Araştırma Makalesi | *BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi, 23(2), 653-672, (2021)*

DOI:10.25092/baunfbed.854728 | *J. BAUN Inst. Sci. Technol., 23(2), 653-672, (2021)*

G_3'te $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan küresel çarpım yüzeyleri

Bengü BAYRAM, Özgün BİÇGİN*

[1]*Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Çağış kampüsü, Balıkesir.*

Geliş Tarihi (Received Date): 05.01.2021
Kabul Tarihi (Accepted Date): 09.02.2021

Öz

n-boyutlu bağlantılı bir manifolddan m-boyutlu Öklid uzayına tanımlı bir izometrik daldırma için, M manifoldunun yer vektörü Laplas operatörünün sabit olmayan öz fonksiyonlarının sonlu bir toplamı olarak ayrışabiliyorsa, M manifoldu sonlu tiptedir, denir. Sonlu tipte yüzeyler farklı uzaylarda birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada, 3-boyutlu Galilean uzayda, Δ^{II} ikinci temel forma göre Laplas operatörü olmak üzere, $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$ eşitliğini sağlayan küresel çarpım yüzeylerini ele aldık. Ayrıca, bu yüzeylerin tam bir sınıflandırmasını verdik.

***Anahtar kelimeler:** Sonlu tipte yüzeyler, Galilean uzay, küresel çarpım yüzeyi.*

Spherical product surfaces satisfying $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$ in G_3

Abstract

For an isometric immersion of n-dimensional connected manifold into Euclidean m-space, the position vector of M can be decomposed as a finite sum of IE^m valued non-constant functions of the Laplacian operator, one can say that M is of finite type. Finite type surfaces corresponds to the fundamental forms are studied in different spaces by many authors. In this study, we consider the spherical product surface in 3-dimensional Galilean space satisfying the condition $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$ where Δ^{II} is the Laplacian with respect to second fundamental form. We also give exact classification of these type surfaces.

***Keywords:** Finite type surface, Galilean space, spherical product surface.*

Bengü BAYRAM, benguk@balikesir.edu.tr, http://orcid.org/0000-0002-1237-5892
* Özgün BİÇGİN, ozgunbicgin@gmail.com, http://orcid.org/0000-0003-0255-8633

1. Giriş

$x: M \to IE^m$, n-boyutlu bağlantılı manifold M 'den m-boyutlu Öklid uzayı IE^m'ye bir izometrik daldırma olsun. M 'nin Laplace operatörü Δ olmak üzere x konum vektörü ve H ortalama eğrilik vektörü $\Delta x = -nH$ Bertrami formülünü sağlar. Daldırmanın minimal ($H = 0$) olması için gerek ve yeter şart daldırmanın harmonik olmasıdır yani $\Delta x = 0$ olmasıdır. Bir $x: M \to IE^m$ izometrik daldırması eğer $\Delta^2 x = 0$ yani $\Delta H = 0$ olursa *biharmonik* olarak adlandırılır. (bkz. [10,11]). [19]'da Takahashi $\Delta x + \lambda x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ koşulunu sağlayan Öklid uzayındaki altmanifoldları çalıştı ve sınıflandırdı. M 'nin düzgün fonksiyonlara etkisi M 'nin Δ Laplası ile gösterilir. Eğer IE^m'deki M 'nin x konum vektörü, Δ Laplasının sabit olmayan fonksiyonlarının sonlu toplamı olarak ayrıştırılırsa, M 'ye *sonlu tiptedir* denilir. Tam olarak ifade etmek gerekirse M 'deki x konum vektörü $x = x_0 + x_1 + ... + x_k$ formunda ifade edilebilir. Burada $\Delta x_i = \lambda_i x_i$, $i = 1,...,k$ olmak üzere; x_0 sabit dönüşüm, $x_1, x_2, ..., x_k$ sabit olmayan dönüşümlerdir. Eğer $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ birbirinden farklıysa M 'ye *k tipindedir* denir. Eğer bazı *i*'ler için $\lambda_i = 0$ durumu varsa M *null k tipindedir* denir [7-8].

Eğer M 'deki x konum vektörü Δ^J operatörünün sabit olmayan özvektörlerinin sonlu toplamı olarak, yani

$$x = x_0 + x_1 + ... + x_k,\ \Delta^J x_i = \lambda_i x_i\ ,\ i = 1,...,k\ ,$$

olarak yazılırsa M 'ye J *temel formuna göre sonlu tipte ya da kısaca sonlu* J *-tipindedir* denir. Burada $\Delta^J x_i = \lambda_i x_i$, $i = 1,...,k$ olmak üzere x_0 sabit vektör ve $x_1, x_2, ..., x_k$ sabit olmayan dönüşümlerdir. Eğer özellikle bütün $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ özdeğerleri farklıysa M 'ye J *temel formuna göre k-tipindedir* (J *-type k*), diğer durumda M *sonsuz tiptedir* denir. Bazı $i = 1,...,k$ için $\lambda_i = 0$ ise M 'ye J *temel formunda göre null k tipindedir* (*null* J *-type k*) denir [18].

