Araştırma Makalesi **BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi, 23(1), 366-376, (2021)**

DOI:10.25092/baunfbed.854839 **J. BAUN Inst. Sci. Technol., 23(1), 366-376, (2021)**

Bazı Feng Qi tipli (p, q)-integral eşitsizlikleri

İlker GENÇTÜRK*

Kırıkkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Yahşihan, Kırıkkale.

Geliş Tarihi (Received Date): 27.08.2020
Kabul Tarihi (Accepted Date): 11.12.2020

Öz

Bu çalışmada, [1] nolu kaynakta ortaya atılan probleme ilişkin literatürde daha önce yapılan Feng Qi tipli integral eşitsizlikleri göz önüne alınarak bu tipteki integral eşitsizliklerinin (p,q)-analogları benzer metotlar kullanılarak elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: *Eşitsizlikler, (p,q)-türev, (p,q)-integral.*

Some Feng Qi type (p, q)-integral inequalities

Abstract

In this paper, we obtain some Feng Qi type (p, q)-integral inequalities which is considered in [1], by using closely methods from previous papers about Feng Qi type integral inequalities.

Keywords: *Inequalities, (p,q)-derivative, (p,q)-integral.*

1. Giriş

İntegral eşitsizlikleri, teori ve pratikte faydalı yöntemler sunan matematiksel araçlardan birisidir. Literatürde önemli çalışmalarda rol oynayan Chebyshev, Jensen, Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri ile tanımlanmış farklı integral eşitsizlikleri matematiğin olasılık teorisi, diferensiyel denklemler teorisi, karar teorisi gibi çeşitli alanlarında geniş biçimde kullanılmaktadır. İntegral eşitsizlikleri üzerine çalışmaları bulunan matematikçilerden birisi olan Feng Qi, [1] nolu çalışmasında, ilginç bir integral eşitsizliği üzerine araştırmalar yapmış ve aşağıdaki sonucu kanıtlamıştır:

* İlker GENÇTÜRK, ilkergencturk@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0492-939X

Teorem 1.1. n pozitif tamsayı olmak üzere bir $[a,b]$ aralığında sürekli türevlere sahip $\mathrm{f}(x)$ fonksiyonu $0 \leq i \leq n-1$ için $f^{(i)}(a) \geq 0$ ve $f^{(n)}(a) \geq n!$ koşullarını sağlasın. Bu durumda, $0 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}-1$ olmak üzere $\mathrm{f}(x)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b \left(f(t)\right)^{n+2} dt \geq \left[\int_a^b f(t)dt\right]^{n+1} \tag{1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Daha sonra, yazar (1) eşitsizliğinde n yerine herhangi bir p pozitif reel sayısı alınırsa, eşitsizliğin hangi koşullar altında geçerliliğini koruyacağına dair bir problem ortaya atmıştır. Bu probleme ilişkin ilgi çekici sonuçlar ortaya atılmış, ayrıca problem daha genel durumlara genişletilerek kayda değer çalışmalarla literatüre katkılar sağlanmıştır. Bakınız [1]. Bu sonuçlar fonksiyonel eşitsizlikler [2, 3]; Hölder eşitsizliği ve onun ters varyasyonları [3, 8]; Cauchy ortalama değer teoremi [4, 6]; ölçü teorisi [5]; analitik metotlar [7, 9]; Jensen eşitsizliği ve konveks fonksiyonlar teorisi [11] gibi farklı yaklaşımlarla elde edilmiştir.

Klasik integral eşitsizliklerinin çeşitli versiyonları, farklı şekillerde tanımlanan kesirli hesap teknikleri yardımıyla yapılmaktadır. Bu tanımlardan birisi de kuantum kalkülüs olarak da bilinen q-kalkülüstür. (p,q)-kalkülüs ise limitsiz kalkülüs olarak da bilinen quantum kalkülüsün bir genelleştirilmesi olarak adlandırılabilir. Son zamanlarda (p,q)-kalkülüs üzerine yapılan çalışmalar, quantum kalkülüsün yaptığı katkıya benzer olarak matematiğin çeşitli alanlarına kayda değer katkılar sunmaktadır. Bu çalışmada, Feng Qi problemi adıyla anılan bu problemin bir (p,q)-analoğu üzerine sonuçlar verilecek, [12] ve [13] nolu kaynaklarda verilen q-tipli Feng Qi eşitsizliklerinin genelleştirilmeleri elde edilecektir.

