

YANSIMA MATRİSLERİNDEN YARARLANARAK DİK OLMAYAN GELİŞ HALİNDE TABAKA PARAMETRELERİNİN HESAPLANMASI

Estimation of Layer Parameters of An Elastic Medium From Reflection Coefficient Matrices for Non-Normal Incidence

Kenan GELİŞLİ* ve Ömer ALPTEKİN*

ÖZET

Yansıma sismolojisinde en önemli problemlerden birisi yüzeyde kaydedilen yansıma sismogramlarından tabaka parametrelerinin (yoğunluk, P-dalga hızı, S-dalga hızı) elde edilmesidir. Düzlem dalganın sınıra dik geliş halinde sadece akustik empedanslar ($Z = \rho \cdot V$) hesaplanabilmektedir. Ancak dik olmayan geliş halinde Aminzadeh (1984)'nin önerdiği algoritma ile yansıma katsayısı matrisleri kullanılarak tabaka parametreleri saptanabilmektedir. Bu çalışmada çeşitli tabakalı yer modelleri için yansıma katsayısı matrisleri kullanılarak iteratif olarak bir alttaki tabakanın parametreleri elde edilmeye çalışılmıştır. Önce Frasier (1970)'in tanımladığı yansıma ve iletim matrisleri ile tabaka parametre matrisleri arasındaki ilişkiden yararlanarak bir akustik ortamda dalganın dik olmayan geliş halinde (dik geliş halindeki benzer olarak) bir tabaka empedans matrisi tanımlandı. Daha sonra $n+1$ inci tabakanın tabaka empedans matrisi ile n inci tabakanın yansıma katsayısı ve parametre matrisleri arasında bir ilişki çıkarıldı. Bu ilişkiden yararlanarak alt tabakanın parametreleri ayrı ayrı hesaplanabilmektedir. Bu hesaplamalar için sadece düzlem dalganın geliş açısı, ilk tabakanın parametreleri ve tabakalı ortamın yansıma matrislerinin bilinmesi gerekmektedir. Deneylerimiz Aminzadeh'in önerdiği algoritmanın başarılı sonuçlar verdiğini göstermektedir. Yansıma matrislerinin sismogramlardan ters çözüm yoluyla hesaplanması halinde bu yöntem tabaka parametrelerinin saptanmasında kullanılabilir.

ABSTRACT

An important problem in reflection seismology is to recover layer parameters (e.g., density, P-wave velocity, S-wave velocity) for an elastic medium from the reflection seismograms recorded at the free surface. In the case of normal incidence, only the acoustic impedance ($Z = \rho \cdot V$) can be computed from the reflection seismogram. In the case of non-normal incidence however, the layer parameters can be computed from the reflection coefficient matrices as described by Aminzadeh (1984). In this study, we attempt to compute the layer parameters from reflection coefficient matrices by employing the Aminzadeh's algorithm. We first define an impedance matrix for an acoustic medium from the reflection, transmission and the layer parameters matrices (Frasier 1970) in the case of non-normal incidence. Later, a matrix relationship between the reflection coefficient and the layer parameters matrices of the n th layer and the layer impedance matrix of $n+1$ th layer is defined. From this relationship it is possible to compute the layer parameters of the subsurface recursively. Only the layer parameters of the first layer and the reflection coefficient matrices for the layered medium, and the angle of incidence for the plane wave must be known to perform these computations. Our experiments by using Aminzadeh's algorithm produce good results on synthetic data.

* Karadeniz Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Jeofizik Mühendisliği Bölümü, Trabzon

GİRİŞ

Arama jeofiziğinde amaç yer altındaki yapıyı elde etmek olduğuna göre, tabakaların parametrelerinin saptanması çok önemli bir problemdir. Tabakalı bir ortamda sınıra dik gelen düzlem dalga durumunda her bir sınırın yansıma katsayılarından her tabakanın akustik empedansı (Z) hesaplanabilmektedir. Bu ters çözüm işlemi gürültüsüz durum için Kunetz ve d' Erceville (1962) ve gürültülü durum için Habibi - Ashafi (1978)'de verilmiştir. Fakat dik geliş halinde akustik empedans (Z) dan yoğunluk (ρ) ve hız (V) nin çözülmesi mümkün değildir.

