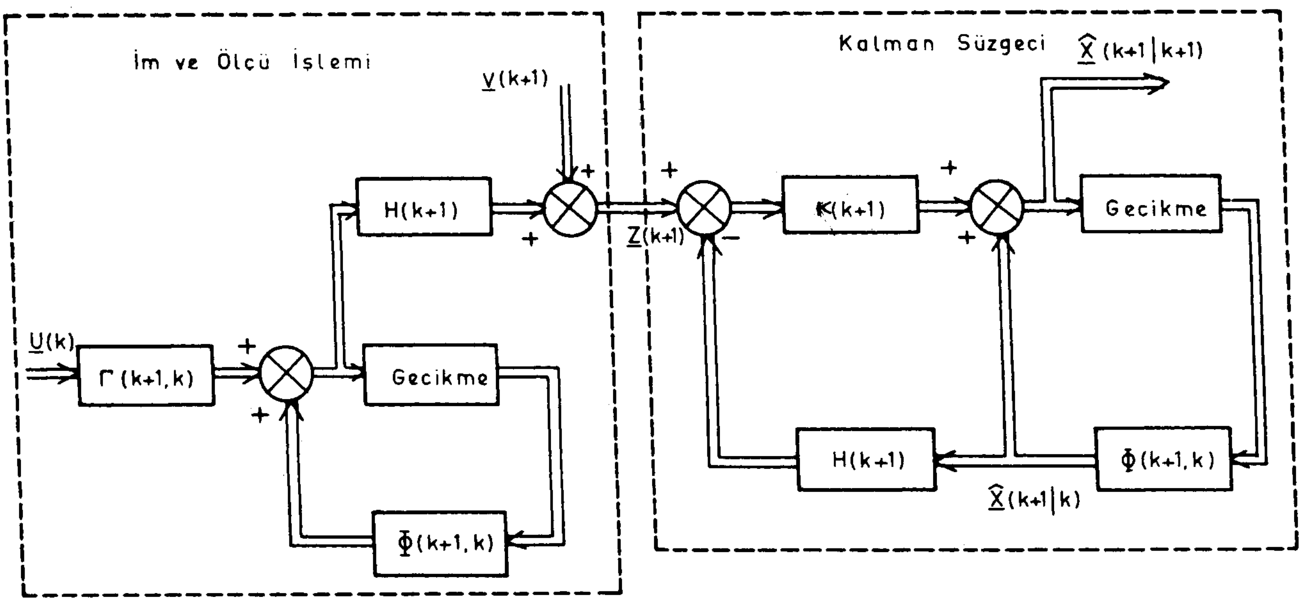
GEÇİŞ DÜZEYİNİN ÇIKARTILMASI

Sismik kaynak dalgacığından yararlanarak çeşitli yöntemlerle Φ, Γ ve H değerleri saptanabilir. Burada Laplace dönüşümünden yararlanılacaktır. Bu yöntemle sismik kaynak dalgacığından Φ, Γ ve H şöyle elde edilebilir:

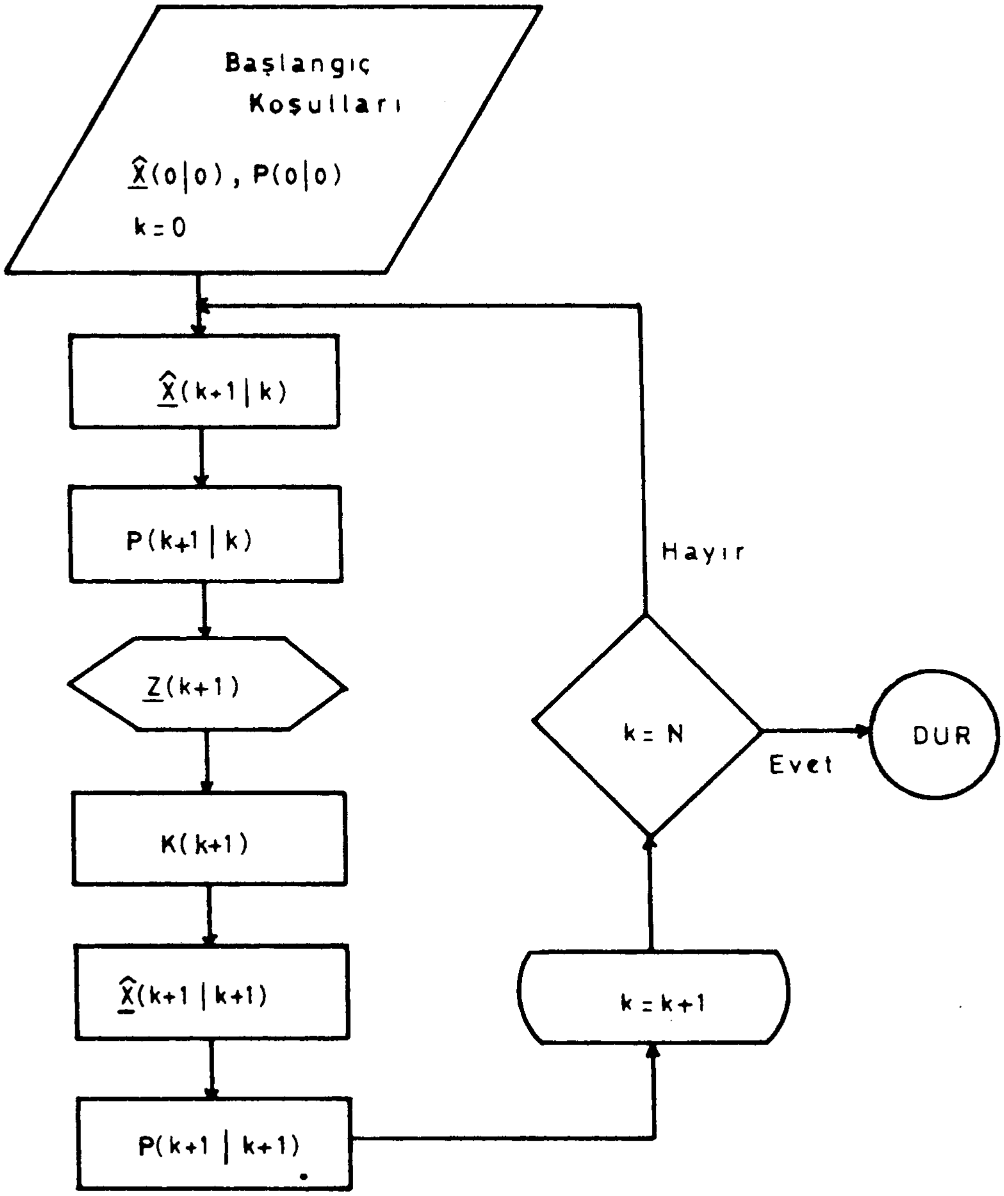
a) Sürekli zaman dalgacığının Laplace dönüşümü (transform) alınarak, dönüşüm paralel bağıntılı ikinci kerte değiştirme işlevlerine parçalanabilir.

b) İkinci kerte değiştirme işlevlerinin herbiri için durum-uzay biçimi elde edilir.

c) Dalgacık için sürekli zaman durum-uzay biçimi elde etmede; durum-uzay biçimleri birleştirilebilir (Mendel ve Kormylo 1978).



Şekil 1. Ayrık - Kalman süzgeci ve im biçiminin işlevsel çizeneği



Şekil 2. Ayrık - Kalman süzgeç denklemlerinin öngörü ve düzeltme için akış çizeneği

ÖRNEK

Yapay Sismik İşlevin Elde Edilmesi

Robinson (1957, 1967) yapay sismik izin yansıma katsayıları ile bir sismik kaynak dalgacığın evrişiminden elde edilebileceğini göstermiştir. Matematiksel olarak bu işlem,