Çalışmanın ikinci kısmında, çalışmada kullanacağımız (p,q)-kalkülüs üzerine çeşitli tanım ve kurallar verilecektir. Bir sonraki bölümde Feng Qi eşitsizliklerinin bazı genelleştirmeleri ortaya konulacaktır.

2. Materyal ve metot

Okuyucuya uygunluk açısından, (p,q)-kalkülüse dair bazı notasyon ve tanımları hatırlatalım. Çalışmada, p,q sayıları $0 < \mathrm{q} < \mathrm{p} < 1$ şartını sağlayan iki sabit sayı olarak alınmıştır. (p,q)-kalkülüs için daha detaylı bilgi için [14], [15] ve [16] nolu referanslar kaynak gösterilebilir.

Tanım 2.1. Keyfi olarak verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun (p,q)-diferensiyeli

$$d_{p,q}\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(px) - \mathrm{f}(qx) \tag{2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2. Bir $f(x)$ fonksiyonun (p,q)-türevi, $x \neq 0$ olmak üzere

$$D_{p,q}\mathrm{f}(x) = \frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)x} \tag{3}$$

şeklinde tanımlanır. Fonksiyonun $\mathrm{x} = 0$ da klasik türevi varsa bu noktadaki (p, q)-türevi $D_{p,q}f(0)$ ile gösterilir ve $D_{p,q}\mathrm{f}(0) = f'(0)$ dır.

Tanım 2.3. Bir n sayısının (p, q)-analoğu

$$[\mathrm{n}]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p-q} \tag{4}$$

olarak verilmektedir.

Tanım 2.4. Keyfi olarak verilen $f(x)$ için $F(x)$ fonksiyonu $D_{p,q}F(x) = f(x)$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda $F(x)$'e $f(x)'$in bir (p, q)-anti türevi denir ve

$$\int f(x) d_{p,q}x \tag{5}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.5. Keyfi olarak verilen bir f fonksiyonunun (p, q)-integrali

$$\int f(x) d_{p,q}x = (p-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} x\right) \tag{6}$$

olarak tanımlanır.

Burada, f fonksiyonunun (p, q)-integral tanımı biçimsel bir gösterimdir. (6) ile verilen integral, (p, q)-anti türevi mevcut olsa bile, her zaman bir $F(x)$ fonksiyonuna yakınsamaz. Bununla beraber, (p, q)-integralin hangi koşullar altında bir (p, q)-anti türeve yakınsayacağına dair aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.1. [16] $0 < q < p < 1$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, $|f(x)x^{\alpha}|$ fonksiyonu $(0, \mathrm{A}]$ aralığında sınırlı ise bu durumda (p, q)-integrali $(0, \mathrm{A}]$ aralığında, $f(x)$ fonksiyonunun bir (p, q)-anti türevi olan $F(x)$ fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca, $F(0) = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa $F(x)$, $x = 0$ da süreklidir.

İspat. Detaylı ispat için [16] nolu kaynak incelenebilir.

Tanım 2.6. Bir a reel sayısı ve verilen keyfi bir f fonksiyonun belirli (p, q)-integrali, serinin mutlak yakınsaması koşuluyla, $\left|\frac{p}{q}\right| > 1$ için

$$\int_0^a f(t) d_{p,q}t = (p-q)a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} a\right) \tag{7}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.7. $a < b$ olacak şekilde a, b negatif olmayan tamsayıları ve verilen f fonksiyonu için

$$\int_a^b f(t)\, d_{p,q}t = \int_0^b f(t)\, d_{p,q}t - \int_0^a f(t)\, d_{p,q}t \tag{8}$$

geçerlidir.

