



## A Pedagogical Perspective Concerning the Concept of Mathematical Proof: A Theoretical Study

Yüksel Dede<sup>1</sup>

Fatih Karakuş<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Gazi University, Faculty of Gazi Education, Department of Elementary School Mathematics Education, Ankara.

<sup>2</sup>Afyon Kocatepe University, Faculty of Education, Department of Elementary School Mathematics Education, Ayfonkarahisar.

### ARTICLE INFO

#### Article History:

Received

12.05.2014

Received in revised form

02.07.2014

Accepted

20.07.2014

### ABSTRACT

This study focused on the role and importance of the concept of mathematical proof in mathematics teaching. For this purpose, some explanations and related discussions such as what is the definition of the concept of mathematical proof, its aims, functions, proof schemes, its function in mathematical teaching and learning process, and its role in the mathematics curriculum were included in the context of this paper.

© 2014 AUJES. All rights reserved

Keywords:

Proof, mathematical proof, mathematics teaching

## Extended Abstract

### Purpose

The importance of proof in mathematics and mathematics education increases rapidly. But what is mathematical proof? Why proof is so important in mathematics education? This study aims to find an answer to these questions? For this purpose, some explanation and related discussions such as what is the definition of the concept of mathematical proof, its aims, functions, proof schemes and its role in the mathematics curriculum were included in the context of the paper.

The primary purpose of a mathematical proof is to indicate not only whether it is right or wrong but also why it is right or wrong (Hanna, 2000). A good proof helps us understand the meaning of the given theorem. Also, it shows both the accuracy of a theorem and the reasons of this accuracy. This kind of proof is so persuasive that it has a wide range of benefits and functions. One of these benefits can be that it helps us provide good definitions and useful algorithms. Another one is to contribute to the systematization of results and the schematization of mathematical knowledge. In this regard, the functions of a mathematical

<sup>1</sup> Corresponding author's address: Gazi University, Faculty of Gazi Education, Department of Elementary School Mathematics Education, 06500, Teknikokullar, Ankara  
e-mail:ydede2000@gmail.com

proof can be presented under the headings of verification, explanation, systematization, discovery, intellectual challenge, communication, and justification of definitions. It is of importance for students to be aware of a proof and understand why a proof is essential. Therefore, a role of proof in school mathematics is to explain the accuracy of a claim. Furthermore, proof is used to show why the results known by students are right. With the preceding reasons, proof has a significant role on constructing mathematical knowledge. During the production of a proof, students start to discover by testing, realize the aesthetic side of mathematics, and develop their analytical thinking skills. The techniques used in the proof production process reveal the thinking frames of students about the subject. Harel and Sowder (1998, 2007) named these thinking frames as proof schemes. The proof schemes which students use throughout the proof production process reflect their thoughts. Meanwhile, they reveal misconceptions of students. Therefore, curriculums are closely related with the proof production process of students and proof schemes.

### **Discussion and Conclusion**

In all kinds of scientific research, any proposal or theory cannot be accepted as right without sufficient proof. For instance, in sciences or similar fields, experiments and systematic observations are critical to approve the accuracy of a claim. In mathematics, the only way to prove the accuracy of a statement or proposal is proof production of this statement or proposal. Mathematical proof is a logical deduction based on the relationships between proposals. In other words, to make the story short, mathematical proof is to prove the accuracy of a statement or proposal by relating one or more proposal and presenting it with a number of logical deductions. Therefore, proof concept plays a significant role in developing mathematical thinking skills of students and constructing mathematical knowledge. Based on the results of the study, the future studies should focus on the instruction of proof concept in mathematics classes and the determination of the roles of teachers and curriculums.



## Matematiksel İspat Kavramına Pedagojik Bir Bakış: Kuramsal Bir Çalışma

Yüksel Dede<sup>1</sup>

Fatih Karakuş<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara.

<sup>2</sup>Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Ayfonkarahisar.

### MAKALE BİLGİ

*Makale Tarihi:*  
Alındı 12.05.2014  
Düzeltilmiş hali  
alındı 02.07.2014  
Kabul edildi  
20.07.2014

### ÖZET

Bu çalışma, matematik öğretiminde matematiksel ispat kavramının rolü ve önemi üzerine odaklanmıştır. Bu amaç için, matematiksel ispatın tanımı, yapılış amacı, fonksiyonları, ispat şemaları ve matematiksel ispatın matematik öğrenme ve öğretme sürecindeki işlevi ile matematik öğretim programlarındaki rolüne ilişkin açıklamalara ve tartışmalara yer verilmiştir.

©2014 ADYÜEBD. Tüm hakları saklıdır

Anahtar Kelimeler:

İspat, matematiksel ispat, matematik öğretimi

### Giriş

Bilimin bütün alanlarında, elde edilen bilimsel bilgilerin doğruluğunu ispatlamak ortak bir amaçtır. Fen bilimleri gibi alanlarda, bilimsel bilgilerin doğruluğu daha çok gözlem ve deneyler aracılığıyla gösterilirken, matematiksel bilgilerin doğruluğunun gösteriminde bu çeşit doğrulama yöntemleri yeterli değildir. Bu kapsamda; bir matematikçi, bir matematiksel ifade ve önermenin doğruluğunu göstermek için deneysel ve/veya gözlemsel sonuçlardan ziyade geçerli mantıksal çıkarımlardan yararlanır (Hanna ve Barbeau, 2002, Polster, 2004). Bu noktada, devreye matematiksel ispat kavramı girmektedir.

### Matematiksel İspat

Türk Dil Kurumu (TDK) (2005) ispatı, “Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama, tanıt”, ispat etmeyi ise “1) kanıtlamak, ... 2) tanıtlamak” (s.984- 985) şeklinde tanımlamaktadır. Hersch (1993) ise ispatlamak kelimesinin, bir durumun doğruluğunun belirlenmesi, denenmesi ve test edilmesi anlamına geldiğini ifade etmiştir. Diğer taraftan, ispat kavramı bulunduğu içeriğe göre farklı anlamlara da gelmektedir. Örneğin, bir hâkime

<sup>1</sup> Sorumlu yazarın adresi: Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, 06500, Teknikokullar, Ankara.  
e-posta: ydede2000@gmail.com

göre sağlam deliller, bir fen bilimciye göre gözlem ve deney sonucu elde edilen test edilebilir bilgiler ve bir matematikçiye göre ise delil ve test edilebilir bilgiden daha fazlasını içerir (İskenderoğlu, 2010). Bir matematiksel ispatın amacı, bir iddianın sadece doğru ya da yanlış olduğunu değil aynı zamanda niçin doğru ya da niçin yanlış olduğunu göstermektir (Hanna, 2000). Matematiksel ispatın ne olduğuna yönelik tartışmalar ise uzun süredir devam etmektedir. Matematiksel ispat kavramına ilişkin yapılan tartışmalar sonucunda, matematiksel ispat kavramının iki kategori üzerinden değerlendirildiği görülmektedir. Bu kategoriler, matematiksel ispatın *formel boyutu* ve *sosyal veya kültürel boyutudur* (Arsac, 2007). Matematiksel ispatın formel boyutu, matematiksel bir bilginin doğrulanması sürecindeki kural, ifade, açıklama ve önermeleri vb. içermektedir. Matematiksel ispatın sosyal veya kültürel boyutu ise yapılan ispatın geçerliliği için kullanılan süreç, işlem ve yöntemleri kapsamaktadır. Bu anlamda, eğer bir matematiksel bilginin doğruluğunun gösterildiği bir içerik, matematikçiler tarafından geçerli olarak tanımlanırsa bu içerik bir matematiksel ispat olarak kabul edilmektedir. (Dede, 2013). Matematikçiler tarafından bir teoremin kabulü, bir formel ispattan ziyade ispatın anlaşılmasına ve önemine daha fazla vurgu yapan bir sosyal süreci içermektedir. Yani, matematiğin bir teoreminin önemi ve altındaki kavramların anlaşılması durumu bu teoremin kabulü noktasında, formel ispatın varlığından çok daha fazla rol oynamaktadır. Diğer taraftan; bir matematiksel ispat, matematiği diğer bilimlerden ayıran matematiğin en önemli kavramlarından biri olmasına rağmen, öğrencilerin anlamakta zorlandıkları kavramların da başında gelmektedir (Arsac, 2007). Bu durumun nedenlerinden biri olarak; matematiksel ispatın, ispatı yapan kişiye, okuyan kişiye ve ispatın türüne bağlı olarak farklı fonksiyonlara sahip olması gösterilebilir (CadwaladerOlsker, 2011).