[20]'de Yoon, üç boyutlu Galilean uzayda $\Delta x_i = \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ koşulu altında öteleme yüzeylerini sınıflandırdı. [5,13]'teki yazarlar üç boyutlu uzaylarda $\Delta^{III} r_i = \mu_i r_i$ şartını sağlayan öteleme yüzeylerini ve dönel yüzeyleri sınıflandırdı. [16, 21]'de yazarlar 3-boyutlu Öklid uzayında ve Minkowski uzayında minimal homotetik yüzeyleri çalıştılar. Mohammed Bekkar ve Bendehiba Senoussi, [4]'te, 3-boyutlu Öklid ve Lorentz uzaylarında $\Delta r_i = \lambda_i r_i$ şartını sağlayan homothetical yüzeyleri sınıflandırdılar. Aydın, Öğrenmiş ve Ergüt, [3]'te psuedo Galilean uzayında Gauss ve ortalama eğriliği sıfır olan homothetical yüzeyleri araştırdılar. Karacan, Yoon ve Bukçü [14]'te $\Delta^J x_i = \lambda_i x_i$, $J = 1,2$ ve $\Delta^{III} x_i = \lambda_i x_i$ şartlarını sağlayan *tip-1* öteleme yüzeylerini sınıflandırdılar. Son olarak Çakmak, Karacan, Kızıltuğ ve Yoon [9]'da 3-boyutlu Galilean uzayda $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan öteleme yüzeylerini çalıştılar.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Galilean uzayda $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan küresel çarpım yüzeyi çalışılmıştır. Burada Δ^{II} ikinci temel formun Laplas operatörüdür.

2. Temel kavramlar

G_3 3-boyutlu Galilean uzay, ideal şekli $\{w, f, I, I_1\}$ olan bir kompleks projektif uzaydır. Burada w reel düzlemi ideal düzlem, $f \subset w$ reel doğrusu ideal doğru, I ve I_1 iki kompleks eşlenik noktalardır.

G_3 Galilean uzayının reel modeli P^3 projektif uzayda $\{w, f\}$ idealini alabiliriz. Burada $w \subset G_3$ reel düzlem, üzerinde ε eliptik involüsyonu tanımlı $f \subset w$ reel doğrudur. Homojen koordinatlarda ε eliptik involüsyonu

$$(0:0:x_2:x_3) \to (0:0:x_3:-x_2)$$

şeklinde tanımlanabilir. G_3'ün hareket grubu

$$\bar{x} = a + x,$$

$$\bar{y} = b + cx + y\cos\theta + z\sin\theta$$

$$\bar{z} = d + ex - y\sin\theta + z\cos\theta$$

ile afin koordinatlardan verilen altı parametreli bir gruptur. Burada a, b, c, d, e ve θ reel sayılardır.

G_3 Galilean uzayında dört çeşit doğru vardır. Bunlar f ile kesişmeyen reel izotropik olmayan doğrular, w düzlemine ait olmayıp f ile kesişen reel izotropik doğrular, reel ve izotropik olmayan doğrular yani, w düzleminin tüm doğruları (f dışında) ve f ideal doğrusudur.

3- boyutlu Galilean uzayda $x =$ sabit olan düzlemler (w) ideal düzlemi de dahil reel Öklidiyen düzlemlerdir. Diğer düzlemler ise izotropiktir.

3-boyutlu Galilean uzayda $p_1 = (x, y, z)$ ve $p_2 = (x_1, y_1, z_1)$ iki vektör olmak üzere bu iki vektörün *iç çarpımı*

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \begin{cases} xx_1, & x \neq 0 \ \ veya \ \ x_1 \neq 0 \\ yy_1 + zz_1, & x = x_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir p vektörü için $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = 1$ durumu sağlanırsa *birim vektördür*. Galilean uzayda p_1 ve p_2 vektörünün *vektörel çarpımı*

$$p_1 \times p_2 = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (0, x_1 z - z_1 x, xy_1 - yx_1). \tag{2}$$

biçimindedir.

$p_1=(x,y,z)$ vektörüne $x=0$ olması halinde *izotropik*, diğer durumda *non-izotropik* denir. Üç boyutlu Galilean uzayında C^r $(r\geq 1)$ sınıfından bir yüzey

$$X:U\to M\,,\quad U\subset IE^2,$$

$$X(u_1,u_2)=\left(x(u_1,u_2),y(u_1,u_2),z(u_1,u_2)\right)$$

olarak parametrelendirilmiş olsun. Burada x, y, z U üzerinde türevlenebilir reel değerli fonksiyonlardır.

$$\frac{\partial x}{\partial u_i}=x_{u_i} \text{ ve } \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\partial u_j}=x_{u_iu_j}\,,\quad 1\leq i,j\leq 2$$

göstersin. Benzer işlemler y ve z için de geçerlidir. $x_{u_i}\neq 0$ $i=1,2$ olduğu zaman yüzey *admissible* (yani Öklid teğet düzlemleri olmayan) yüzeydir.

$$g_i=x_{u_i}\,,\quad h_{ij}=y_{u_i}y_{u_j}+z_{u_i}z_{u_j}\ (i,j=1,2)$$

göstersin. Böylece M ’nin birinci temel formu

$$I=ds_1^{\,2}+\varepsilon ds_2^{\,2}$$

dir. Burada

$$ds_1^{\,2}=\left(g_1du_1+g_2du_2\right)^2,\quad ds_2^{\,2}=h_{11}du_1^{\,2}+2h_{12}du_1du_2+h_{22}du_2^{\,2}$$

ve

$$\varepsilon=\begin{cases}0\,, & du_1:du_2 \text{ izotropik değil}\\ 1\,, & du_1:du_2 \text{ izotropik}\end{cases}$$

dir. M ’nin ikinci temel formu

$$II=L_{11}du_1^{\,2}+2L_{12}du_1du_2+L_{22}du_2^{\,2}$$

olarak ifade edilir. Burada M ’nin ikinci temel form katsayıları

$$L_{ij}=\left\langle\frac{X_{u_iu_j}.x_{u_1}-x_{u_iu_j}.X_{u_1}}{x_{u_1}},N\right\rangle=\left\langle\frac{X_{u_iu_j}.x_{u_2}-x_{u_iu_j}.X_{u_2}}{x_{u_2}},N\right\rangle,\ x_{u_1}\neq 0,\ x_{u_2}\neq 0,\ i,j=1,2 \qquad (3)$$