Frasier (1970) tabakalı bir ortam için yansıma ve iletim matrislerinin nasıl hesaplanacağını göstermiştir. Bunun için her sınırdaki dalga alanı sürekli olmalıdır. Önce P ve S dalgalarının hızları, yoğunluk ve geliş açılarının fonksiyonu olan (2×2) boyutlu tabaka parametre matrisleri tanımlanmıştır. Bundan başka elastik ortamda sınıra dik gelmeyen düzlem dalga durumu için bir tabaka empedans matrisi tanımlanmıştır. Daha sonra n inci tabakanın tabaka parametre matrisleri ve yansıma matrisi ile n+1 inci tabakanın tabaka empedansı arasında bir ilişki kurulmuştur. Tabakanın akustik empedansı (Z) dik gelen düzlem dalga hali için yansıma katsayılarından elde edilmesine rağmen ρ ve V parametreleri ayrı ayrı elde edilemezler. Fakat dik olmayan geliş halinde tabaka empedans matrisinin elementlerinden tabaka parametreleri elde edilebilir (Aminzadeh 1984).

Bu çalışmada Aminzadeh (1984)'nin tabaka parametrelerinin hesaplanması için önerdiği algoritma irdelenerek bir bilgisayar programı düzenlenmiş ve değişik yeriçi modelleri üzerinde denenerek başarılı sonuçlar alınmıştır. Sismogramlardan ters çözüm yolu ile yansıma matrislerinin elde edilebilmesi halinde, bunlardan yararlanarak ve Aminzadeh'in algoritması kullanılarak tabaka parametreleri sağlıklı bir şekilde hesaplanabilecektir.

YANSIMA KATSAYILARINDAN TABAKA EMPEDANSLARININ HESAPLANMASI

Bu bölümde dik gelen dalga durumu için yansıma katsayıları ve tabakanın akustik empedansı arasındaki ilişki verilmektedir. Bitişik iki tabakanın akustik empedansları Z_n ve Z_{n-1} ise sınıra dik gelen düzlem dalga halinde n inci tabakanın yansıma katsayısı r_n ,

$$r_n = \frac{Z_n - Z_{n-1}}{Z_n + Z_{n-1}} \quad (1)$$

ile verilir. (1) denkleminde Z_n ,

$$Z_n = \frac{1 + r_n}{1 - r_n} Z_{n-1} \quad (2)$$

olur. İlk tabakanın akustik empedansı (Z_0) ve yansıma katsayıları bilirse n inci tabakanın akustik empedansı (Z_n) (2) denkleminde hesaplanabilir. Yani tabakalı ortamın yansıma katsayıları ve tabakanın akustik empedansı arasındaki ilişkiden bir alt tabakaya ait akustik empedans hesaplanabilmektedir (Kunetz ve d'Erceville 1962). Fakat tabakaya ait yoğunluk ve hızın hesaplanması olanaksızdır.

YANSIMA MATRİSLERİNDEN YARARLANARAK DİK OLMAYAN GELİŞ HALİNDE TABAKA EMPEDANSININ HESAPLANMASI

Dik olmayan geliş halinde her arayüzeyin yansıma ve iletim katsayıları (2×2) boyutunda R_n, T_n, R'_n ve T'_n (tabakanın altından ve üstünden yansıma ve iletim katsayıları) olmak üzere dört matrisle verilir (Frasier 1970). Habibi Ashrafi (1978)'in geliştirdiği aşağı doğru iterasyon tekniğinin genelleştirilmesi ile dik olmayan gelişler için de bu matrisler tanımlanabilir (Shiva 1982).