### **Matematiksel İspat ve Fonksiyonları**

Matematikçiler için bir iddianın doğrulanmasından ziyade ispatlanması daha önemlidir. Çünkü iyi bir ispat, verilen teoremin anlamını anlamaya yardım eder ve hem teoremin doğruluğunu hem de niçin doğru olduğunu gösterir (Hanna, 2000). Ayrıca, bu tür bir ispat oldukça ikna edicidir ve farklı faydaları ve fonksiyonları vardır. Bu faydalarından ikisi, (a) iyi tanımların ve kullanışlı algoritmaların oluşturulmasına yardımcı olması ve (b) sonuçların sistematikleştirilmesine ve matematiksel bilginin biçimselleştirilmesine katkıda bulunması şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan; bir

matematiksel ispatın, fonksiyonları ise aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Bell, 1976; CadwalladerOlsker, 2011; de Villiers, 1999; Hana ve Jahnke, 1996):

*i) Doğrulama:* Matematikçilerin en fazla bildiği ve aşına oldukları ispat fonksiyonlarından biridir. Buna göre; bir ifade ve önerme, doğruluğu gösterilmediği müddetçe bir teorem olarak dikkate alınmamaktadır. Doğrulama, matematiksel bir önermenin doğruluğunu gösterme olarak anlaşılmaktadır. Birçok matematikçi, ispatın mutlak bir kesinlik sağladığına ve iddianın geçerliliğinin sağlanmasında mutlak otorite olduğuna inanır. Bilimsel gerçeklerin doğruluğunun sağlanmasında deney, matematiksel gerçeklerin doğruluğunun sağlanmasında ise ispat önemli bir yere sahiptir. Ancak ispat, doğrulama için gerekli bir ön koşul olmamasına karşın doğrulama, ispat için bir ön koşuldur (de Villiers, 1990)

*ii) Açıklama:* İspatın, açıklama rolüne derslerde genel anlamda vurgu yapılmaktadır. Matematiksel içeriklerin çoğunda bir ispatın amacı, bir önermenin doğru olduğunu göstermekten ziyade bir önermenin niçin doğru olduğunu açıklamaya yönelik olmalıdır. Buna karşın, doğrulamalarla bir iddianın geçerliliği büyük ölçüde sağlanabilse de iddianın niçin doğru olduğu hakkında bu çabalar yetersiz kalmaktadır. Bu bağlamda, ispatın açıklama fonksiyonu iddianın niçin geçerli olduğu hakkında yeterli güveni sağlamaktadır. Ancak, ispatın bu rolünü sadece ders içerikleriyle sınırlandırmak da doğru değildir.

*iii) Sistematikleştirme:* İspatın bu fonksiyonuna en fazla Euclid'in *Elements* adlı kitabında rastlanmaktadır. Bu kitapta, Yunanlı matematikçilerin ispatladıkları birçok teorem toplanmış ve bunlar teorem, tanım, aksiyom ve postulatlar şeklinde düzenlenmiştir. Burada, Euclid geometrisinin geliştirilmesi için yeterli düzeyde tanım, aksiyom ve postulat da bulunmaktadır. Ayrıca, bölünebilme kuralları, asal sayılar ve çarpanlara ayırma gibi sayılar teorisinin ilk önemli sonuçlarına da yer verilmiştir (Barendregt&Wiedijk, 2005). Matematikçiler, matematiğin sistematikleştirilmesiyle tanım ve aksiyomların gereksiz fazlalıklarından kurtulabilir ve bunların küçük bir kümesi ile gerekli kavramların ve fikirlerin hepsini yakalama imkânına sahip olabilirler.

*iv) Keşif:* İspatın bu fonksiyonuna az rastlanmaktadır. Tarihsel olarak, Euclid dışı geometriler gibi matematiğin bazı alanlarının teoremlerine soyut tümdengelimci akıl yürütmeler aracılığıyla ulaşılmıştır. Örneğin; Euclid'in beşinci postulatında (paralellik postulatı), düzlem yerine eğrisel yüzeyler üzerindeki şekillerin geometrisini tanımlayan teoremler aracılığıyla Euclid dışı geometriler ortaya çıkmıştır.

v) *Zihinsel sorgulama*: İspatın zihinsel sorgulamaları, ispatın ikna ediciliğini tamamlayıcı bir parça olarak görülmektedir. Matematikçilere, bir ispatı tamamlarken ispatın içerisinde yaşadıkları zihinsel sorgulamalar oldukça eğlenceli ve sevimli gelebilir. Bu nedenle; matematikçiler ve matematik eğitimcileri, öğrencilerin ispatların yapımındaki zihinsel tartışmalardan hoşlanmalarını ve tat almalarını sağlayıcı ortamlar/etkinlikler hazırlamalı ve öğrencileri bu noktada cesaretlendirmelidirler.

vi) *İletişim*: İspatın iletişim fonksiyonu, ispatların insanlar tarafından okunmasını ve yazılmasını ifade etmektedir. Bu fonksiyona göre ispatlar, insanlar arasında matematiksel sonuçların iletişiminin bir aracı olarak görülmektedir. Üstelik ispatlar, yeni bir yaklaşım veya teknikler sunabilirler ve bu şekilde diğer matematikçilerin kendilerine ait farklı bir teoremi/teoremleri tamamlamaları ve geliştirmeleri için imkânlar da sağlayabilir.

vii) *Tanımların doğrulanması*: İspatın tanımları doğrulama fonksiyonu, onun verilen tanım veya önermelerin geçerliliğinin sağlanmasında bir otorite olarak algılanmasını ifade etmektedir. Bunun yanında, tanımlara olan güvenin artmasında da etkilidir. Tanım, aksiyom ve teoremler, matematiksel bilginin oluşumunda birbirleriyle sürekli etkileşim ve uyum içerisindedirler. Örneğin, Euclid geometrisini, tanımsız terimler, aksiyomlar ve teoremler oluşturmaktadır. Başta bazı kabullerin (aksiyomların) ve tanımların üzerine inşa edilen bilgiler daha sonra mantıksal birçok çıkarsama ve ispat ile aksiyomatik bir yapıya kavuşmaktadır. Bu bağlamda, matematiksel bilginin oluşumunda ortaya konulan tanımlar ile teoremler birbiriyle uyumlu olmak zorundadır. Bu açıdan ispat, tanımların doğruluğunun sağlanmasında önemli bir role sahiptir. Burada; başka bir örnek olarak, gerçek sayı sisteminin tanımlarını doğrulayan analiz derslerinde öğretilen Ortalama Değer Teoremi'nin ispatı verilebilir. Ayrıca ispatın bu fonksiyonu, çelişkiyle ispat veya matematiksel tümevarım gibi ispat çeşitlerini göstermesi bakımından da önemlidir.

Matematiksel ispatların yukarıda belirtilen fonksiyonları, daha önce de belirtildiği üzere, ispatı yapan ve ispatı okuyan kişiye göre değişiklik gösterebilir. Örneğin, bir matematik çalışmasında veya makalesinde bir teoremin ispatı, teoremin doğruluğunu göstermeyi amaçlarken, bir öğrenci için aynı teoremin ispatı, ispatın altındaki temel fikrin bir açıklaması olabilir. Bu bağlamda, matematiksel bir ispatın yapılış amacı farklılıklar göstermektedir.

## Matematiksel İspat Yapma ve Amacı

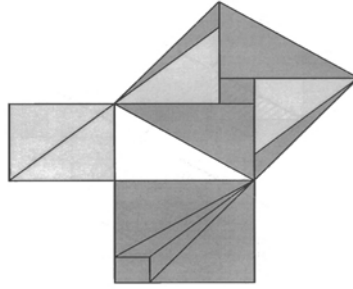
Öğrencilerin, ispatın niçin yapıldığını anlamaları veya bunun farkında olmaları önemlidir. Bu nedenle, matematiksel ispata niçin gerek duyulduğu ve bu ispatların matematiğin öğrenimindeki ve anlaşılmasındaki rolü öğrencilere gösterilmelidir. Bu kapsamda, matematiksel ispatların yapılış amacı aşağıdaki gibi dört başlık altında toplanabilir. Bunlar: a) Heuristik ispat, b) Açıklayıcı ispat, c) Keşfedici ispat ve d) Görsel ispattır.