Teorem 2.2. [16] Herhangi bir f fonksiyonu için

$$D_{p,q}\left(\int_a^x f(t)\, d_{p,q}t\right) = f(x) \tag{9}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (p,q)-türev tanımı kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.8. n pozitif tamsayı ve $b > 0$ olmak üzere $a = \frac{q^n}{p^{n+1}}b$ olsun. Bu durumda $[a,b]_{p,q}$ ve $(a,b]_{p,q}$ diskret aralıklarını

$$[\mathrm{a},\mathrm{b}]_{p,q} = \left\{\frac{q^k}{p^{k+1}}b:\ 0 \le k \le n\right\} \text{ve } (\mathrm{a},\mathrm{b}]_{p,q} = [q^{-1}\mathrm{a},\mathrm{b}]_{p,q} \tag{10}$$

olarak tanımlayalım.

3. Bulgular

Bu bölümde, $[a,b]_{p,q}$ diskret aralık üzerinde bazı Feng Qi tipli (p,q)-integral eşitsizlikleri ortaya koyacağız. Temel sonuçları kanıtlamak için önemli rol oynayan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1. $\alpha \ge 1$ olacak şekilde α reel sayısı verilsin. $[a,b]_{p,q}$ de aralığında tanımlı, negatif olmayan ve artan bir g fonksiyonu için

$$\alpha g^{\alpha-1}(qx)D_{p,q}[g(x)]D_{p,q} \le [g(x)^{\alpha}] \le \alpha g^{\alpha-1}(px)D_{p,q}[g(x)] \tag{11}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Bir fonksiyonun (p,q)-türev tanımı kullanılırsa,

$$D_{p,q}[g(x)^{\alpha}] = \frac{g^{\alpha}(px) - g^{\alpha}(qx)}{(p-q)x} = \frac{\alpha}{(p-q)x}\int_{g(qx)}^{g(px)} t^{\alpha-1}dt \tag{12}$$

elde edilir.
g fonksiyonu negatif olmayan ve monoton bir fonksiyon olduğundan,

$$g^{\alpha-1}(qx)[g(px)-g(qx)] \leq \int_{g(qx)}^{g(px)} t^{\alpha-1}dt \leq g^{\alpha-1}(px)[g(px)g(qx)] \tag{13}$$

yazılabilir.

[12] nolu denklemi kullanarak,

$$\alpha\, g^{\alpha-1}(qx)D_{p,q}g(x)D_{p,q} \leq [g(x)^{\alpha}] \leq \alpha g^{\alpha-1}(px)D_{p,q}g(x) \tag{14}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da aradığımız sonuçtur.

Teorem 3.1. Eğer negatif olmayan artan f fonksiyonu $t \in [a,b]_{p,q}$ için

$$f^{\alpha-2}(qt)D_{p,q}f(t) \geq (\alpha-2)p(p^2t-a)^{\alpha-3}f^{\alpha-2}(p^2t) \tag{15}$$

koşulunu sağlarsa, bu durumda

$$\int_a^b f^{\alpha}(t)d_{p,q}t \geq \left(\int_a^b f(t)d_{p,q}t\right)^{\alpha-1} \tag{16}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Öncelikle $g(t)=\int_a^t f(u)d_{p,q}\,u$ olmak üzere $t \in [a,b]_{p,q}$ için

$$F(t)=\int_a^t f^{\alpha}(u)d_{p,q}u - \left(\int_a^t f(u)d_{p,q}u\right)^{\alpha-1} \tag{17}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

Fonksiyonun (p,q)-türev tanımı ve Teorem 2.2 kullanılırsa

$$D_{p,q}F(t)=f^{\alpha}(t)-D_{p,q}[g^{\alpha-1}(t)] \tag{18}$$

elde edilir.

f ve g fonksiyonlarının $[a,b]_{p,q}$ üzerinde artanlığından dolayı, Lemma 3.1 yardımıyla,

$$\begin{aligned} D_{p,q}F(t) &\geq f^{\alpha}(t)-(\alpha-1)g^{\alpha-2}(pt)D_{p,q}\,[g\,(t)] \\ &\geq f^{\alpha}(t)-(\alpha-1)g^{\alpha-2}(pt)f(t)=f(t)h(t) \end{aligned} \tag{19}$$

elde edilir. Burada $h(t)=f^{a-1}(t)-(\alpha-1)g^{\alpha-2}(pt)$ olarak tanımlanmıştır.