Tabaka parametrelerinin saptanması için yansıma ile iletim matrisleri R_n, T_n ve parametre matrisleri $A_n, B_n, L_n, A_{n+1}, B_{n+1}, L_{n+1}$ e ihtiyaç vardır. Parametre matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Frasier 1970) :

$$A = \begin{bmatrix} -q^p & 1 \\ (1-\gamma)\rho q^p & \rho\gamma \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -q^s \\ -\rho\gamma & (1-\gamma)\rho q^s \end{bmatrix}, \quad (3b)$$

$$L = \begin{bmatrix} (\rho q^p)^{1/2} & 0 \\ 0 & (\rho q^s)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (3c)$$

Burada,

$$q^p = ((c/V^p)^2 - 1)^{1/2} \quad (3d)$$

$$q^s = ((c/V^s)^2 - 1)^{1/2} \quad (3e)$$

$$\gamma = 1 - 2(V^s/c)^2 \quad (3f)$$

dir. (3d) ve (3f) deki c sismik dalganın yatay faz hızıdır ve

$$c = \frac{V^P}{\sin\theta} \quad (3g)$$

ile verilir. Burada V^P düzlem P dalgasının hızı, θ ise sınıra geliş açısıdır. Yukarıdaki denklemlerde tabakayı gösteren indisler basitlik olsun diye yazılmamıştır. Frasier (1970)'in (A-11) denklemleri aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$B_n = -B_n L_n^{-1} R_n' L_n + B_{n+1} L_{n+1}^{-1} T_n' L_n, \quad (4a)$$

$$A_n = A_n L_n^{-1} R_n' L_n + A_{n+1} L_{n+1}^{-1} T_n' L_n. \quad (4b)$$

(4a) ve (4b) nin her iki tarafı sırasıyla B_n^{-1} ve A_n^{-1} ile çarpılırsa

$$I = -L_n^{-1} R_n' L_n + B_n^{-1} B_{n+1} L_{n+1}^{-1} T_n' L_n \quad (5)$$

ve

$$I = L_n^{-1} R_n' L_n + A_n^{-1} A_{n+1} L_{n+1}^{-1} T_n' L_n \quad (6)$$

olur. Şimdi de (5) ve (6) nin her iki tarafı sırasıyla önce L_n sonra L_n^{-1} ile çarpılırsa

$$I = -R_n' + L_n B_n^{-1} B_{n+1} L_{n+1}^{-1} T_n' \quad (7)$$

ve

$$I = R_n' + L_n A_n^{-1} A_{n+1} L_{n+1}^{-1} T_n' \quad (8)$$

elde edilir.

(7) ve (8) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir :

$$I + R_n' = L_n B_n^{-1} B_{n+1} L_{n+1}^{-1} T_n' \quad (9)$$

ve

$$(I - R_n')^{-1} = (T_n')^{-1} L_{n+1} A_{n+1}^{-1} A_n L_n^{-1}. \quad (10)$$

(9) ve (10) renklemelerinin her iki tarafı karşılıklı çarpılırsa

$$(I + R_n') (I - R_n')^{-1} = L_n B_n^{-1} B_{n+1} A_{n+1}^{-1} A_n L_n^{-1} \quad (11)$$

elde edilir. Dik gelen dalga için limit durumu c^{∞} Aminzadeh (1982) EK-B'de açıklanmıştır. (2) denkleminin

sağ tarafı ile (dalganın dik gelmesi durumu için yansımaya katsayısına bağlı olarak tabaka empedansı) (11) denkleminin sol tarafı yapısal olarak birbirine benzemektedir. (11) denklemi dik gelmeyen dalga durumu için yansımaya matrisleri ile parametre matrisleri arasındaki ilişkiyi gösterir. (11) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$B_{n+1} A_{n+1}^{-1} = B_n L_n^{-1} (I + R_n') (I - R_n')^{-1} L_n A_n^{-1} \quad (12)$$

Bu denklem $n+1$ inci tabakanın parametre matrisleri ile n inci tabakanın parametre ve yansımaya matrisleri arasındaki ilişkiyi gösterir. (12) denklemi $B_i A_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, R_j , $j = 0, 1, \dots, i$ ve A_0 , B_0 ve L_0 'in bilinmesiyle çözülebilir.