*a) Heuristik İspat:* Bazı matematikçiler, sadece akıl yürütme üzerine değil aynı zamanda doğrulama üzerine de odaklanan tümdengelimsel ispatların uzun uzadıya öğretilmesine ihtiyaç olmadığını belirtmektedirler. Bu matematikçilere göre, heuristik teknikler (örneğin, tahmine ve sezgiye dayalı doğrulamalar), öğrencinin zihinsel yapısıyla daha uyumludur ve doğrulama sürecinde formel ispattan daha kullanışlıdır. Zira, matematiksel ispatların öğrenimi belli bir sıra halinde görünürde gerçekleşmekte, ezbere olmaktan öteye gitmemekte ve herhangi bir eğitimsel değer içermemektedir. Bu nedenle, heuristik ispatta informel doğrulama, keşfetme, araştırma ve sezginin kullanımı formel ispattan çok daha fazla eğitimsel rol üstlenmektedir (Hanna, 2000a). Örneğin, aşağıdaki gibi bir senaryo heuristik ispatın nasıl kullanılacağına yönelik bir fikir verebilir:

*Senaryo:* Ali ve Hüseyin, farklı üçgenler çizdiler ve her bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamını ölçtüler. Her ikisi de, bütün üçgenler için bu toplamın  $180^0$  olduğunu keşfettiler. Ali ve Hüseyin, bu durumun bir rastlantı olmadığından öğrenme süreci içinde emin oldular. Ali ve Hüseyin'in varsayımı: "Herhangi bir üçgende, üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı  $180^0$  dir." şeklindedir. Bu şekilde, öğrenciler sezgisel bir yaklaşımla bir üçgende, üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının  $180^0$  olduğunu ispatladılar (Reis ve Renkl, 2002).

*b) Açıklayıcı İspat:* Matematikte ispatın temel fonksiyonu, önermelerin doğruluğunu göstermektir. İspatın diğer fonksiyonlarından biri de verilen önermeleri açıklamak veya açıklığa kavuşturmadır. En iyi ispat, sadece bir teoremin doğruluğunu gösteren değil aynı zamanda teoremin anlaşılmasına da yardım eden ispattır. Bu tür ispat, çok daha ikna edicidir ve dolayısıyla matematik toplumu tarafından da daha kolay kabul edilmektedirler. Açıklayıcı ispat, eski Çin matematikçilerine kadar uzanmaktadır. Yunanlı matematikçiler tarafından geliştirilen

aksiyomlar, Çin'e ulaşıncaya kadar Çinli matematikçiler tümdengelimsel ispatla ilgilenmemişler, bir ispatın daha çok açıklayıcılığı ve ikna ediciliği üzerine odaklanmışlardır. Bu açıklama ve ikna etmeye yönelik ispatlar ise argümanların heuristik akıl yürütmenin ve sözsüz ispat olarak bilinen şekillerin parçalara ayrılmasının dengeli bir kullanımdan oluşmuştur (Hanna, 2000b). Bu çeşit ispatın en bilinen örneği, parçalara ayrılmış kareleri kullanarak M.S. III. yüzyılda Liu Hui tarafından yapılan Pisagor Teoremi'nin ispatıdır (bkz. Şekil 1).

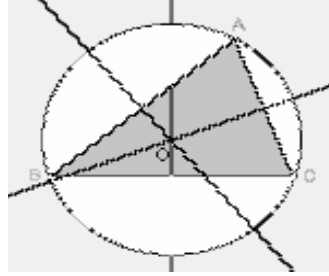


**Şekil 1.** *Pisagor Teoremi'nin İspatı (Nelsen, 2000, s. 4)*

c) *Keşfedici İspat:* Dinamik yazılım programlarının matematik derslerinde kullanılmasıyla, matematiksel keşifler özellikle de geometri öğretiminde hızlı bir ivme kazanmıştır. Geometer's Sketchpad, Cabri ve Sketchpad gibi dinamik yazılım programları, öğrencilerin yüksek düzeyde doğruluk derecesine sahip geometrik çizimler yapabilmelerine imkân vererek, matematiksel ifadeleri ve önermeleri anlamalarına yardımcı olmuştur. Ancak; buradaki keşif, ispatın yerini almasına gerek yoktur ve her ikisi birlikte de kullanılabilir. Fakat bu yeni bir durum değildir. Zira keşif, bilgisayarlar icat edilmeden önce de matematiğin önemli bir yüzü olmuş, geleneksel olarak ispatın merkezi rolüyle ve bir analitiksel bilim olarak matematiğin bakışıyla tutarsızlık göstermemiştir. Hatta, keşif ve ispat birbirlerinin tamamlayıcısı olmuştur. Örneğin; bir öğrenci, "herhangi bir üçgende, üç kenarın orta dikmeleri bir noktada kesişir" teoremini ispatlamak istemektedir. Öğrenci, bunun için bir kağıda bir üçgen ve üçgenin üç orta dikmesini çizer ve bunun doğru olduğunu gösterebilir. Fakat bu çizim için, Cabri, GeoGebra, Geometer's Sketchpad vb. dinamik yazılım programları önemli avantajlar sağlayabilir. Bu dinamik yazılımlar, öğrencilere üçgende bir noktayı kavramalarına ve ekran üzerinde üçgenin yerini değiştirmelerine imkân verirler. Bu şekilde, orta dikmeler sürekli olarak doğru bir şekilde yeniden

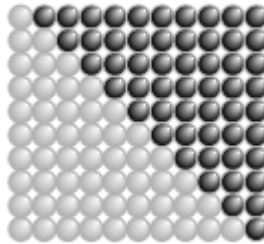


çizilebilir (bkz. Şekil 2). Bu durum, öğrencilerin üç orta dikmenin her defasında bir tek noktada kesiştiğini (çevrel çemberin merkezi) anlamalarına yardımcı olabilir (Hanna, 2002).



**Şekil 2.** Çevrel Çemberin Merkezi

d) *Görsel İspat:* Görsel temsiller, sadece matematiksel ifade ve önermeler için bir delil olarak değil aynı zamanda matematiksel ifade ve önermelerin doğrulanması için de kullanılabilirler. Bu bağlamda, matematiksel kavramların anlaşılmasını kolaylaştırmak amacıyla grafik ve başka görsel temsillerden yararlanılabilir. Buna göre; grafik ve görsel temsiller, bir matematiksel ifadenin ve önermenin temel bir ögesi olarak kabul edilebilir ve matematik müfredatlarının temel bileşenleri olarak da düşünülebilir (Hanna, 2000b). Örneğin,  $n \geq 1$  tam sayısı için ilk  $n$  ardışık tam sayının toplamının  $t_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  olduğu Şekil 3'te verilen görsel ispat ile gösterilebilir.



**Şekil 3.** 1'den n'ye kadar n tane ardışık tam sayının toplamının görsel ispatı (Alsina & Nelsen, 2010, s. 120)

Şekil 3'teki gri toplar, 1'den n'ye kadar olan tam sayıları gösterir. Bu ifadeyi, bir dikdörtgene tamamladığımızda  $n$  tane satır ve  $(n+1)$  tane sütun oluşur. Buna göre, bu dikdörtgenin alanının yarısı 1'den n'ye kadar  $n$  tane ardışık tam sayının toplamını verir. Buradan  $t_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  elde edilir.