(p,q)-türev tanımından

$$D_{p,q}h(t)=D_{p,q}f^{a-1}(t)-(\alpha-1)D_{p,q}g^{\alpha-2}(pt) \tag{20}$$
olduğu görülebilir.

Diğer taraftan, yine Lemma 3.1 yardımıyla

$$\begin{aligned} D_{p,q}h(t) &\geq (\alpha-1)f^{a-2}(qt)D_{p,q}f(t) - (\alpha-1)(\alpha-2)g^{\alpha-3}(p^2t)D_{p,q}[g(pt)] \\ &\geq (\alpha-1)f^{a-2}(qt)D_{p,q}f(t) - (\alpha-1)(\alpha-2)g^{\alpha-3}(p^2t)pf(pt) \end{aligned} \tag{21}$$

elde edilir.

f fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan,

$$g(p^2t) = \int_a^{p^2t} f(u)d_{p,q}u \leq f(p^2t)(p^2t-a) \tag{22}$$

yazılabilir.

Bu durumda teoremin şartları ve (21)-(22) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} D_{p,q}h(t) &\geq (\alpha-1)\left[f^{a-2}(qt)D_{p,q}f(t) - (\alpha-2)(p^2t-a)^{\alpha-3}pf^{\alpha-2}(p^2t)\right] \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{23}$$

elde edilir ki $h(a) = f^{a-1}(a) \geq 0$ olduğu göz önüne alınırsa $t \in [a,b]_{p,q}$ için $h(t) \geq 0$ olduğu görülür.

Son olarak, $F(a) = 0$ ve $D_{p,q}F(t) = f(t)h(t) \geq 0$ olduğundan her $t \in [a,b]_{p,q}$ için $F(t) \geq 0$ ve özel olarak $t = b$ için

$$F(b) = \int_a^b f^{\alpha}(u)d_{p,q}u - \left(\int_a^b f(u)d_{p,q}u\right)^{\alpha-1} \geq 0 \tag{24}$$

dır. Bu da teoremi kanıtlar.

Teorem 3.2. Eğer $[a,b]_{p,q}$ aralığında negatif olmayan artan f fonksiyonu, $\alpha \geq 1$ ve $\beta \geq 1$ olmak üzere

$$(\alpha-1)f^{\alpha-2}(qt)D_{p,q}f(t) \geq \beta(\beta-1)f^{\beta-1}(p^2t)p(p^2t-a)^{\beta-2} \tag{25}$$

şartını sağlarsa, bu durumda

$$\int_a^b f^{\alpha}(t)d_{p,q}t \geq \left(\int_a^b f(t)d_{p,q}t\right)^{\beta} \tag{26}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $t \in [a,b]_{p,q}$ için $g(t) = \int_a^t f(u)d_{p,q}u$ ve

$$F(t) = \int_a^t f^{\alpha}(u)d_{p,q}u - \left(\int_a^t f(u)d_{p,q}u\right)^{\beta} \tag{27}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

Fonksiyonun (p,q)-türev tanımından

$$D_{p,q}F(t)=f^{\alpha}(t)-D_{p,q}\left[g^{\beta}(t)\right] \tag{28}$$

yazılabilir.

$[a,b]_{p,q}$ üzerinde f ve g fonksiyonları monoton olduğundan, Lemma 3.1 den

$$\begin{aligned} D_{p,q}F(t) &\geq f^{\alpha}(t)-\beta g^{\beta-1}(pt)D_{p,q}[g(t)] \\ &\geq f^{\alpha}(t)-\beta g^{\beta-1}(pt)f(t)=f(t)h(t) \end{aligned} \tag{29}$$

elde edilir. Burada $h(t)=f^{a-1}(t)-\beta g^{\beta-1}(pt)$ dir.