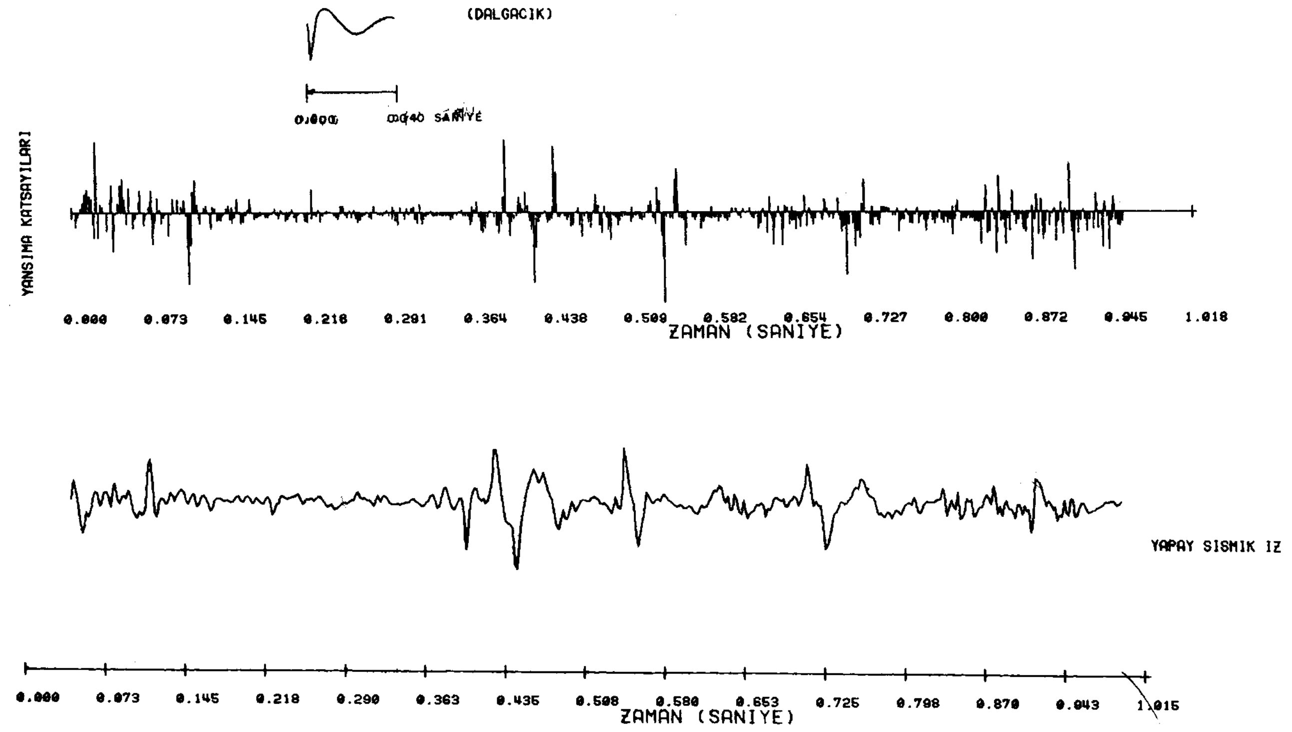
$$z(k) = V_R(k) + n(k) \tag{40}$$

$$V_R(k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(j)\,\omega\,(k-j) \tag{41}$$

bağıntısı ile gösterilebilir. Bu bağıntıda, $V_R(k)$ gürültüsüz sismik izi, $n(k)$ ölçü gürültüsünü, k zaman sayacını, $\omega(i)$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$ sismik kaynak dalgacığını, $\mu(j)$ $j = 1, 2, \ldots, k$ yansıma katsayıları dizisini göstermektedir.

Türkiye Petrolleri Anonim Ortaklığı'ndan (TPAO) alınan bir kuyu ses kütüğünden 0,002 saniye aralığıyla sağlanan yansıma katsayılarının sismik kaynak dalgacığı ile evrişiminden yapay sismik iz elde edilmiştir (Şekil 3). Sismik kaynak dalgacığı

$$\omega(t) = -1360te^{-500t} + 0.5\,e^{-15.3t}\sin\left(\frac{2.\pi t}{0.06}\right) \tag{42}$$