## Bilgisayarla İspat Yapma

Matematiksel ispat, insanoğlunun en büyük zihinsel başarılarından birisidir ve insanoğlunun yapabileceği en derin, en karmaşık ve en güçlü argümanları içermektedir. Matematiksel ispat, son yarım yüzyıla kadar matematikçilerin insani uğraşlarına dayalı olmuş ve matematikçilerin özel koruması altında kalmıştır (Bundy, 2008). Matematiğin tarihi ele alındığı zaman, ispatın öğrenimi ve öğretimi üzerindeki araştırmalarda genellikle bu standart bakış kastedilmiş ve bu bakışın ispat araştırmaları ve öğrenimi üzerindeki etkisinden bahsedilmiştir (Reid ve Knipping, 2010). Ancak, Dört-Renk Teoremi\* gibi uzun yıllar ispatlanamayan bazı teoremlerin ispatında bilgisayarların kullanılması bu bakışın değişmesine neden olmuştur. Bilgisayarların, matematiksel ispatlarda kullanılması matematikçiler arasında teorik ve felsefi farklı görüş ayrılıklarının oluşmasına yol açmıştır. Örneğin, “Bilgisayarların veya sistemi oluşturanların bir hata yapıp yapmadığından nasıl emin olunabilir?”, “Bilgisayarlı ispatlar, geleneksel kağıt-kalem ispatlarından farklı mıdır?”, “Bu ispatlar, matematiğin estetik yönünün yok olmasına neden olur mu?” vb. (Sangalli, 1991) sorular bunlara örnek gösterilebilir. Bu tür tartışmalar, bilgisayarın matematiksel ispatlarda kullanılmasıyla ilgili olarak iki farklı yaklaşımın ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bunlar:

*i) Bilgisayarlar yardımıyla matematiksel ispat yapılabilir:* Matematiksel önermelerin ve teoremlerin ispatı için bilgisayarların kullanılması, matematik toplumu için aslında geleneksel olmayan bir yoldur. Fakat, matematik toplumuna hâkim olan Aristo mantığı, matematiksel önermelerin doğruluğuna ya da yanlışlığına karar verme noktasında sürekli olarak takip edilmesi gereken bir yol olarak görülmemelidir. Bu nedenle bu yaklaşıma göre, matematiksel önermelerin geçerliği ve yanlışlığı bilgisayarlar aracılığıyla kontrol edilebilir (Hersch, 1997). Bu görüşe göre, matematikteki deneysel akıl yürütme için önerilen bu yeni rol bir alternatiftir ve bazı durumlarda da uygulanması zorunludur. Bu alternatif bakış, çok uzun ve karmaşık ispatların varlığından etkilenilerek önerilmiştir. Bilgisayar destekli ispata ilişkin en meşhur örnek, Appel ve Haken tarafından 1976 yılında bilgisayarlar yardımıyla yapılan Dört-Renk Teoremi'nin ispatıdır. Bu teoremin ispatına ilişkin, Appel ve Haken

---

\* Dört-Renk Teoremi: Düzlemde (veya bir kürenin yüzeyinde) çizilen herhangi bir haritanın bölgeleri, komşu bölgeler farklı renkler olacak şekilde dört renk ile boyanabilir mi? (D'Angelo & West, 2000, s.193).

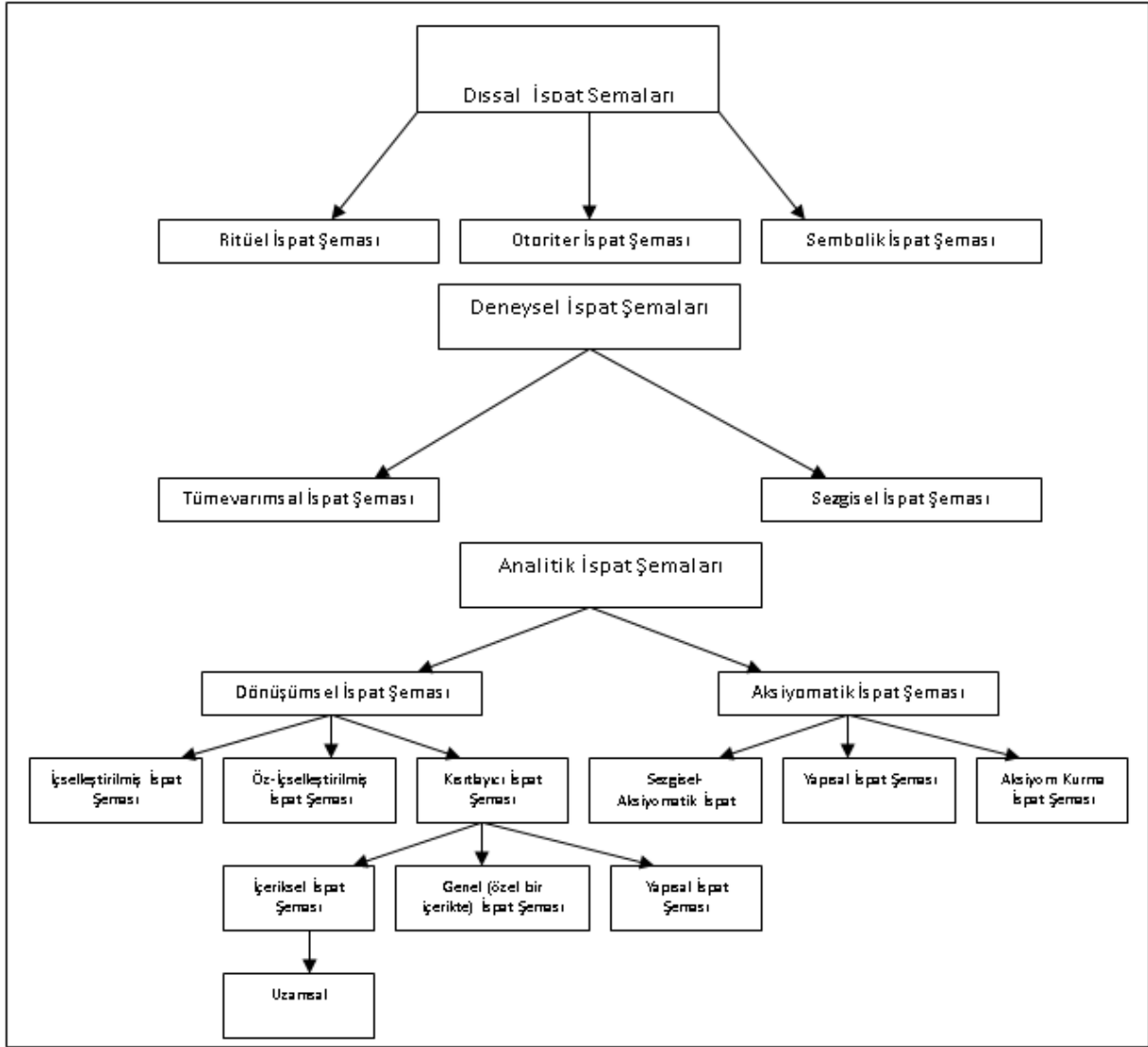
tarafından 1936 farklı özel durumun bilgisayarlarda analizi yapılmış ve bu analizler alanın uzmanları tarafından kabul edilmiştir (Benson, 2000).

ii) *Bilgisayarlar, matematikte ispatın merkezi rolüne zarar verir:* Geleneksel olarak matematik kitaplarında teoremler ve ispatları, Platonist felsefeyi temel alan tümdengelimli bir yaklaşımla sunulmaktadır. Buna karşın; bilgisayarların, matematiksel ispatlarda kullanılması bir ispat olarak nitelenenlerin ne olduğu kadar, matematikte ispatın önemi ve rolü hakkında da tartışmalar yapılmasına neden olmuştur (Hersch, 1997). Zira bilgisayarlarla yapılan ispat, matematiksel ispat için yaygın olarak kabul edilen adım adım ilerleme sürecini dışlamaktadır. Bu durum, matematiksel doğrulama için benimsenen uygun standartların gerçekten bir ispat olup olmadığına ilişkin soruları da beraberinde getirmiştir (Detlefsen, 2008). Bu nedenle, mekaniğin önde gelen isimlerinden birisi olan Clifford Truesdell, bilgisayarlarla yapılan ispatı, tehdit edici ve sevimsiz olarak nitelemiştir. Bazı matematikçiler de, Dört-Renk Teoremi'nin ispatının bilgisayarla yapılmasına şiddetle itiraz etmişler ve bu tür bir ispatın bir matematiksel durum içermediğini aksine sadece bilgisayarların çalışma ilkelerine, algoritmalarına ve süreçlerine inanmayı gerekli kıldığını belirtmişlerdir. Bu durumun ise ispatın geleneksel kavramını ihlal ettiğini öne sürmüşler ve bilgisayarlar aracılığıyla yapılan bu çeşit ispatlara "Bu bir ispat değildir!" şeklinde alaycı bir yaklaşım sergilemişlerdir (Hersch, 1997; s. 28). Bu nedenle, Apel ve Haken, Dört-Renk Teoremi'nin ispatında mümkün olan bütün olasılıkları bilgisayar yardımıyla test etmesine ve buradaki ispat süreci mantıksal çıkarımlara uygun olmasına rağmen birçok matematikçi, bilgisayarla yapılan bu ispatta bazı ince hatalar yapılabileceğinden hareketle bu ispat çeşidine şüpheyle yaklaşmıştır. Zira bilgisayarla yapılan bir ispatta, ispatın nasıl çalıştığını gösteren mantıksal süreçler ve bu süreçler içindeki uyum tespit edilememektedir (Tall, 2002). Ayrıca, bu teoremin ispatı oldukça uzun hesaplamalar gerektirmektedir ve bir insan tarafından doğrulanması mümkün değildir. Diğer taraftan, bilgisayar ve bilgisayar programları da yanılabilir. Fakat matematikçiler, mevcut şartlara göre daha fazlası yapılamayan ve bu şekilde ispatlanan önermeleri kabul etmek zorunda kalmıştır (Hanna, 2007).