(12) denklemi ρ_n ve V_n nin çarpımını veren (2) denklemi gibi A_{n+1}^{-1} ve B_{n+1} in çarpımını verir, tabaka parametrelerini vermez. (2) ve (12) denklemleri karşılaştırılırsa bu denklemler arasında büyük benzerlik olduğu görülür. Denklemlerin sağ tarafı düşünülürse benzerlik daha açık görülür. O da matris olarak

$$(I + R_n') (I - R_n')^{-1} L_n^{-1} L_n B_n A_n^{-1}$$

gibi veya

$$\frac{I + R_n'}{I - R_n'} B_n A_n^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemlerin türetme işlemindeki indirgemedan dolayı empedans matrisi boyutsuzdur. Tabaka parametreleri ρ_n , V_n^P ve V_n^S nin bu hesapladığımız empedans matrisinden nasıl bulunabileceği izleyen bölümde açıklanmıştır. Daha önce belirtildiği gibi dalganın normal gelmesi halinde bu mümkün değildir.

TABAKA EMPEDANSLARINDAN TABAKA PARAMETRELERİNİN HESAPLANMASI

Tabaka parametreleri ρ_n , V_n^P ve V_n^S yi elde etmek için (12) denklemi kullanılabilir. Bunun için (12) nin sağ tarafı K_n ile gösterilsin.

$$B_n A_n^{-1} = K_n \quad (13)$$

olur (Aminzadeh 1984).

K_n iterasyonun n inci safhasındaki matristir. (13) matris denklemi tabaka parametrelerinin hesabı için bilinmeyen sayısından fazla denklem (dört denklem üç bilinmeyen) içerir. (13)'ün çözülebilmesi için üç bağımsız denklem yeterlidir.

A ve B matrislerini aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz (Aminzadeh 1984). Yine gösterimde basitlik için tabaka indisleri yazılmamıştır.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{U} & 1 \\ \frac{(1-X)Y}{U} & XY \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -W \\ -XY & (1-X)YW \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Burada $X = \gamma$, $Y = \rho$, $U = 1/q^D$ ve $W = q^S$ dir. Buna göre

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -XU & U/Y \\ 1-X & 1/Y \end{bmatrix} \quad (16)$$

dir. (14) ve (16) denklemleri kullanılarak (13) denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$B.A^{-1} = \begin{bmatrix} XU-W(1-X) & -\frac{U+W}{Y} \\ X^2YU+WY(1-X)^2 & -XU+W(1-X) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & -K_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

(17) de $B.A^{-1}$ in diyagonal elementleri ayrı mutlak değerlere sahiptir. (17) den aşağıdaki üç bağımsız denklem yazılabilir.

$$K_1 = XU-W(1-X) \quad (18)$$

$$K_2 = -(U+W)/Y \quad (19)$$

$$K_3 = X^2Y^2 + WY(1-X)^2 \quad (20)$$

(3e) ve (3f) den, X ve W arasında ilişki sağlayan bir denklem yazılabilir.

$$X = \frac{W^2 - 1}{W^2 + 1} \quad (21)$$

(18), (19), (20) ve (21) X, Y, U ve W'nin çözülebileceği doğrusal olmayan denklem sistemini meydana getirirler. (17)'nin her iki tarafının determinantı alınıp eşitlenerek aşağıdaki basit bağıntı bulunur.

$$WU = -K_4 \quad (22)$$

Burada $K_4 = K_1^2 + K_2K_3$, yani K'nin determinantının negatifidir. Doğrusal olmayan denklem takımının çözümünü elde etmek için (18), (19), (21) ve (22) kullanılır. Bazı cebirsel işlemlerden sonra W için aşağıdaki denklem elde edilir (Aminzadeh 1984),

$$W^3 + W^2 \frac{2+K_4}{K_1} + W - \frac{K_4}{K_1} = 0 \quad (23)$$

Bu denklemin fiziksel anlamlı pozitif kökü alınıp W^* ile gösterilir ve (22) de yerine yazılırsa :

$$X^* = \frac{W^{*2}-1}{W^{*2}+1} \quad (24)$$

ve

$$U^* = \frac{-K_4}{W^*} \quad (25)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden X^* ve U^* hesaplanabilir. Daha sonra, (19) dan,

$$Y^* = -\frac{U^* + W^*}{K_2} \quad (26)$$

eşitliği yazılabilir. (23), (24), (25) ve (26) ile verilen X^* , Y^* , U^* ve W^* çözümleri ve X, Y, U ve W'nin tanımlamalarından tabaka parametreleri izleyen bağıntılardan hesaplanabilir.