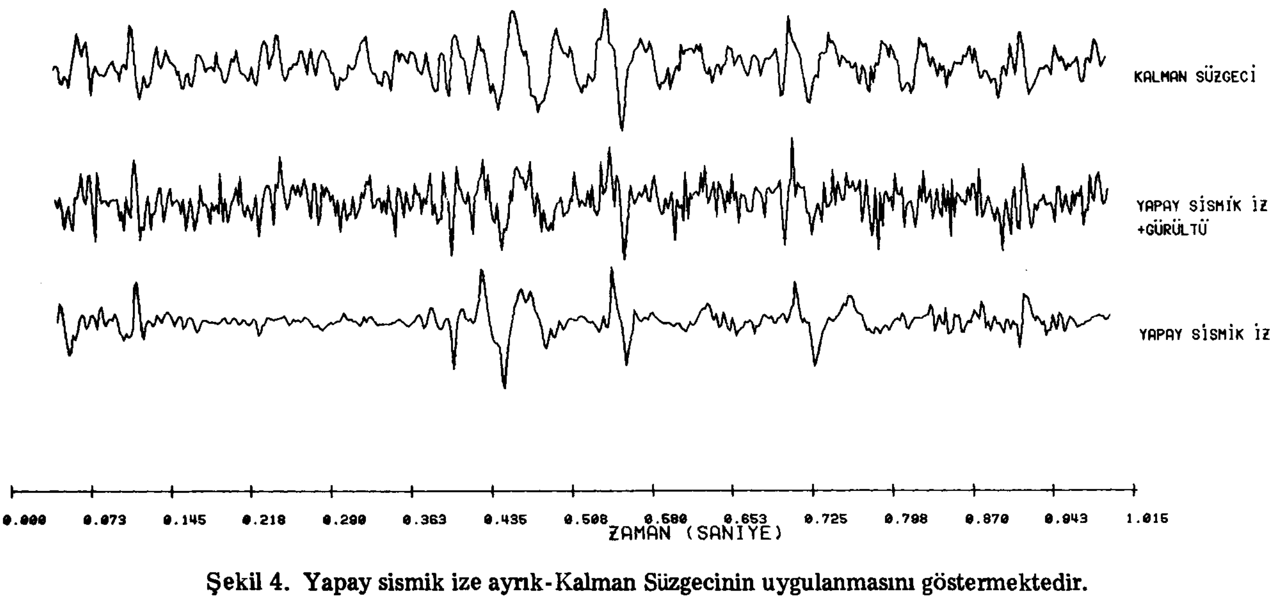
Şekil 3. Yansıma katsayıları, kaynak sismik dalgacık ve gürültüsüz sismik iz görülmektedir.

bağıntısından yararlanarak hesaplanmıştır (Kramer ve diğ. 1968). Gerçek verilere benzeşim sağlamak amacıyla bu yapay sismik ize Gauss gürültüsü eklenerek gürültülü yapay sismik iz oluşturulmuştur. İm/Gürültü oranı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Crump 1974):

$$\frac{I}{G} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} V_R^2(k)}{\sigma_N^2} \qquad (43)$$

Bu bağıntıda $V_R(k)$ sayısallaştırılmış gürültüsüz yapay sismik izi, N ayrık sismik örnekleme sayısını, σ_N^2 eklenen Gauss gürültüsünün değişintisini göstermektedir.

Şekil 3'de gürültüsüz yapay sismik iz yansıma katsayıları ile dalgacığın evrişiminden elde edilişi görülmektedir. Bu sismik ize Gauss (nórmal) gürültü eklenerek im/gürültü oranı değişik sismik izler elde edilmiştir.