### **Matematiksel İspat Şemaları**

İspatın okul matematiğindeki bir rolü, verilen bir iddianın doğruluğunun gösterilmesidir. Ayrıca ispat, öğrencilerin önceden bildiği sonuçların doğruluğunu ve bu sonuçların neden doğru olduğunun gösterilmesinde de kullanılmaktadır. Bu anlamda ispat, matematiksel bilginin oluşumunda önemli bir işleve sahiptir. İspat

yapma sürecinde öğrenci denemeler yaparak keşfetme sürecine girer, matematiğin estetik yönünün farkına varır ve analitik düşünme becerilerini geliştirebilir. Yukarıda ifade edilen ispatın bu rolleri aslında ispatın fonksiyonlarına işaret etmektedir. Çünkü okul matematiğinde yer alan ispatlar verilen bir iddianın sistematik bir şekilde doğrulanmasını, niçin doğru olduğunun gösterilmesini ve bu süreçte çeşitli keşiflerin yapılmasını içermektedir. İspatlama sürecinde kullanılan yöntemler, öğrencinin konu hakkındaki düşünce yapılarını ortaya koymaktadır. Harel ve Sowder (1998, 2007), bu düşünce yapılarını ispat şemaları olarak isimlendirmiştir. Harel ve Sowder'e (1998, 2007) göre, farklı kültür, zaman ve koşullarda yaşayan öğrenciler/bireyler, matematiksel bir ifade ve önermeye yönelik durumu belirleme ve ikna olma/etme süreçlerine ilişkin şüpheleri ortadan kaldırmak için farklı yöntemler kullanabilirler. Buna göre; bir kişinin ispat şeması, kişinin bir matematiksel duruma yönelik hangi durumları/faktörleri belirlemesi gerektiğine ve bu belirlediği faktörlere/durumlara ikna olmasına/etmesine ilişkin kavramları içermektedir. Bu bağlamda, Harel ve Sowder (1998) tarafından ispat şemalarına yönelik üç kategori önerilmiştir (bkz. Şekil 4). Bu şemalar, birbirlerinden bağımsız değildir ve öğrenciler/bireyler aynı anda bu şemaların birden fazlasına sahip olabilirler. Bu ispat şemalarının her biri, öğrencilerin/bireylerin matematiksel gelişimlerdeki ve ispatlama süreçlerindeki davranışlarının gözlemlenmesinden çıkarılan bir bilişsel basamağı, bir zihinsel beceri ve yeteneği ifade etmektedir. Bu üç ispat şeması, *dışsal ispat şeması*, *deneysel ispat şeması* ve *analitik ispat şemasıdır*. Bu şemalara ilişkin özet açıklamalar aşağıdadır:



**Şekil 4. İspat Şemaları (Harel & Sowder. 1998. s. 245)**

1) *Dışsal İspat Şeması*: Bu ispat şemasındaki öğrenciler, matematikte öğrendikleri kavramların doğruluğunu kitap, öğretmen veya başka insanlar gibi dış etmenlere dayandırır. Dışsal ispat şemasındaki öğrenciler, matematiksel bir ifadenin geçerliğini tanımlamak için dışsal bir otoriteye güvenir. Bu durum, öğrencilerin matematiksel kavramların öğreniminde olumsuz etkiye neden olabilir. Öğrenciler, problemleri çözmek için sadece formülleri takip ettikleri zaman, keşfetme yerine kuralların ezberlenmesini öğrenirler. Ayrıca; bilginin kaynağının sadece öğretmen olduğu durumlarda, öğrencilerin matematiğe yönelik eleştirel düşünceleri ve matematiğe yönelik güvenleri de fazla gelişmez. Bu öğrenme alışkanlıklarının, *dışsal ispat şemalarının* formel yapısından kaynaklandığı düşünülmektedir. Dışsal ispat şeması, kendi içinde üç alt kategoriye ayrılır. Bunlar: Ritüel, otoriter ve sembolik ispat şemalarıdır.

i) *Ritüel İspat Şeması*: Öğrenciler, bir matematiksel ifadenin ve önermenin doğruluğundan ziyade görünüşünden etkilenirler. Kısacası, verilen bir matematiksel ifadenin ve önermenin ispatında, daha önceden bildikleri herhangi bir sembolik ifadenin veya formülün olmaması, öğrenciler açısından bu matematiksel ifadenin geçerli olup olmadığına ve ispata benzemediğine yönelik bir şüphenin oluşmasına neden olabilir. Bu şemadaki öğrenciler, iddianın doğruluğunu akıl yürüterek değil önceden öğrendikleri doğruları öne sürerek göstermeye çalışırlar. İspatla ilgili sıklıkla tekrarlanan bir işlemsel şablonu ezberleyen ve ispat sürecini bu şablona göre biçimlendiren öğrenci bu ispat şemasına sahiptir. Üniversite öğrencilerinin, lisede çift kolonlu ispat formatını gördükleri için ispat olarak sadece bu ispat formatını kabul etmeleri buna örnek olarak verilebilir (Harel ve Sowder, 1998).

ii) *Otoriter İspat Şeması*: Öğrenciler, matematiği içsel doğrulama gerektirmeyen bir ders olarak görürler. Öğrenciler için bir ispata ikna olmada ispatın yapılışına ilişkin sorulardan ziyade öğretmenin söylediği bir söz veya ders kitaplarında bulunan bir ifade daha önemli olabilir. Bu şemadaki öğrenciler, verilen teoremin, ispatın veya formülün neden doğru olduğunu sorgulamazlar. Çünkü; teoremin, ispatın ve formülün bir kitapta yer alması veya öğretmen tarafından sunulması öğrenciler için yeterlidir (Harel ve Sowder, 1998).

iii) *Sembolik İspat Şeması*: Sembolik mantık aracılığıyla ispatlanan bir matematiksel ifade ve önermenin şemasını ifade etmektedir. Sembolik mantığın temel özelliği, verilen problemin ilk olarak anlamını kavramadan, yani problem durumunun birbiriyle ilişkili kavramlarını dikkate almadan problemin çözümüne odaklanmasıdır. Bu ispat şemasına sahip olan öğrenciler, çoğunlukla matematiksel terim ve sembollerin anlamını tam olarak bilmediklerinden dolayı, matematiksel sembol, tanım ve işlemleri anlamlarından uzak ve hatalı olarak kullanırlar. Örneğin,  $2^5 \cdot 2^3 = 4^{15}$  veya  $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$  vb. (Harel ve Sowder, 1998).

2) *Deneysel İspat Şeması*: Bu tür ispat şemasında; duyuşsal birikimler veya fiziksel olguların etkisiyle incelenen önermeler ve varsayımlar geçerli olabilir, şüpheli görülebilir veya ret edilebilir. Bu ispat şemasının iki çeşidi vardır. Bunlar: Tümevarımsal ispat şeması ve algısal ispat şemasıdır.

i) *Tümevarımsal İspat Şeması*: Bu ispat şeması, örnekler üzerine kurulu olup ispatlar genellikle örneklere dayandırılmaktadır. Öğrenciler, niceliksel bir

değerlendirmeye bir veya daha fazla özel durum için bir önermenin ve varsayımın doğruluğu hakkında kendilerini ve başkalarını ikna etmeye çalışırlar. Yani, ispat sürecinde üzerinde çalışılan kümenin sınırlı sayıdaki elemanı için doğrulama yapan bir öğrenci buradan elde ettiği çıkarımla kümenin tümü için bir genellemeye varabilir.

b) *Sezgisel İspat Şeması*: Öğrenciler, basit çizimler veya sezgileri yardımıyla iddianın doğruluğunu açıklamaya çalışırlar. Bu ispat şemasındaki öğrenciler, hisleriyle bir durumun doğru olduğunu sezebilirler ancak burada güçlü bir delil ortaya koyamazlar.