dir. Yüzeyin ikinci temel formu özdeş olarak sıfırsa yüzeye *total geodezik* denir. M yüzeyinin birim normal vektör alanı N,

$$N(u_1,u_2)=\frac{X_{u_1}\times X_{u_2}}{W}(u_1,u_2) \qquad (4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $W=\left\| X_{u_1}\times X_{u_2}\right\|$ olur. M parabolik noktalara sahip olmayan bir yüzey olsun. Diğer bir ifadeyle $L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\neq 0$ olsun. M 'nin $\{u_1,u_2\}$ lokal koordinatlarına göre ikinci temel formun Laplas operatörü

$$\Delta^{II}X=-\frac{1}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{L_{22}X_{u_1}-L_{12}X_{u_2}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\right)-\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{L_{12}X_{u_1}-L_{11}X_{u_2}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\right)\right]\text{[17].} \qquad (5)$$

biçiminde tanımlanır.

3. G_3 'te $\Delta^{II}x_i=\lambda_i x_i$ şartını sağlayan küresel çarpım yüzeyleri

[1,6]'da yazarlar, IE^3 ve IE^4 Öklid uzaylarında küresel çarpım yüzeylerini çalışmışlardır. [2]'de, yazarlar bu tip yüzeyleri G_3 üç boyutlu Galilean uzayda incelemişlerdir. Bununla beraber [15]'te, yazarlar G_3 üç boyutlu Galilean uzayda noktasal *1-tip* Gauss dönüşümüne sahip küresel çarpım yüzeylerini incelemişlerdir.

Bu bölümde, G_3 'te $\Delta^{II}x_i=\lambda_i x_i$ şartını sağlayan küresel çarpım yüzeyleri çalışılmış ve bu yüzeylerin tam sınıflandırılması verilmiştir.

$\alpha,\beta: I_i\subset\mathbb{R}\to G_2$, $\alpha(u)=\left(f_1(u),f_2(u)\right)$ ve $\beta(v)=\left(g_1(v),g_2(v)\right)$ olacak şekilde iki Galilean düzlem eğrisi olsun. Burada f_i ve g_i $(i=1,2)$ sırasıyla I_1 ve I_2 açıklarında reel değerli sabit olmayan türevlenebilir fonkisyonlardır. O zaman G_3'te iki düzlem eğrisinin M küresel çarpım yaması

$$X=\alpha\otimes\beta: I_1\times I_2\to G_3,$$

$$X(u,v)=\left(f_1(u),f_2(u)g_1(v),f_2(u)g_2(v)\right) \qquad (6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u_0\ \langle\ u\ \langle\ u_1,\ \ v_0\ \langle\ v\ \langle\ v_1$ dir. [2, 12].

f_i ve g_i sabit olmadığından, M her zaman admissible olur.

(6)'da parametrizasyonu verilen küresel çarpım yüzeyi için, ikinci temel form katsayıları

$$L_{11}=\frac{\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)}{f_1'\sqrt{g_1'^2+g_2'^2}},\ L_{12}=0,L_{22}=\frac{f_2\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)}{\sqrt{g_1'^2+g_2'^2}} \qquad (7)$$

olur.

(5), (6) ve (7), kullanılırsa

$$\Delta^{II} x_1 = \lambda_1(u,v)\, f_1(u) = \frac{1}{2} C(u,v) E(u)\, f_1(u) \tag{8}$$

$$\Delta^{II} x_2 = \lambda_2(u,v)\, f_2(u) g_1(v) = C(u,v)\left[A(u) + B(v)\right] f_2(u) g_1(v), \tag{9}$$

$$\Delta^{II} x_3 = \lambda_3(u,v)\, f_2(u) g_2(v) = C(u,v)\left[A(u) + D(v)\right] f_2(u) g_2(v) \tag{10}$$

olur. Burada λ_i, $i=1,2,3$, sabittir ve

$$A(u) = \frac{1}{\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)^2} \begin{pmatrix} \left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)\left(\frac{1}{2} f_2' f_1'' + \frac{1}{2}\frac{f_1' f_2'^2}{f_2} + f_1' f_2''\right) \\ -\frac{1}{2} f_1' f_2' \left(f_1''' f_2' - f_1' f_2'''\right) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$B(v) = \frac{1}{\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{g_1''}{g_1}\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right) \\ +\frac{1}{2}\frac{g_1'}{g_1}\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)\left(g_1 g_2'' - g_1'' g_2\right) \\ -\frac{1}{2}\frac{g_1'}{g_1}\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)\left(g_1' g_2''' - g_1''' g_2'\right) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$C(u,v) = -\frac{\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}}{\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right) f_2}, \tag{13}$$

$$D(v) = \frac{1}{\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{g_2''}{g_2}\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right) \\ +\frac{1}{2}\frac{g_2'}{g_2}\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)\left(g_1 g_2'' - g_1'' g_2\right) \\ -\frac{1}{2}\frac{g_2'}{g_2}\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)\left(g_1' g_2''' - g_1''' g_2'\right) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$E(u) = \frac{f_1'}{2\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)^2 f_1} \begin{bmatrix} \left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)\left(3 f_1'' f_2 + f_2' f_1'\right) \\ -f_1' f_2 \left(f_1''' f_2' - f_1' f_2'''\right) \end{bmatrix} \tag{15}$$

dir. Burada f_i, g_i, $i=1,2,3$, $f_1 \neq c_2 f_2 + c_3$ ve $g_1 \neq c g_2 + c_1$ durumlarını sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. f_i and g_i'nin ikinci türevleri aynı anda sıfır olamaz, yani M en fazla 3-tipindedir.