$f(t)$ fonksiyonu negatif olmayan ve artan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} D_{p,q}h(t) &= D_{p,q}f^{a-1}(t)-\beta D_{p,q}g^{\beta-1}(pt) \\ &\geq (\alpha-1)f^{\alpha-2}(qt)D_{p,q}f(t)-\beta(\beta-1)g^{\beta-2}(p^2t)D_{p,q}g(pt) \\ &\geq (\alpha-1)f^{\alpha-2}(qt)D_{p,q}f(t)-\beta(\beta-1)f^{\beta-2}(p^2t)(p^2t-a)^{\beta-2}pf(px) \\ &\geq (\alpha-1)f^{\alpha-2}(qt)D_{p,q}f(t)-\beta(\beta-1)f^{\beta-1}(p^2t)p(p^2t-a)^{\beta-2} \end{aligned} \tag{30}$$

olur ki bu durum teoremin şartlarından $D_{p,q}h(t)\geq 0$ olduğunu gösterir. (p,q)-türev tanımı göz önüne alınırsa $h(t)\geq 0$ *ve* $D_{p,q}F(t)\geq 0$ elde edilir. Sonuç olarak $F(t)\geq 0$ dır. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3. Negatif olmayan artan f fonksiyonu, $\beta\geq 1$ olmak üzere

$$f^{\beta}(qt)\geq \frac{\beta p(p^2t-a)^{\beta-1}}{(b-a)^{\beta-1}}f^{\beta}(p^2t) \tag{31}$$

şartını sağlarsa, bu durumda

$$\int_a^b \left(f(t)\right)^{\beta+2} d_{p,q}t \geq \frac{1}{(b-a)^{\beta-1}}\left(\int_a^b f(t)d_{p,q}t\right)^{\beta+1} \tag{32}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $t\in[a,b]_{p,q}$ için $g(t)=\int_a^t f(u)d_{p,q}u$ ve

$$F(t)=\int_a^t \left(f(t)\right)^{\beta+2} d_{p,q}t-\frac{1}{(b-a)^{\beta-1}}\left(\int_a^t f(t)d_{p,q}t\right)^{\beta+1} \tag{33}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

(p,q)-türev tanımı kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
D_{p,q}F(t) &= f^{\beta+2}(t) - \frac{1}{(b-a)^{\beta-1}} D_{p,q}\left[g^{\beta+1}(t)\right] \\
&\geq f^{\beta+2}(t) - \frac{(\beta+1)}{(b-a)^{\beta-1}} g^{\beta}(pt) D_{p,q} g(t) \\
&\geq f^{\beta+2}(t) - \frac{(\beta+1)}{(b-a)^{\beta-1}} g^{\beta}(pt) f(t) = f(t)h(t) \qquad (34)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki burada $h(t) = f^{\beta+1}(t) - \frac{(\beta+1)}{(b-a)^{\beta-1}} g^{\beta}(pt)$ olarak tanımlanmıştır.

Diğer taraftan,

$$
D_{p,q}h(t) = D_{p,q}f^{\beta+1}(t) - \frac{(\beta+1)}{(b-a)^{\beta-1}} D_{p,q} g^{\beta}(pt) \qquad (35)
$$

dır.

Lemma 3.1 yardımıyla

$$
\begin{aligned}
D_{p,q}h(t) &\geq (\beta+1) f^{\beta}(qt) - \frac{(\beta+1)}{(b-a)^{\beta-1}} \beta g^{\beta-1}(p^2 t) D_{p,q} g(pt) \\
&\geq (\beta+1) f^{\beta}(qt) - \frac{(\beta+1)}{(b-a)^{\beta-1}} \beta g^{\beta-1}(p^2 t) p f(pt) \qquad (36)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

f fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$
g(p^2 t) = \int_a^{p^2 t} f(u) d_{p,q} u \leq f(p^2 t)(p^2 t - a) \qquad (37)
$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
D_{p,q}h(t) &\geq (\beta+1) f^{\beta}(qt) - \frac{(\beta+1)}{(b-a)^{\beta-1}} \beta p (p^2 t - a)^{\beta-1} f^{\beta-1}(p^2 t) f(pt) \\
&\geq (\beta+1) f^{\beta}(qt) - \frac{(\beta+1)}{(b-a)^{\beta-1}} \beta p (p^2 t - a)^{\beta-1} f^{\beta}(p^2 t) \\
&\geq (\beta+1) \left[f^{\beta}(qt) - \frac{\beta p (p^2 t - a)^{\beta-1}}{(b-a)^{\beta-1}} f^{\beta}(p^2 t) \right] \geq 0 \qquad (38)
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak $h(t) \geq h(a)$ olduğundan h artan bir fonksiyondur. Buradan $D_{p,q}F(t) = f(t)h(t) \geq 0$ dır. $F(t)$ artan bir fonksiyon olduğundan $F(t) \geq F(a) \geq 0$ dır. Bu ise aradığımız sonuçtur.

Teorem 3.4. Eğer $[a,b]_{p,q}$ aralığında negatif olmayan artan f fonksiyonu

$$
f(a) \geq a \text{ ve } D_{p,q} f(x) \geq p + q \qquad (39)
$$

şartlarını sağlarsa, bu durumda

$$\int_a^b \left(f(t)\right)^{2\alpha+1} d_{p,q}t \geq \left(\int_a^b f^{\alpha}(t) d_{p,q}t\right)^2 \tag{40}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $F(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarını

$$F(t) = \int_a^t \left(f(t)\right)^{2\alpha+1} d_{p,q}t - \left(\int_a^t f^{\alpha}(t) d_{p,q}t\right)^2 \tag{41}$$

ve

$$g(t) = \int_a^t f^{\alpha}(u) d_{p,q}u \tag{42}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

(p,q)-türev tanımından $t \in [a,b]_{p,q}$ için

$$D_{p,q}F(t) = f^{2\alpha+1}(t) - D_{p,q}(g(t)^2) \tag{43}$$

ve

$$\begin{aligned} D_{p,q}(g(t)^2) &= \frac{g^2(pt) - g^2(qt)}{(p-q)t} = \frac{g(pt) - g(qt)}{(p-q)t}\left(g(pt) + g(qt)\right) \\ &= D_{p,q}\left(g(t)\right)\left(g(pt) + g(qt)\right) \\ &= f^{\alpha}(t)\left(g(pt) + g(qt)\right) \end{aligned} \tag{44}$$

olduğu görülebilir.

(43) denklemi yeniden göz önüne alınırsa,

$$D_{p,q}F(t) = f^{\alpha}(t)\left[f^{\alpha+1}(t) - \left(g(pt) + g(qt)\right)\right] = f^{\alpha}(t)h(t) \tag{45}$$

elde edilir. Burada, $h(t) = f^{\alpha+1}(t) - \left(g(pt) + g(qt)\right)$ dir.

Yine (p,q)-türev tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_{p,q}h(t) &= D_{p,q}f^{\alpha+1}(t) - D_{p,q}g(pt) - D_{p,q}g(qt) \\ &= \frac{f^{\alpha+1}(pt) - f^{\alpha+1}(qt)}{(p-q)t} - pf^{\alpha}(pt) - qf^{\alpha}(qt) \end{aligned}$$

$$= f^{\alpha}(pt)\frac{f(pt) - p(p-q)t}{(p-q)t} - f^{\alpha}(qt)\frac{f(qt) - q(p-q)t}{(p-q)t} \tag{46}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, teoremin varsayımlarından biri olan $D_{p,q}f(t) \geq (p+q)$ kullanılırsa

$$f(pt) \geq f(qt) + (p^2 - q^2)t \tag{47}$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla,

$$D_{p,q}h(t) \geq f^{\alpha}(pt)\frac{f(qt) + (p^2 - q^2)t - p(p-q)t}{(p-q)t} - f^{\alpha}(qt)\frac{f(qt) + q(p-q)t}{(p-q)t}$$

$$\geq \frac{f^{\alpha}(pt) - f^{\alpha}(qt)}{(p-q)t}[f(qt) + q(p-q)t] > 0 \tag{48}$$

ki bu durum $[a,b]_{p,q}$ üzerinde h fonksiyonunun kesin artan olduğunu gösterir.