3) *Analitik İspat Şeması*: Bu ispat şeması, tümdengelimci ispat şeması olarak da ele alınabilir (Harel ve Sowder, 2007) ve mantıksal tümdengelimci araçlarla varsayımların geçerliğini belirlemeyi ifade eder. Dönüşümsel ispat şeması ve aksiyomatik ispat şeması olmak üzere iki alt kategorisi vardır.

i) *Dönüşümsel İspat Şeması*: Dönüşüme dayalı gözlemler, nesnelere üzerinde işlemleri ve işlemlerin sonuçlarının tahmini içerir. Bu işlemler, amaç eğilimlidir ve belirli değiştirilemez ilişkilerin terk edilmesi amacıyla gerçekleştirilir. Fakat bir değişim olduğu zaman, gözlemci bu değişimi tahmin etmeye ve değişimi telafi edebilecek işlemleri uygulamaya çalışır. Bu şemaya sahip öğrenciler, özel örnekler yerine değişkenler ve oluşumlar üzerinde yapılan özel değişiklikler sonucu genellemelere ulaşabilirler. Bu şemadaki öğrenciler, ispatlama sürecinde hem tümevarımsal hem de tümdengelimli muhakeme sürecini kullanırlar. Dönüşümsel ispat şeması da, kendi içinde üç alt ispat şemasına ayrılır. Bunlar:

i1) *İçselleştirilmiş İspat Şeması*: Bu ispat şeması; varsayımları, bir heuristik ispat yönteminin içine olgulara dönüştürerek entegre etmeye çalışan dönüşüme dayalı bir ispat şemasıdır.

i2) *Öz-İçselleştirilmiş İspat Şeması (Matematiksel Tümevarım Durumu)*: Bu ispat şeması; öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarının farkına varmalarını ve üzerinde derinlemesine düşünmelerini sağlar. İspat şemasına ilişkin farkındalık ise genellikle öğrencilerin diğer öğrencilerle şemayı tanımladıklarında, başka şemalarla karşılaştırdıklarında veya bu şemaya ilişkin örnekleri kullanabildiklerinde/kullanamadıklarında gözlemlenebilir.

i3) *Kısıtlayıcı İspat Şeması*: Bazı öğrenciler, üzerinde çalışılan önermenin ve varsayımın içeriği, doğrulama süreçlerinin genellenmesi veya doğrulama süreçlerindeki belirli kısıtlamalara ilişkin dönüşümsel düşünme yeteneğine sahip

olabilirler. Buna göre, bu kısıtlamaların her birini içeren bir dönüşümsel ispat şeması, kısıtlayıcı ispat şeması olarak adlandırılır ve kısıtlamanın çeşidine bağlı olarak, içeriğe dayalı, genel (özel bir içerikte) ve yapısal ispat şemaları olmak üzere üç alt kategoride ele alınabilir.

*ii) Aksiyomatik İspat Şeması:* Öğrenciler, bir matematiksel ifadenin ve önermenin doğrulama süreçlerini kısmen anlamaya başladıkları zaman, tanımsız terimlerin ve aksiyomların kökenlerini ve özelliklerini araştırmalıdır. Bu şemaya sahip öğrenciler, doğrulama sürecinde aksiyomatik sisteme dikkat ederler ve tümdengelimli çıkarımlar gerçekleştirerek formel bir ispat ortaya koyarlar. Bu düzeydeki öğrenciler, *aksiyomatik ispat şemasına* sahip öğrenciler olarak düşünülebilir. Aksiyomatik ispat şeması da üç alt ispat şemasına ayrılır.

*ii1) Sezgisel-Aksiyomatik İspat Şeması:* Öğrencilerin, nokta ve doğru gibi tanımsız terimler, kare ve çember gibi tanımlı terimler, aksiyomlar ve teoremler vb. arasındaki farklılıkları bilmesi ve aralarındaki ilişkileri açıklaması durumudur.

*ii2) Yapısal İspat Şeması:* Bu ispat şeması, aksiyomların bir topluluğunun karakterize ettiği ortak bir yapıyı anlayabilmek için farklı durumlara ilişkin teoremlerin ve varsayımların düşünülmesini içerir.

*ii3) Aksiyom Kurma İspat Şeması:* Yapısal ispat şeması, aksiyom kurma şeması için bir bilişsel ön gerekliliktir. Bu şemaya sahip öğrenciler, belirli bir alanda aksiyomlar oluşturabilir ve aksiyomlar kümesinin çeşitliliğini araştırabilirler.

Matematiksel akıl yürütmenin temelinde analitik ispat şemaları bulunduğu için dolaylı olarak, öğrencilerin dışsal ve deneysel ispat şemalarını kullanmaları çok fazla istenilmemektedir. Bunun yanında, bu iki şemanın kullanılmasının olumlu yönleri de bulunmaktadır. Dışsal ispat şemalarından otorite ispat şemaları özellikle öğrencilerin bilmediği bir konuda örnekleme yapmalarında kullanılabilir. Bunun yanında, deneysel ispat şemaları da konuyla ilgili örnek ve aksi-örneklerin öğrencilerin düşüncelerinin ortaya çıkarılmasında etkilidir. Analitik ispat şemaları ise bu iki şemaya göre daha üst düzey ispat şemaları olup, öğrencilerin daha fazla kullanmaları beklenen şemalardır. Ülkemizde yapılan çalışmalarda ispat şemalarının sınıf düzeyiyle ilişkili olduğu ve sınıf düzeyi arttıkça ispat şemalarından en üst düzey olan analitik ispat şemalarına doğru bir artışın olduğu (bkz. İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu Aydoğdu ve Baki, 2011) belirlenmiştir. Bunun yanında, bazı çalışmalarda (bkz. Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) ise ülkemizdeki öğretmen adaylarının ispat şemalarının daha çok dışsal ve deneysel olduğu da tespit edilmiştir.



2005 yılından itibaren matematik öğretim programlarımızda yer alan akıl yürütme, eleştirel düşünme, problem çözme, çıkarım yapma gibi birçok üst düzey becerinin geliştirilmesi, programların temel hedefleri arasındadır. Bu becerinin geliştirilmesinde öğrencinin öğrenme sürecine aktif olarak katılması önemlidir. Geleneksel sınıflarda matematik konularının öğretiminde; öğretmenler, öğrencilerin matematiksel ispatları kendilerinin oluşturmalarına veya sorgulamalarına fırsat vermeden doğrudan öğrencilere sunmaktadır. Bu durum, öğrencilerin öğrenme sürecinde pasif alıcı konumunda olmasına neden olmaktadır. Oysa ispatlar ve teoremler, matematik yapmanın bir parçasıdır (Harel ve Sowder, 1998). Öğrencilerin ispat sürecinde kullandıkları ispat şemaları ise öğrencilerin düşüncelerini yansıttığından dolayı aynı zamanda öğrencilerin kavram yanılgılarını da ortaya koymaktadır. Bu bağlamda, öğretim programları ile öğrencilerin ispatlama süreçleri ve ispat şemaları arasında yakın bir ilişki vardır.