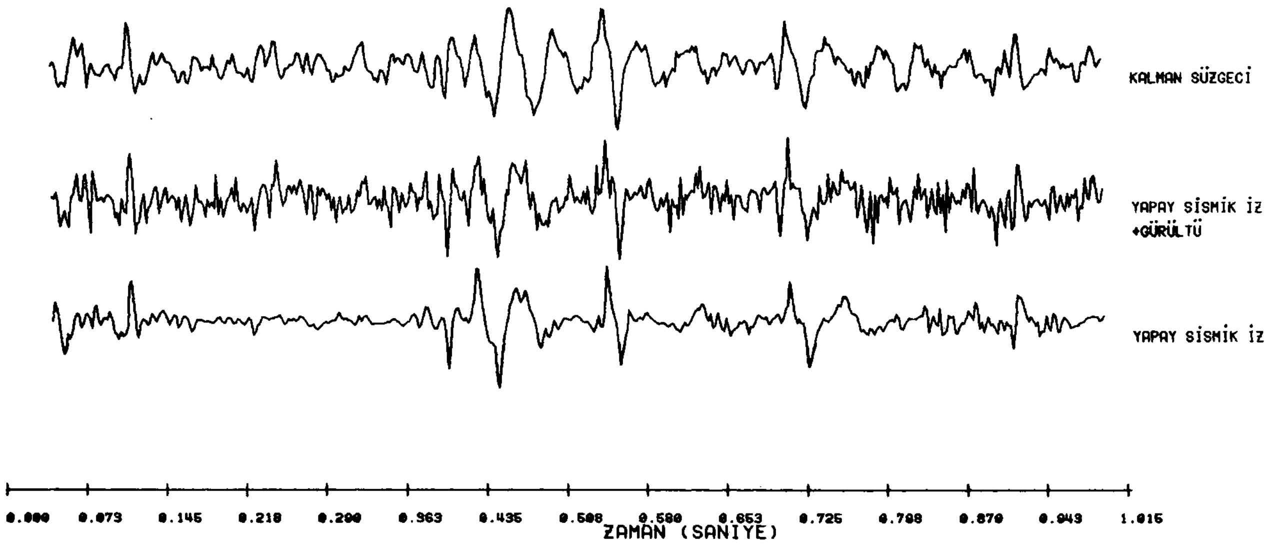


Şekil 4. Yapay sismik ize ayrık-Kalman Süzgecinin uygulanmasını göstermektedir.
Şekil 4a. Im/Gürültü = 0.5

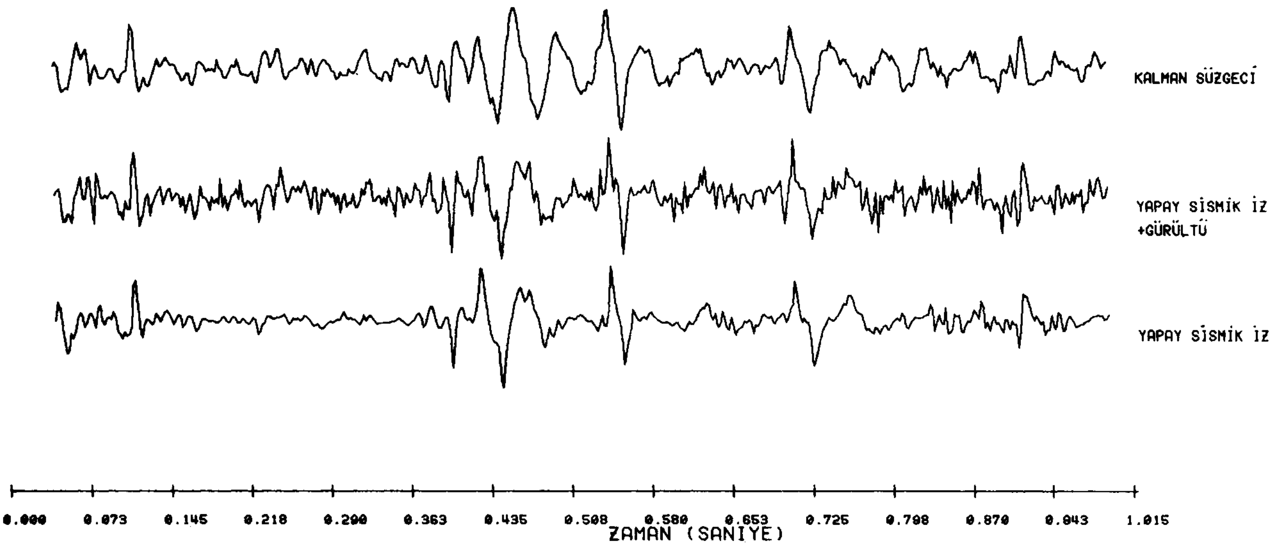
Şekil 4a'da im/gürültü oranı 0.5 olan gürültülü yapay sismik izde 0.067, 0.404, 0.512, 0.684 saniyelerde yansıma dalgacıkları az çok seçilebilmekte ve diğer yerlerde gürültü tarafından maskelendiğinden dalgacıklar iyi seçilememektedir. Ayrık-Kalman süzgecinden geçtikten sonra 0.067, 0.404, 0.512, 0.684, 0.870 saniyelerde yansıma dalgacıkları daha açık görülmektedir.

Şekil 4b, 4c, 4d'de benzer biçimde im/gürültü oranları 1, 2, 10 olan sismik izlerden ayrık-Kalman süzgecinin çıktılarının gürültüsüz sismik ize yaklaşımları görülmektedir.