$$V^{P*} = CU^* / (U^{*2} + 1)^{1/2}, \quad (27)$$

$$V^{S*} = C / (W^{*2} + 1)^{1/2}, \quad (28)$$

ve

$$\rho^* = Y^*. \quad (29)$$

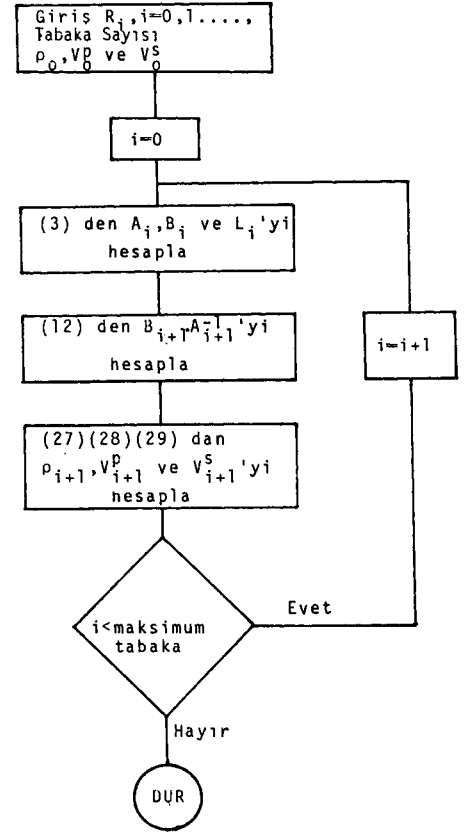
Bu sonuçlara göre tabaka empedanslarından tabaka parametreleri elde edilebilmektedir. Yani elastik ortamda dalganın dik gelmemesi halinde her tabakanın parametreleri hesaplanabilmektedir. Bunun için gerekli olan yalnızca düzlem dalganın geliş açısı, serbest yüzeyin parametreleri (veya ilk tabaka) ve yansıma katsayısı matrisleri-

dir. Hesaplama gürültü etkisini azaltmak ve kararlılığı arttırmak amacı ile farklı geliş açıları için ve hesap değerinin ortalaması alınarak yinelenebilir.

Şekil 1'de aşağı doğru iteratif olarak bütün tabakaların parametrelerini hesaplama tekniğini özetleyen bir akış diyagramı verilmiştir. Diyagramdan da görüleceği gibi i inci iterasyonda (3) den A_{i+1} , B_{i+1} ve L_{i+1} ve (12) den de $A_{i+1} \cdot B_{i+1}$ hesaplanır. Daha sonra (27), (28), (29)dan da tabaka parametreleri hesaplanır. Hesaplamalarda ρ_0 , V_0^P , V_0^S ve R_i , $i = 0, 1, \dots$, en büyük tabaka sayısı dizisine ihtiyaç vardır.

YAPAY VERİ UYGULAMALARI

Aminzadeh (1984)'in kullandığı giriş parametreleri ve hesapladığı parametreler Çizelge 1'de verilmektedir. Çizelgeden de görüleceği gibi hesaplanan değerler olması gereken değerlere çok yakın, neredeyse denktir. Çizelge 2'de aynı model için bu çalışmada hesaplanan değerler ve giriş parametreleri verilmiştir. Bu çizelgeden de hesaplanan değerlerle modellerimizdeki değerlerin çok yakın olduğu görülmektedir. Çizelge 3'de bir başka model için giriş parametreleri ve hesaplanan değerler görülmektedir. Çizelgelerde farklı geliş açıları için hesaplanan değerler de verilmiştir.



Şekil 1. Tabaka parametrelerinin hesaplanmasını gösteren akış diyagramı

Çizelge 1. Model ve Hesaplanmış Değerler (Aminzadeh 1984)

Tabaka	Giriş Parametreleri				
	1	2	3	4	5
V^P	5000.0	8000.0	10000.0	2000.0	9000.0
V^S	2887.8	4618.8	5773.5	1154.7	5196.2
ρ	1.934	2.175	2.3	1.538	2.240
$\theta = 2^\circ$ için hesaplanan parametreler					
V^P	5000.0	7999.6289	9999.84	2004.123	8960.256
V^S	2887.8	4618.55	5773.437	1157.117	5164.078
ρ	1.934	2.17508	2.300021	1.534837	2.24897
$\theta = 20^\circ$ için hesaplanan parametreler					
V^P	5000.0	7999.832	9999.824	1995.382	9018.5977
V^S	2887.8	4618.679	5773.382	1151.985	5216.914
ρ	1.934	2.1750412	2.3000259	1.541538	2.23672