### **Matematik Müfredatları ve İspat Kavramı**

Matematiksel ispat kavramının öğretimi ve anlaşılması noktasında, matematik eğitimcilerinin, matematik öğretmenlerinin ve matematik müfredatlarının sorumluluğu oldukça fazladır. Zira matematik eğitimcileri ve öğretmenleri; öğrencilerin, matematiksel ispatın rolünü ve amacını anlamasına yardımcı olmak gibi önemli bir yükümlülüğe sahiptir. Bu nedenle matematik eğitimcileri ve öğretmenleri, matematiksel ispat kavramının eğitim-öğretim ortamlarının her kademesindeki matematik müfredatlarında farklı şekillerde ve düzeylerde yer alması için öncülük etmelidir (Hanna vd., 2009). Zira matematiksel ispatlar aracılığıyla öğrencilere bazı eğitimsel ve matematiksel değerler de kazandırılabilir. Bu değerlerden bazıları şunlardır: (a) İspatlar, öğrencilerin matematiksel kavramları anlamasına ve geçerli mantıksal çıkarımlar sonucunda ulaşılan sonuçlara inanmalarına yardımcı olur, (b) İspatlar, bir kültürel ve toplumsal miras olarak ele alınabilir ve öğrenciler, bir matematiksel ifade ve önermenin ispatını yaparken kendilerini bu ispatı yapan kişinin yerine koyabilirler, (c) İspatlar, matematikçilerin ne yaptıklarını ortaya koyarken, öğrenciler için de matematikçilerin ne yaptıklarını görme imkânı sağlarlar. Bu durum öğrencilerin, matematiğe katkı yapan uygarlıklara, kültürlere ve matematikçilere saygı duymalarına neden olabilir, (d) Bazı ispatlar, estetik ve güzeldir. Bu tür ispatlar, öğrencilerde estetik ve güzellik değerlerinin gelişimine katkı sağlayabilir ve (v) İspatlar, öğrencilerin karakterlerinin (sabırlı olma, ısrar etme vs.) gelişimine yardımcı

olabilir (Tucker, 1999). Matematiksel ispatların, çeşitli eğitim-öğretim kademelerine göre incelenmesi ise aşağıdadır:

### **Okul Öncesinde İspat**

Okul öncesi dönemindeki çocuklar, matematiksel mantıkta kullanılan araçların ve süreçlerin çoğuna sahip olmamalarına rağmen, matematiksel sonuçları bulmak ve bu sonuçların doğruluğuna ikna olmak için kendi yöntem ve yollarına sahiptirler. Bu düzeydeki çocuklar için; mantığın, örüntü tanıma ve sınıflama becerisi şeklinde iki temel elemanı vardır. Çocuklar, daha önceden kabul edilen olgulardaki tümdengelimsel mantığın bazı kısa zincirlerini, delillerini ve algılamalarının bir birleşimini kullanabilirler. Kendi perspektiflerinden, mantıksal ve savunulabilir fikirler öne sürebilir ve sonuçlara ulaşabilirler. Bu düzeydeki çocuklar, örneklerden hareketle genellemeler de yapabilirler. Bunun için öğretmenler, çocukların genelleme yapmaya uygunluklarını test etmek için örnekler ve aksi-örnekler vermelidirler (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

### **İlkokul ve Ortaokul Düzeyinde İspat**

İlkokulun (1- 4. sınıflar) özellikle 3. ve 4. sınıflarındaki öğrencilerin birçoğu, bir matematiksel ifade ve önermenin neyi içermesi gerektiğine yönelik bir fikir sahibi olmaya başlarlar. Bu düzeydeki öğrenciler, matematiksel ilişkiler hakkında fikirler üretebilir, bu fikirleri araştırabilirler ve çalışmalarına dayalı olarak çeşitli matematiksel argümanlar ileri sürebilirler. Bu öğrencilerden, matematiksel etkinliklerini doğrulamaları ve fikirlerini sunmaları beklenebilir. Bu düzeydeki öğrenciler için, önermelerin doğrulanması bir süreç içerisinde anlamlandırma ile gerçekleşir. Bu şekilde öğrenciler, matematiksel işlem ve kavramların özelliklerini anlama ve kavramlar ve işlemler arasındaki ilişkileri görme yetisi kazanırlar. Ancak bazen, bu düzeydeki öğrencilerin matematiksel özellikler ve ilişkiler hakkındaki fikirleri yanlış olabilir. Matematiksel mantık, herhangi bir şeyin niçin doğru olmadığını anlamaya çalışır ve bu içerikte aksi-örnekler kullanılmaya başlanmaz. Bu yanlış fikirler, matematiksel tartışmalar ve keşifler için önemli fırsatlar sağlayabilir. Örneğin; bir öğrenci, “Bir kesrin hem payı hem de paydası, başka bir kesrin sırasıyla payı ve paydasından daha büyük ise o zaman ilk kesir, ikinci kesirden daha büyüktür.”

şeklinde bir önerme söyleyebilir. Bu önerme  $\frac{3}{4}$  ile  $\frac{1}{2}$  veya  $\frac{6}{4}$  ile  $\frac{2}{3}$  kesir çiftleri için doğrudur. Fakat bu önerme üzerinde dikkatli düşünüldüğü zaman, öğrenciler burada bir aksi-örnek bulabilirler. Örneğin,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{2}$ 'den büyük değildir ve  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{1}{2}$ 'den küçüktür. Bu durum, öğrencilerin özel örneklerden bir genellemeye ulaşılmasının her zaman mümkün olmadığını görmelerine ve mevcut kavram yanlışlarının tespit edilmesine yardımcı olabilir.

Ortaokuldaki öğrenciler ise matematiksel ifade ve önermeleri formüle etmek için, tümdengelimli ve tümevarıma dayalı mantığı kullanarak ve kendi önermelerini ve fikirlerini ayrıntılı bir şekilde değerlendirerek, mantıksal becerilerini genişletebilir ve kuvvetlendirebilirler. Bu düzeydeki öğrenciler; matematiksel ifade ve önermelerini, matematik öğretmenlerine ve sınıf arkadaşlarına savunabilmelidirler. Bunun yanında, kendi öğrenme ortamlarının dışındaki kişilere de, kendi matematiksel ifade ve önermelerini tartışabilmelidirler. Bu düzeydeki öğrenciler, örüntüler aracılığıyla matematiksel ilişkileri araştırmak için tümevarıma dayalı mantığı da kullanabilirler. Bu düzeydeki matematiksel argümanlar, matematiksel ispatlarla sıklıkla ilişkilendirilen biçimcilik (formalizm) yönünden eksiklikler göstermesine rağmen, ispatların; makul bir fikir sunma, sunulan fikrin testi ve başkalarının değerlendirmesi için ilişkili mantıksal açıklamalar yapabilmeyi içeren birçok önemli özelliğine sahiptir.

Ülkemizde, 2005 yılında yenilenen İlköğretim Matematik (6,7 ve 8. Sınıf) Dersi Müfredatı'nda (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2009), öğrencilerin matematik yaparken akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi için ortamlar hazırlanması gerektiği tavsiye edilmiş ve bu bağlamda öğrencilere şu becerilerin kazandırılması önerilmiştir: "Öğrenme sürecinde akıl yürütmeyi kullanır, yaşantısında, diğer derslerde ve matematikte akıl yürütme becerisini kullanır, matematik öğrenirken genellemeler ve çıkarımlar yapar, matematikteki ve matematik dışındaki çıkarımlarının doğruluğunu savunabilir, yaptığı çıkarımların, duygu ve düşüncelerinin geçerliliğini sorgular, akıl yürütmede öz güven duyar ve akıl yürütme ile ilgili olumlu duygu ve düşüncelere sahip olur." (s.17). İspat kavramından ise öğrencilerin matematik performanslarını ölçmek için verilecek araştırma ödevleri veya projeler kısmında "matematiksel ispatlar" (s.109) başlığı altında bahsedilmiştir. Bu bağlamda; öğrencilere, "Pythagoras (Pisagor) bağıntısının farklı ispatları ile ilgili araştırmalar yapınız." (s. 325) şeklinde bir araştırma ödevi veya proje verilmesi önerilmiştir. Benzer şekilde, Ülkemizde en son

yenilen Ortaokul Matematik Müfredatı'nda da (2013, s.V), öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesine vurgu yapılmış ve bu kapsamda dikkate alınması gereken bazı göstergeler özetlenmiştir. Bu göstergelerden bazıları, çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma, mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma, bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanmadır.