Ayrıca, $h(a) \geq [f(a)]^{p+1} - (p-q)af(a) > 0$ olduğundan $t \in (a,b]_{p,q}$ için $h(t) > h(a) > 0$ dir. Buradan $t \in (a,b]_{p,q}$ için $D_{p,q}F(t) > 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $F(t)$ fonksiyonu $(a,b]_{p,q}$ de kesin artan bir fonksiyondur. Özel olarak $t = b$ için $F(b) > F(a) = 0$ dır.

3. Sonuçlar ve tartışma

İntegral eşitsizlikleri matematiğin çeşitli alanlarında önemli uygulamaları olduğu gibi kendi alanında ilgi çekici sonuçlar sunmaları ile büyük bir etkiye sahiptir. Klasik analiz ile beraber quantum kalkülüste incelenen Feng Qi eşitsizlikleri göz önüne alındığında (p,q)-kalkülüsün tanımları kullanılarak elde edilen bu tipteki integral eşitsizlikleri daha genel bir forma sahiptir. Bu çalışmanın sonuçlarının daha önceki yapılan çalışmaların sonuçları ile özel seçimler altında -örneğin $p = 1$ seçimi q-tipli integral eşitsizliklerini verir- uyumluluk gösterdiğine dikkat çekmekte ve sonuçların klasik F. Qi eşitsizliğinin rol oynadığı alanlarda yararlı olacağını düşünmekteyiz.

Kaynaklar

[1] Qi, F., Several integral inequalities, **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, 1 (2), Art. 19, (2000).

[2] Akkouchi, M., On an integral inequality of Feng Qi, **Divulgaciones Matemáticas**, 13(1), 11-19, (2005).

[3] Bougoffa, L., Notes on Qi type inequalities, **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, 4 (4), Art. 77, (2003).

[4] Chen, Y., Kimball, J., Note on an open problem of Feng Qi, **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, 7(1), (2006).

[5] Csiszár, V., Móri, T. F., The convexity method of proving moment-type inequalities, **Statistics & Probability Letters**, 66(3), 303-313, (2004).
[6] Qi, F., Li, A. J., Zhao, W. Z., Niu, D. W., Cao, J. Extensions of several integral inequalities, **Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, 7(3), 1-6, (2006).
[7] Pečarić, J., Pejković, T., Note on Feng Qi's integral inequality, **Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, 5(3), Art. 51, (2004).
[8] Pogány, T. K., On an open problem of F. Qi, **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, 3 (4), Art. 54, (2002).
[9] Towghi, N., Notes on integral inequalities, **Research Group in Mathematical Inequalities and Applications**, 4(2), 277-278, (2001).
[10] Yıldırım, M. E., Akkurt, A., Yıldırım, H., Generalized Qi's Integral Inequality, **Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi**, 37(1), 12-19, (2016).
[11] Yu, K. W., Qi, F., A short note on an integral inequality, **Research Group in Mathematical Inequalities and Applications**, 4(1), (2001).
[12] Brahim, K., Bettaibi, N., Sellemi, M., On some Feng Qi type q-integral inequalities, **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, 9(2), 1-7, (2008).
[13] Miao, Y., Qi F., Several q-integral inequalities, **Journal of Mathematical Inequalities,** 3(1), 115-121, (2009).
[14] Brodimas, G., Mignani, R.P., Jannussis, A., Two-parameter quantum groups, **Universitadi Roma Preprint,** Nr. 820 (1991).
[15] Chakrabarti, R., Jagannathan, R., A (p,q)-oscillator realization of two-parameter quantum algebras, **Journal of Physics A: Mathematical and General**, 24(11), (1991).
[16] Sadjang, P. N., On the Fundamental Theorem of (p,q)-Calculus and Some (p,q)-Taylor Formulas, **Results Mathematics**, 73 (39), (2018).