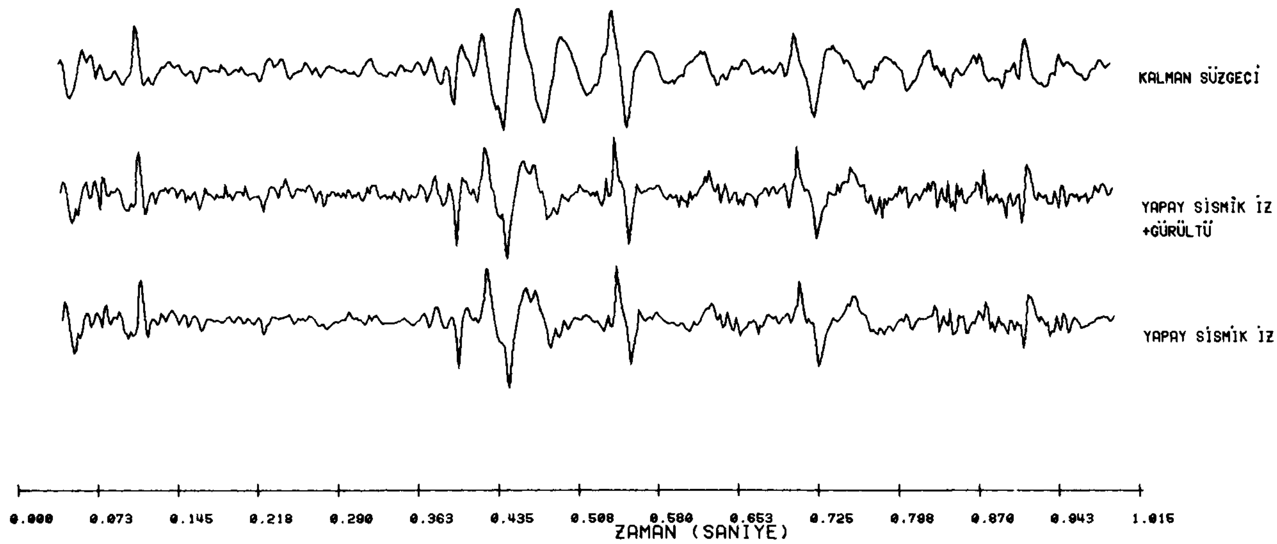
Genel olarak im/gürültü oranı arttıkça gürültülü sismik izden ayrık-Kalman süzgeci çıktısının gürültüsüz sismik ize yaklaşımının da belirgin olduğu izlenmektedir.



Şekil 4b. Im/Gürültü = 1.0



Şekil 4c. Im/Gürültü = 2.0



Şekil 4d. Im/Gürültü = 10.0

SONUÇLAR

Bu çalışmada sismik izlerin tersevrişim sorununa Kalman süzgeci ile yaklaşım incelenmiştir. Kalman süzgeci zaman-ortamında süzme işini gerçekleştirmektedir ve en önemli özelliklerinden birisi geri beslemeli olmasıdır. Bu özellik, süzgeç işlemlerinde bilgisayardan yararlanmakta kolaylık sağlar. Süzgeçleme sırasında tüm işlemlerin depolanmasına gereksinim yoktur. $\underline{x}(k|k)$, durum-yöneyinin k zamanından k+1 zamanına kadar depolanması yeterlidir. Bununla beraber, $\Phi(k+1, k)$, $\Gamma(k+1)$, $Q(k)$ ve $R(k+1)$ dizeylerinin $k = 0, 1, 2, \ldots,$ için sürekli depolanması gerekir. Bu makalede bu değerler sabit olduğundan bir kere depolanması yeterlidir.

İm/gürültü oranı değişik gürültülü yapay sismik izlere Kalman süzgecinin başarı ile uygulandığı görülmektedir.

KAYNAKLAR

Aminzadeh, F. ve Mendel, J.M. 1983, Normal incidence layered system state-space models which indude absorbtion effects, Geophysics 48, 259-271.

Ashrafi, F.H. ve Mendel, J.M. 1982, Estimation of parameter in lossless layered media system, IEEE Trans, Auto. Contr. AC-27, 31-49.

Bayless, J.M. ve Brigham, E.O. 1970, Applications of the Kalman filter to continuous signal restoration, Geophysics 35, 2-23.