Tanım 1.
Üç boyutlu Galilean uzayda bir yüzey $\Delta^{II} x = 0$ koşulunu sağlıyorsa o yüzeye II -*harmonik* denir.

Teorem 1.
Üç boyutlu Galilean uzayda II *-harmonik* küresel çarpım yüzeyi yoktur [22].
İspat. M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. M II -*harmonik* ise (8), (9) ve (10)'dan

$$E(u) = 0,$$

$$A(u) + B(v) = 0,$$

$$A(u) + D(v) = 0$$

elde edilir. $B(v)$ and $D(v)$'nin sıfır olamayacağı açıktır, bu yüzden, $A(u)$ sabittir ve $B(v)$ ile $D(v)$ sabit ve $A(u)$'nun ters işaretlisidir. $E(u) = 0$ olduğundan

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = c f_1'^3 f_2 \tag{16}$$

olur. (16) ifadesi (11)'de yerine yazılırsa

$$A(u) = -1 \tag{17}$$

elde edilir. (17) ve $B(v) = D(v)$ kullanılırsa

$$\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)} = c_6, \tag{18}$$

elde edilir ve buradan da

$$B(v) = D(v) = -1 \; . \tag{19}$$

olur. Fakat bu bir çelişkidir. O zaman M II -harmonik olamaz.
Şimdi, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fonksiyonlarına göre sıradaki durumları inceleyeceğiz.

Durum 1. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$ olsun. (8), (9) ve (10)'dan

$$E(u) = 0, \tag{20}$$

$$A(u) + B(v) \neq 0, \tag{21}$$

$$A(u) + D(v) \neq 0 \tag{22}$$

elde edilir ve buradan da

$$E(u)=0 \text{ and } A(u)=0 \tag{23}$$

olur. O zaman burada iki alt durum vardır.

a) Eğer $E(u)=0$, $A(u)=0$ ise

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = c_1 f_1' f_2 f_2'^2, \tag{24}$$

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = c f_1'^3 f_2$$

elde edilir ki bu da

$$f_1 = \pm c_2 f_2 + c_3 \tag{25}$$

demektir. Bu bir çelişkidir.

b) Eğer $E(u)=0$, $A(u)\neq 0$ ise buradan

$$f_1 \neq \pm c_2 f_2 + c_3 \tag{26}$$

ve $A(u)=-1$ olur. $B(v)\neq 0$ ve $D(v)\neq 0$ olduğundan

$$g_1'' \neq 0 \text{ and } g_2'' \neq 0 \tag{27}$$

elde edilir. Böylece sıradaki teorem verilebilir.

Teorem 2.
M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman, M 'nin null 2-tip 3 ($\lambda_1=0, \lambda_2\neq\lambda_3\neq 0$) olması için gerek ve yeter şart

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = c f_1'^3 f_2,\ g_1'' \neq 0,\ g_2'' \neq 0$$

olmasıdır [22].

Durum 2. $\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3\neq 0$ olsun. (8), (9) ve (10)'dan

$$E(u)=0 \textit{ and } B(v)=D(v) \textit{ and } \left(A(u)=0 \textit{ or } A(u)\neq 0\right)$$

olur yani

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = c f_1'^3 f_2 \tag{28}$$

ve

$$\frac{\left(g_1'g_2-g_1g_2'\right)^3}{\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)}=c_6 \,. \tag{29}$$

elde edilir. $f_1\neq\pm c_2f_2+c_3$ olduğundan, $E(u)=0$ ile $A(u)=0$ ve $B(v)=D(v)\neq0$ bir önceki durumda belirtildiği gibi var olamaz. Bu yüzden $E(u)=0$ ile $A(u)\neq0$ ve $B(v)=D(v)\neq0$ olur. Buradan da $A(u)=-1\neq0$, $B(v)=D(v)=-1$ elde edilir.

Böylece sıradaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.
M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M 'nin null 2-tip 2 ($\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3\neq0$) olması için gerek ve yeter şart

$$f_1''f_2'-f_1'f_2''=cf_1'^3f_2\,,\qquad \frac{\left(g_1'g_2-g_1g_2'\right)^3}{\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)}=c_6$$

denklemlerini sağlamasıdır [22].

Örnek 1.

$$X(u,v)=\left(e^u,\left(\sin e^u+\cos e^u\right)\sin v,\left(\sin e^u+\cos e^u\right)\cos v\right)$$

parametrizasyonu ile verilen küresel çarpım yüzeyi null 2-tip 2'dir. $E(u)=0$, $A(u)=-1\neq0$, $B(v)=D(v)=-1\neq0$ olduğundan $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3\neq0$ durumu elde edilir [22].