Yansıma Matrisleri
Çizelge 2. Model ve Hesaplanmış Değerler

Tabaka	Giriş Parametreleri				
	1	2	3	4	5
V^P	5000.0	8000.0	10000.0	2000.0	9000.0
V^S	2887.8	4618.8	5773.5	1154.7	5196.2
ρ	1.934	2.175	2.30	1.538	2.240
$\theta = 2^\circ$ için hesaplanan parametreler					
V^P	5000.0	7936.2	9995.3	2002.6	8999.5
V^S	2887.8	4616.6	5770.8	1156.2	5196.9
ρ	1.934	2.176	2.30	1.535	2.240
$\theta = 20^\circ$ için hesaplanan parametreler					
V^P	5000.0	7999.86	9999.79	1999.895	9000.1
V^S	2887.8	4618.73	5773.4	1154.64	5196.28
ρ	1.934	2.175	2.30	1.538076	2.23996

Çizelge 3. Model ve Hesaplanmış Değerler

Tabaka	Giriş Parametreleri			
	1	2	3	4
V^P	3464.1	5196.2	6062.2	6928.2
V^S	2000.0	3000.0	3500.0	4000.0
ρ	1.9	2.0	2.1	2.2
$\theta = 2^\circ$ için hesaplanan parametreler				
V^P	3464.1	5194.5	6059.8	6925.1
V^S	2000.0	2999.0	3498.6	3998.3
ρ	1.9	2.0	2.1	2.2
$\theta = 20^\circ$ için hesaplanan parametreler				
V^P	3464.1	5195.4	6053.4	6928.8
V^S	2000.0	2999.5	3494.5	4000.4
ρ	1.9	2.0	2.1	2.199

SONUÇLAR

Bu çalışmada düzlem dalganın dik olmayan gelişi halinde Aminzadeh (1984)'in verdiği şekilde yansıma ve parametre matrisleri arasındaki ilişkiden yararlanarak ve yansıma matrislerini kullanarak bir tabaka empedans matrisi tanımlandı. Bu matrisin özel durumundan yararlanarak doğrusal olmayan denklem takımı oluşturuldu. Bu denklem takımı Aminzadeh'in önerdiği algoritmaya uygun hazırlanan bir program paketi ile çözülerek bir alttaki tabakanın parametrelerinin iteratif olarak nasıl hesaplanabileceği gösterildi. Ayrıca dalganın geliş açısındaki farklılıkların hesaplamalardaki duyarlılığı fazla etkilemediği gösterilmiştir. Sismogramlardan yansıma matrislerinin elde edilebilmesi halinde, Aminzadeh (1984)'in önerdiği algoritma tabaka parametrelerinin hesaplanmasında kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Aminzadeh, F. 1979, Non-normal Incidence State Space Model for Layered Media Systems, Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering, University of Southern California, Los Angeles.
- Aminzadeh, F. and Mendel, J.M., 1982, Non-normal incidence state space model and line source reflection synthetic seismogram, *Geophysical Prospecting* 30, 541-568.
- Aminzadeh, F. 1984, Derivation of layer parameters of an elastic medium from reflection coefficient matrices, *Geophysical Prospecting* 32, 819-827.
- Frasier, C.W. 1970, Discrete-time solution for plane P-SV-Waves in a plane layered medium, *Geophysics* 35, 197-219.
- Habibi-Ashrafi, F. 1978, Estimation of Parameters in Lossless Layered Media Systems, Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering, University of Southern California, Los Angeles.
- Kunetz, G. and D'erceville, I. 1962, Sur certaines proprietes d'une onde acoustique plane de compression dans un milieu stratifie, *Annales de Geophysique* 18, 351-359.
- Shiva, M. 1982, Geoptimal Deconvolution, Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering, University of Southern California, Los Angeles.