Chi, C.Y., Mendel, J.M. ve Hampson, D. 1984, A Computational fast Approach to maximum likelihood deconvolution, Geophysics 49, 550-565.

Cox, H. 1964, On the Estimation of state variables and parameters for noisy Dynamic Systems, IEEE, Trans on Auto. Contr. AC. 9, 5-12.

Crump, N.D. 1974, A Kalman filter Approach to the deconvolution of seismic signals, Geophysics 39, 1-13.

Fagin, S.L. 1964, Recursive Linear Regression Theory, Optimal Filter Theory and Error Analysis of Optimal Systems, International Conversion Record, part I, New York.

Greensite, A.L. 1970, Elements of Modern Control Theory", Control Theory, V.I., Spartan Books, New York.

Ho, Y.C. 1962, On the stochastic approximation method and optimal control filtering theory, J. Math. Anal. Appl. 6, 152-154.

Ho, Y.C. 1963, The Method of Least Squares and Optimal Filtering Theory, Rand. Corp., Santa Monica, Calif., Memo, RM-3329-PR.

Ho, Y.C. ve Lee, R.C. 1964, A Bayesian approach to the problems in stochastic estimation and control, IEEE Trans. Auto. Contr. AC-9, 333-339.

Kailath, T. 1968, An Innovation Approach to Least-Squares Estimation. Part I. Linear Filtering in Additive White Noise, IEEE Trans. On. Auto. Contr. AC-13, 646-655.

Kalman, R.E. 1960, A New approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, Journal of Basic Eng. Ser. D. 82, 34-45.

Kalman, R.E. ve Bucy R.S. 1961, New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, Ser. D., Journal of Basic Engr. 83, 95-107.

Kormylo, J. ve Mendel J.M. 1978, On maximum likelihood detection and estimation of reflection coefficients, 48th Annual Meeting of SEG, San Fransisco, Calif.

Kramer, J.J., Peterson, R.W. ve Walter W.C. 1968, Seismic energy sources 1968 handbook, Presented at the 38th Annual International SEG Meeting, Denver, Colorado.

Kuo, B.C. 1970, Discrete-Data Control Systems, Prentice Hall Inc.

Meditch, J.S. 1969, Stockhastic Optimal Linear Estimation and Control, McGraw Hill, New York.

Mendel, J.M. 1973, Discrete Techniques of Parameter Estimation. The Equation Error Formulation, Marcel Dekkar, Inc., New York.

Mendel, J.M. ve Kormylo, J. 1978, Single channel white noise estimations for deconvolution, Geophysics 43, 102-124.

Mendel, J.M., Kormylo, J., Aminzadeh, F., Lee, J.S. ve Ashrofi F.N. 1981, A novel approach to seismic signal processing and modeling, Geophysis 64, 1398-1414.

Ogata, K. 1970, Modern Control Engineering, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

Ho, N. ve Meder, H.G. 1972, The Kalman filter as prediction error filter, Geophysical Prospecting 20, 549-560.

Rauch, H.E., Tung, F. ve Striebel, C.T. 1965, Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems, AIAA j. 3, 1445-1450.

Robinson, E.A. 1957, Predictive decomposition of seismic traces, Geophysics 22, 767 - 778.

Robinson, E.A. 1967, Predictive decomposition of time series with application to seismic exploration, Geophysics 32, 414 - 484.

Sage, A.P. ve Melsa, J.M. 1971, Estimation Theory with Application to Communication and Control, McGraw Hill, New York.

Sayman, A. 1983, Kalman Süzgecinin Sismik Verilere Uygulanması, Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Doktora Tezi.

Singh, M.G. ve Titli, A. 1978, Systems Decomposition, Optimization and Control, Pergamon Press.

Smith, G.L. 1965, The scientific interential relationships between statistical estimation, decision theory, and modern filter theory, Proc. JACC Rensselaer Polytechnic Inst., 350 - 359.

Tamer, A.R. 1977, Kalman Filtresinin Sismik Sinyallerin Dekonvolüsyon İşlemlerine Uygulanması, İ.Ü. Fen Fakültesi, Tatbiki Jeofizik Kürsüsü, Jeofizik Yüksek Mühendisliği Diploma Travayı.