Durum 3. a) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3\neq0$ olsun. (8), (9) ve (10)'dan

$$E(u)=0,\ A(u)+B(v)=0 \text{ and } A(u)+D(v)\neq0$$

elde edilir. Eğer $E(u)=0$ ise $f_1''f_2'-f_1'f_2''=cf_1'^3f_2$ olur. Bu da $A(u)=-1$ demektir. Buradan $B(v)=1$, yani

$$\frac{g_1\left(g_1''g_2'-g_1'g_2''\right)+3g_1''\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)}{g_1'\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)}=\frac{g_1'g_2'''-g_1'''g_2'}{g_1'g_2''-g_1''g_2'} \tag{30}$$

ve $D(v)\neq1$ yani

$$\frac{g_2\left(g_1''g_2'-g_1'g_2''\right)+3g_2''\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)}{g_2'\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)}\neq\frac{g_1'g_2'''-g_1'''g_2'}{g_1'g_2''-g_1''g_2'} \tag{31}$$

elde edilir. (30) ve (31)'den

$$4\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)\left(g_1''g_2' - g_1'g_2''\right) \neq 0 \tag{32}$$

olur.

b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$ olsun. Buradan

$$E(u) = 0,\ A(u) + B(v) \neq 0 \text{ and } A(u) + D(v) = 0$$

elde edilir. Eğer $E(u) = 0$ ise $f_1''f_2' - f_1'f_2'' = cf_1'^3 f_2$ olur. Buradan da $A(u) = -1$ olur. Böylece $B(v) \neq 1$, yani

$$\frac{g_1\left(g_1''g_2' - g_1'g_2''\right) + 3g_1''\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)}{g_1'\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)} \neq \frac{g_1'g_2''' - g_1'''g_2'}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} \tag{33}$$

ve $D(v) = 1$ yani

$$\frac{g_2\left(g_1''g_2' - g_1'g_2''\right) + 3g_2''\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)}{g_2'\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)} = \frac{g_1'g_2''' - g_1'''g_2'}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} \tag{34}$$

elde edilir. (33) ve (34)'ten

$$4\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)\left(g_1''g_2' - g_1'g_2''\right) \neq 0 \tag{35}$$

olur. O halde sıradaki teorem verilebilir.

Teorem 4.
M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M 'nin null 2-tip 2 ($\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$ yada $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$) olması için gerek ve yeter şart

$$f_1''f_2' - f_1'f_2'' = cf_1'^3 f_2 \quad \text{ve} \quad 4\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)\left(g_1''g_2' - g_1'g_2''\right) \neq 0$$

koşullarını sağlamasıdır [22].

Durum 4. $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$ olsun. (8) denkleminden

$$-\frac{\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}}{g_1g_2' - g_1'g_2} = c_4 \tag{36}$$

denklemini sıfırdan farklı bir sabit olarak alabiliriz ve

$$E(u) \neq 0 \tag{37}$$

olur. (9) ve (10)'dan

$$A(u)+B(v)=0 \text{ and } A(u)+D(v)=0 \tag{38}$$

olur. $B(v)$ ve $D(v)$ sıfır olmayacağı için, $-A(u)=B(v)=D(v)$ ifadesi sabit olarak alınır. Buradan

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c f_1'^3 f_2, \tag{39}$$

$$\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)} = c_6, \tag{40}$$

ve

$$g_1^2 + g_2^2 = c_5 \tag{41}$$

elde edilir. (40)'tan, ayrıca

$$B(v) = D(v) = -1 \tag{42}$$

elde edilir. A(u)=1 olduğundan

$$\frac{f_2 f_2'^4}{c_1 f_1'} = f_1'' f_2' - f_1' f_2''. \tag{43}$$

olur. (39), (43) ve (40), (41)'den

$$f_1 \neq c_2 f_2 + c_3, \tag{44}$$

ve $c_6 = -1$ yani

$$\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)} = -1 \tag{45}$$

elde edilir. Sıradaki sonuca ulaşmış oluruz.

Teorem 5.
M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M 'nin null 2-tip 2 ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$) olması için gerek ve yeter şart (44) ve (45) şartlarını sağlamasıdır [22].

Durum 5. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ olsun. O zaman

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c f_1'^3 f_2 , \tag{46}$$

$$g_1^{\,2} + g_2^{\,2} = c_5 \tag{47}$$

ve

$$\begin{Bmatrix} A(u)+B(v)\neq 0 \\ A(u)+D(v)\neq 0 \end{Bmatrix}. \tag{48}$$

elde edilir. (48)'den

$$A(u)=0,\ B(v)\neq 0,\ D(v)\neq 0 \tag{49}$$

ya da

$$A(u)\neq 0,\ B(v)\neq 0,\ D(v)\neq 0 \tag{50}$$

olur. Eğer $B(v)\neq 0$ ve $D(v)\neq 0$ ise

$$g_1'' \neq 0 \ and \ g_2'' \neq 0 \tag{51}$$

olur. (46) ve (49)'dan

$$f_1 \neq c_2 f_2 + c_3 \tag{52}$$

elde edilir. Diğer taraftan (46) ve (50)'den

$$f_1 = c_2 f_2 + c_3 \tag{53}$$

durumu çıkar ki bu bir çelişkidir. Diğer taraftan , (47) ve (51)'den

$$g_1' \neq \sqrt{\left(-g_2 g_2'\right)'} = sabit \ ve \ g_2' \neq \sqrt{\left(-g_1 g_1'\right)'} = sabit \ . \tag{54}$$

elde edilir. Böylece sıradaki teorem verilebilir.

Teorem 6.
M , (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M 'nin 2-type 3 ($\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$) olması için gerek ve yeter şart (52) ve (54) koşullarının sağlanmasıdır [22].

Durum 6. Let $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$. Buradan

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c f_1'^3 f_2 , \tag{55}$$

$$g_1^{\,2} + g_2^{\,2} = c_5 \tag{56}$$

ve

$$A(u)+B(v)=A(u)+D(v)\neq 0 \tag{57}$$

olur. (57)'den

$$A(u)=0 \text{ ve } B(v)=D(v)\neq 0 \tag{58}$$

ya da

$$A(u)\neq 0 \text{ ve } B(v)=D(v)\neq 0 \tag{59}$$

elde edilir. Eğer $B(v)=D(v)$ ise

$$\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)} = c_6 \tag{60}$$

ve

$$B(v)=D(v)=-1 \tag{61}$$

olur. (55) ve (58)'den

$$f_1 \neq \pm c_2 f_2 + c_3 . \tag{62}$$

elde edilir, fakat (55) ve (59)'dan

$$f_1 = \pm c_2 f_2 + c_3 \tag{63}$$

olur ki bu bir çelişkidir.

(56) ve (60)'tan $c_6 = -1$, yani

$$\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)} = -1 . \tag{64}$$

elde edilir. Böylece sıradaki sonuç verilebilir.

Teorem 7.
M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M'nin 2-type 2 ($\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$) olması için gerek ve yeter şart (62) ve (64) şartlarını sağlamasıdır [22].

Durum 7. a) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$ olsun. Buradan

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c f_1'^3 f_2 , \tag{65}$$

$$g_1^{\,2} + g_2^{\,2} = c_5 \tag{66}$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} A(u) + B(v) = 0 \\ A(u) + D(v) \neq 0 \end{array} \right\}. \tag{67}$$

elde edilir. (67)'den dolayı, $A(u) = c_1$ (sabit) ve

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = \frac{f_1'^{(1-2c_1)} f_2'^{(2+2c_1)} f_2}{c_1} \tag{68}$$

ve $B(v) = -c_1$, yani

$$\frac{1}{g_1 g_2' - g_1' g_2}\left[g_1'' \left(\frac{2(1-c_1) g_1 g_2'}{g_1'} - 3g_2 \right) + 2\left(c_1 + \frac{1}{2} \right) g_1 g_2'' \right] = \frac{g_1' g_2''' - g_1''' g_2'}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} \tag{69}$$

ve $D(v) \neq -c_1$, yani

$$\frac{g_2''}{g_1 g_2' - g_1' g_2}\left[3g_1 + \frac{2(c_1 - 1) g_1' g_2}{g_2'} - \frac{2\left(\frac{1}{2} + c_1 \right) g_1'' g_2}{g_2'} \right] \neq \frac{g_1' g_2''' - g_1''' g_2'}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} \tag{70}$$

elde edilir. (65) ve (68)'den

$$f_1'^{(-2-2c_1)} f_2'^{(2+2c_1)} \neq c c_2 \,. \tag{71}$$

olur. (69) ve (70)'ten

$$\frac{2\left(\frac{1}{2} + c_1 \right) g_1' g_2'' \left(g_1'' g_2 + g_1 g_2' \right) - 3 g_1' g_2' \left(g_1 g_2'' + g_1'' g_2 \right)}{2(c_1 - 1)\left(g_1'^2 g_2 g_2'' + g_1 g_1'' g_2'^2 \right)} \neq 1 \,. \tag{72}$$

elde edilir. (66) ve (72)'den

$$\frac{g_2' g_2'' \left(a g_2 g_2' - b g_2^4 + d g_2^2 + e \right) + f g_2^2 \left(g_2'' \right)^2 \left(c_5 - g_2^2 \right) - 3 c_5 g_2 \left(g_2' \right)^3}{2\left(c_5 - g_2^2 \right)\left(2 g_2^3 g_2'' - c_5 g_2 g_2'' - c_5 \left(g_2' \right)^2 \right)} \neq \frac{k g_2'}{g_2}, \tag{73}$$

elde edilir. Burada

$a = c_5 + 2c_1 c_5$, $b = 2c_1 - 5$, $d = -7c_5 + 4c_1 c_5$, $e = 2c_5^2 - 2c_1 c_5^2$, $f = 1 + 2c_1$ and $k = c_1 - 1$

dir.

b) Let $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$. Buradan

$$\begin{Bmatrix} A(u)+B(v)\neq 0 \\ A(u)+D(v)=0 \end{Bmatrix}. \tag{74}$$

olur. (74)'ten (68) ve $B(v)\neq -c_1$ yani

$$\frac{1}{g_1g_2'-g_1'g_2}\left[g_1''\left(\frac{2(1-c_1)g_1g_2'}{g_1'}-3g_2\right)+2\left(c_1+\frac{1}{2}\right)g_1g_2''\right]\neq\frac{g_1'g_2'''-g_1'''g_2'}{g_1'g_2''-g_1''g_2'} \tag{75}$$

ve $D(v)=-c_1$ yani

$$\frac{g_2''}{g_1g_2'-g_1'g_2}\left[3g_1+\frac{2(c_1-1)g_1'g_2}{g_2'}-\frac{2\left(\frac{1}{2}+c_1\right)g_1''g_2}{g_2'}\right]=\frac{g_1'g_2'''-g_1'''g_2'}{g_1'g_2''-g_1''g_2'}. \tag{76}$$

elde edilir. Sıradaki teorem verilebilir.

Teorem 8.
M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M'nin null 2-tip 3 ($\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$ ya da $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$) olması için gerek ve yeter şart (71) ve (73)'ün sağlanmasıdır [22].

Durum 8. $\lambda_1 = \lambda_3 \neq 0,\ \lambda_2 = 0$ olsun. Buradan $E(u)\neq 0$, yani

$$f_1''f_2' - f_1'f_2'' \neq c f_1'^3 f_2 \tag{77}$$

ve

$$\begin{Bmatrix} A(u)+B(v)=0 \\ \dfrac{E(u)}{2}=\big(A(u)+D(v)\big)\neq 0 \end{Bmatrix}. \tag{78}$$

elde edilir. (78)'den

$$A(u)=c_1,\ B(v)=-c_1,\ D(v)=c_2\neq -c_1 \tag{79}$$

olur. Burada c_1 ve c_2 sabittir. (78) ve (79)'dan

$$E(u)=2(c_1+c_2) \tag{80}$$

elde edilir. (80)'den

$$e^{\int \frac{4(c_1+c_2) f_1 \left(f_1' f_2'' - f_1'' f_2' \right)}{f_1'^2 f_2}} = \frac{c_3 \left(f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \right)}{f_1'^3 f_2}, \ c_3 = int.\, sabiti \tag{81}$$

ve (79)'dan

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = \frac{f_1'^{(1-2c_1)} f_2'^{(2+2c_1)} f_2}{c_4}, \ \ c_4 = int.\, sabiti \tag{82}$$

ve

$$\frac{1}{g_1 g_2' - g_1' g_2} \left[g_1'' \left(\frac{2(1-c_1) g_1 g_2'}{g_1'} - 3g_2 \right) + 2\left(c_1 + \frac{1}{2} \right) g_1 g_2'' \right] = \frac{g_1' g_2''' - g_1''' g_2'}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} \tag{83}$$

ve

$$\frac{g_2''}{g_1 g_2' - g_1' g_2} \left[3g_1 + \frac{2(-c_2 - 1) g_1' g_2}{g_2'} - \frac{2\left(\frac{1}{2} - c_2 \right) g_1'' g_2}{g_2'} \right] = \frac{g_1' g_2''' - g_1''' g_2'}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} \tag{84}$$

elde edilir. (81), (82), (83) ve (84) denklemleri kullanılarak

$$\frac{-2(c_1 + c_2)}{c_4 (c_1 + 1)} = \frac{\left(f_1' f_2'' - f_1'' f_2' \right) f_1'^{2c_1}}{f_1 f_2'^{(2c_1+3)}}, \ c_1 \neq -1 \tag{85}$$

ve

$$\frac{-2 g_1' g_2'' \left(g_1 g_2' (1-c_1) - g_1' g_2 (1+c_2) \right)}{\left[g_1' g_2 \left((-1+2c_2) g_2'' + 3 g_2' \right) - 2(1-c_1) g_1 g_2'^2 \right] g_1''} = 1 \tag{86}$$

elde edilir. Böylece sıradaki teoremi verebiliriz.

Teorem 9.
M , (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M 'nin null 2-type $2\,(\lambda_1 = \lambda_3 \neq 0,\ \lambda_2 = 0)$ olması için gerek ve yeter şart (85) ve (86) denklemlerini sağlamasıdır [22].

Durum 9. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$ olsun. Buradan $E(u) \neq 0$, yani

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c f_1'^3 f_2 \tag{87}$$

ve

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{E(u)}{2}=\left(A(u)+B(v)\right)\neq 0\\ A(u)+D(v)=0\end{array}\right\} \tag{88}$$

elde edilir. (88)'den

$$A(u)=c_1,\ B(v)=c_2\neq -c_1,\ D(v)=-c_1 \tag{89}$$

olur. Burada c_1 ve c_2 sabittir.

(89)'dan,

$$E(u)=2(c_1+c_2) \tag{90}$$

ve

$$e^{\int \frac{4(c_1+c_2)f_1\left(f_1' f_2''-f_1'' f_2'\right)}{f_1'^2 f_2}}=\frac{c_3\left(f_1'' f_2'-f_1' f_2''\right)}{f_1'^3 f_2},\ c_3=int.\,sabiti \tag{91}$$

elde edilir. (89)'dan

$$f_1'' f_2'-f_1' f_2''=\frac{f_1'^{(1-2c_1)} f_2'^{(2+2c_1)} f_2}{c_4},\ c_4=int.\,sabiti \tag{92}$$

ve

$$\frac{1}{g_1 g_2'-g_1' g_2}\left[g_1''\left(\frac{2(1+c_2)g_1 g_2'}{g_1'}-3g_2\right)+2\left(-c_2+\frac{1}{2}\right)g_1 g_2''\right]=\frac{g_1' g_2'''-g_1''' g_2'}{g_1' g_2''-g_1'' g_2'} \tag{93}$$

ve

$$\frac{g_2''}{g_1 g_2'-g_1' g_2}\left[3g_1+\frac{2(c_1-1)g_1' g_2}{g_2'}-\frac{2\left(\frac{1}{2}+c_1\right)g_1'' g_2}{g_2'}\right]=\frac{g_1' g_2'''-g_1''' g_2'}{g_1' g_2''-g_1'' g_2'}. \tag{94}$$

elde edilir. (91), (92), (93) ve (94) denklemleri kullanılarak

$$\frac{-2(c_1+c_2)}{c_4(c_1+1)}=\frac{\left(f_1' f_2''-f_1'' f_2'\right)f_1'^{2c_1}}{f_1 f_2'^{(2c_1+3)}},\ c_1\neq -1 \tag{95}$$

ve

$$\frac{-2g_1'g_2''\left(g_1g_2'(1-c_1)-g_1'g_2(1+c_2)\right)}{\left[g_1'g_2\left((-1+2c_2)g_2''+3g_2'\right)-2(1-c_1)g_1g_2'^2\right]g_1''}=1 \tag{96}$$

elde edilir. Böylece sıradaki sonucu verebiliriz.

Teorem 10.
M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M 'nin null 2-tip 2 ($\lambda_1=\lambda_2\neq 0,\ \lambda_3=0$) olması için gerek ve yeter şart (95) ve (96) denklemlerinin sağlanmasıdır [22].

Durum 10. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\neq 0$ olsun. Buradan

$$\frac{E(u)}{2}=A(u)+B(v)=A(u)+D(v) \tag{97}$$

olur. Böylece B(v)=D(v), yani

$$\frac{\left(g_1'g_2-g_1g_2'\right)^3}{\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)}=c_6\,,\ c_6=int.\,sabiti \tag{98}$$

elde edilir ve (98)'den

$$B(v)=D(v)=-1. \tag{99}$$

olur. Böylece

$$E(u)=2A(u)-2. \tag{100}$$

elde edilmiş olur. (100) eşitliğinden gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\frac{cf_2\left(2f_1f_2'-f_1'f_2\right)^2}{f_1'\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)}=e^{-2\int\frac{2f_1f_2''-\left(f_1'f_2\right)'}{2f_1f_2'-f_1'f_2}}\,,\ c=int.\,sabiti \tag{101}$$

elde edilir. Böylece sıradaki teoremi verebiliriz.

Teorem 11.
M, (6) parametrizasyonuyla verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. O zaman M 'nin 2-tip 1 ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\neq 0$) olması için gerek ve yeter şart (98) ve (101) denklemlerini sağlamasıdır [22].

Kaynaklar

[1] Arslan, K., Bulca, B., (Kilic) Bayram, B., Öztürk, G. and Ugail, H., On spherical product surfaces in IE^3, **Institute of Electrical and Electronics Engineers Computer Society**, Int. Conf. CYBERWORLDS, 132-137, (2009).

[2] Aydın, M., E. and Öğrenmiş, A., O., Spherical Product Surface in The Galilean Space **Konuralp Journal of Mathematics**, 2, 290-298, (2016).

[3] Aydın, M., E., Öğrenmiş A., O. and Ergüt, M., Classification Of Factorable Surfaces In The Psuedo Galilean Space, **Glasnik Mathematicki**, 70(50), 441-451, (2015).

[4] Bekkar, M. and Senoussi, B., Factorable Surfaces In The Three-Dimensional Euclidean And Lorentzian Spaces Satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, **Journal of Geometry**, 103(1), 17-29, (2012).

[5] Bekkar, M. and Senoussi, B., Translation Surfaces In The 3-Dimensional Space Satisfying $\Delta^{III} r_i = \lambda_i r_i$, **Journal of Geometry**, 103, no. 3, 367-374, (2012).

[6] Bulca, B., Arslan, K., (Kilic) Bayram, B., Öztürk, G., Spherical product surfaces in IE^4, **Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta**, 20, 41-54, (2012).

[7] Chen, B., Y., Total Mean Curvature And Submanifolds of Finite Type, **World Scientific**, (1984).

[8] Chen, B., Y., On The Total Curvature Of Immersed Manifolds, VI: Submanifolds of finite type and their application, **Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica**, 11, 309-328.

[9] Çakmak, A., Karacan, M., K., Kiziltug, S. and Yoon, D., W., Translation Surfaces In The Three Dimensional Galilean Space Satisfying $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$, **Bulletin of the Korean Mathemathical Society**, 54(4), 1241-1254, (2017).

[10] Defever, F., Hypersurfaces Of IE^4 With Harmonic Mean Curvature Vector Field, **Mathematische Nachrichten**, 196, 61-69, (1998).

[11] Hasanis, Th., Vlachos, Th., Hypersurfaces In IE^4 With Harmonic Mean Curvature Vector Field, **Mathematische Nachrichten,** 172, 145-169, (1995).

[12] Jaclic, A., Leonordis, A. and Solina F., Segmentation And Recovery Of Superquadrics, **Kluvar Academic Publishers**, 20, (2000).

[13] Kaimakamis, G., Papantoniou, B. and Petoumenos, K., Surfaces of Revolution In The 3- Dimensional Lorentz-Minkowski Space Satisfying $\Delta^{III} r = Ar$, **Bulletin of the Greek Mathematical Society**, 50, 75-90, (2005).

[14] Karacan, M., K., Yoon, D., W. and Bukcu, B., Translation Surfaces In The Three Dimensional Simply Isotropic Space I_3^1, **The International Journal of Geometric Methods in Modern Physics,** 3, no. 7, 1650088, (2016).

[15] Kisi, I., Öztürk, G., Spherical product surface having pointwise 1-type Gauss map in Galilean 3-space G_3, **The International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, 16, no. 12, 1950186, (2019).

[16] Meng, H., and Liu, H., Factorable Surfaces In 3-Minkowski Space, **Bulletin of the Korean Mathemathical Society**, 46, no. 1, 155-169, (2009).

[17] Senoussi, B. And Bekkar, M., Helicodial Surfaces With $\Delta^J r = Ar$ In The 3-Dimensional Euclidian Space, **Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica**, 60, no.3, 437-448, (2015).

[18] Stamatakis, S. and Al-Zoubi, H., On Surface Of Finite Chen-Type, **Results in Mathemathics**, 43, no. 1-2, 181-190, (2003).

[19] Takahashi, T., Minimal Immersions Of Riemannian Manifolds, **The Journal of the Mathematical Society of Japan**, 18, 380-385, (1966).
[20] Yoon, D., W., Some Classification Of Translation Surfaces In Galilean 3-Space, **International Journal of Mathematical Analysis**, 6, no. 28, 1355-1361, (2012).
[21] Yu, Y. and Liu, H., The Factorable Minimal Surfaces, **Proceedings of The Eleventh International Workshop On Differential Geometry**, 11, 33-39, (2007).
[22] Biçgin, Ö., Galilean uzayda bazı yüzeylerin temel forma göre Laplasları, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, (2020).