### **Lise Düzeyinde İspat**

Matematik, yöntem ve sonuçları dikkate alındığında olgulardan ziyade mantıksal çıkarımlara dayanır. Bir matematikçi, algıladığı ilişkiyi açıklamaktan ziyade kesinliğe ulaşmayı amaçlar. Fen bilimlerinde, gözlemin konusu genel anlamda ispattan ziyade ilişkileri açıklamaktır. Matematiksel doğruluk ise olgusalıktan ziyade mantıksal süreçleri önceler. Mantıksal doğruluk, kavramsal nitelikli olduğundan içeriğe değil biçime bağlıdır. Bu nedenle, matematiksel uygulamalar üst düzey düşünme becerisi gerektirir. Matematiksel çalışma, kavram ve kavramsal yapıların inşasını ve bu inşa içinde sınıflandırma ve genelleme yapmaya yönelik çalışmalar yapılmasını içerir. Bu sınıflandırma ve genelleme yaklaşımı ise tümevarım ve tümdengelimci düşünme süreçlerinin ifadesidir (MEB, 2005, s. 5-6). Bu bağlamda; lise düzeyindeki öğrenciler, ispat ve mantığın yöntemlerine artan bir düzeyde sahip olmalı ve açıklamalarının/önerilerinin kabulü için daha güçlü standartlar belirlemelidirler. Bu düzey için; mantık ve ispat, müfredatta belirli zamanlar veya belirli konular için yapılan belirli etkinlikler değildir. Aksine mantık ve ispat, çalışılan ve öğrenilen konunun ne olduğuna bakılmadan sınıf tartışmalarının sürekli ve doğal bir parçası olmalıdır. Matematiksel açıdan etkili ve verimli sınıf ortamlarında, öğrencilerden sonuçlarını doğrulamaları ve bunlara ilişkin açıklamalar yapmalarını beklenmelidir. Bir matematik dersinde, “Ne yaptın?”, “Nasıl buldun?” veya “Niçin bu anlamlıdır?” gibi sorularla karşılaşan öğrenciler, düşüncelerini açıklayabilmeli, matematiksel mantığın yüksek kalitesi için standartlar geliştirebilmeli ve öğrenmek için yeni yollar arayabilmelidirler. Bu düzeydeki öğrencilerden, ispat yöntemlerini ve tekniklerini kullanabilmeleri de beklenmektedir (NCTM, 2000). Bu bağlamda, Ülkemizde en son yenilenen Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programında da, öğrencilerde geliştirilmesi beklenen matematiksel süreç becerileri arasında, matematiksel akıl yürütme ve ispat yapma becerisi üzerine vurgu yapılmıştır. Bu kapsamda; öğrencilere, matematiksel doğrulama sürecinde

tümevarımı ve tümdengelimci düşünme yöntemlerini etkin olarak kullanabilme ve matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçebilme becerisinin kazandırılması istenmiştir (MEB, 2013; s.VIII).

### **Üniversite Düzeyinde İspat**

Üniversite düzeyindeki ispatlar, hem önceki teoremleri ve formel tanımları kullanmayı hem de anlama kadar üretici ve derin düşünme ile kavramayı da içermelidir. İspatlar, daha önceki eğitim-öğretim düzeylerinden çok daha karmaşık, formel ve uzun olmalıdır. Bu düzeydeki öğrencilerin, ispatları anlamaları ve inşa edebilmeleri için bazen açık öğretilerle desteklenmeleri gerekebilir. Bu noktada öğretmenler, öğrencilerin anlama düzeylerini değerlendirmenin bir aracı olarak, daha önce bahsedilen ispat şemalarını kullanabilirler. Fakat, üniversite düzeyinde öğrencilerin ispatları nasıl anladıkları ve inşa ettiklerine ilişkin birçok soru da cevaplanmayı beklemektedir (Hanna vd., 2009). Zira, üniversite düzeyindeki matematik derslerinde matematiksel ispat kavramı merkezi bir konumda olmasına rağmen, yapılan araştırmalar bu düzeydeki bazı öğrencilerin ispatın neyi içerdiğini ve nasıl geliştirildiğini anlamakta yetersiz kaldıklarına işaret etmektedir (Jones, 2000).

### **Sonuç**

Her çeşit bilimsel araştırmada, yeterli delile dayanmayan hiçbir öneri, teori vb. doğru olarak kabul edilmemektedir. Fen bilimleri gibi alanlarda bir iddianın doğruluğunun kabulünde, deneyler veya sistematik gözlemler büyük bir öneme sahip iken matematikte durum biraz farklılaşmaktadır. Matematikte, bir ifadenin ve önermenin doğruluğunun gösterilmesi ve kabul edilmesindeki yegâne araç, bu ifadenin ve önermenin ispatlanmasıdır. Matematiksel ispat, önermeler arasındaki ilişkilere dayanan mantıksal bir çıkarımdır. Yani matematiksel ispat, en genel anlamda bir ifadenin ve önermenin doğruluğunun, önceden bilinen bir veya daha fazla önermeyle ilişkilendirilip mantıksal bir takım çıkarımlar yardımıyla gösterilmesidir. Bu nedenle ispat kavramı, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin gelişiminde ve matematiksel bilgilerinin oluşumunda önemli bir role sahiptir. Bu bağlamda; Ülkemizde yenilenen Matematik Dersi Öğretim Programları'nda da ispat kavramının önemine vurgu yapılmış ve matematik öğretmenlerinden, öğrencilerin farklı düşünme ve ispat yapma becerilerini geliştirmelerine yardımcı olacak etkinlikler sunmaları, farklı ispat tekniklerini

öğretmeleri ve ispatların, matematikteki önemine vurgu yapmaları istenmiştir. Bu bağlamda; matematik derslerinde ispat kavramının öğretimine, müfredatların ve öğretmenlerin bu süreçteki rolünün belirlenmesine yönelik çalışmalar, araştırılmayı bekleyen konular olarak burada durmaktadır.

### Kaynaklar

- Albert, D. & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In: Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Alsina, C. & Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(1), 118-127.
- Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. In P. Boero (Ed.), (pp. 27-42). *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers. Rotterdam, The Netherlands.
- Barendregt, H., & Wiedijk, F. (2005). The challenge of computer mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 363, 2351-2375.
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* 7, 23–40.
- Benson, D. C.(2000). *The Moment of Proof: Mathematical Epiphanies*. Oxford University Press. New York.
- CadwalladerOlsker, T. (2011). What Do We Mean By Mathematical Proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33- 60.
- de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Dede, Y. (2013). Matematikte İspat: Önemi, Çeşitleri ve Tarihsel Gelişimi (ss.15-34). İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Eds.) Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar. Ankara: Pegem Akademi.
- Detlefsen, M. (2008). Proof: Its nature and significance. In Gold, B. And Simons, R. A., editors, *Proof and Other Dilemmas:Mathematics and Philosophy*, (pp. 61-77). Mathematical Association of America, Washington,

- Hanna, G. & Jahnke, H.N. (1996) Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 877–908.
- Hanna, G. (2000a). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5- 23.
- Hanna, G. (2000b). Proof and its classroom role: A survey. In M.J. Saraiva et al (Eds.), *Proceedings of Conference en el IX Encontro de Investigaçao en Educaçao Matematica* (pp. 75 -104). Funado.
- Hanna, G. (2002). Mathematical proof. In: Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, Kluwer, Dordrecht.
- Hanna, G. (2007). The Ongoing Value of Proof. In Boero, P. (Ed.), *Theorems in schools: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice to Classroom Practice* (pp. 3-18). Rotterdam: Sense Publishers.
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2002). What is proof? In Baigrie, B. (Ed.), *History of Modern Science and Mathematics*. (pp.36- 48.), vol. 1, New York: Charles Scribner's Sons.
- Hanna, G. & Sidoli, N. (2007). Visualization and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 73-78
- Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H.N., Lin, F.L., Selden, A., Tall, D. & Yevdokimov, O. (2009). Discussion Document. In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the 19th International Commission on Mathematical Instruction: Proof and Proving in Mathematics Education* (vol. 1). National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan: ICMI Study Series 19, Springer.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. *Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. III*. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), AMS, 234-283.
- Harel, G., & Sowder, L (2007). Toward comprehensive perspectives on learning and teaching proof, In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (2nd Ed.). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* London: Jonathan Cape.
- İskenderoğlu, T. (2010). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları. Yayınlanmamış doktora Tezi. Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- İskenderoğlu Aydoğdu, T. & Baki, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin nicel analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 11(4), 2275-2290.
- Jones, K.(2000).The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53- 60.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005). *Matematik Dersi 9–12. Sınıflar, Öğretim Programı ve Kılavuzu*, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2009). *İlköğretim Matematik Dersi 6–8. Sınıflar, Öğretim Programı ve Kılavuzu*, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul Matematik Dersi (5,6,7 ve 8.Sınıflar) Öğretim Programı*, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11ve 12.Sınıflar) Öğretim Programı*, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA.
- Nelsen, R. B. (2000). *Proofs without Words II:More Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America.
- Polster, B. (2004).Q.E.D. *Beauty in mathematical proof*. Walker Publishing Company, New York.
- Reid, D. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense
- Reis, K.& Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 34 (1), 29- 35.



- Sangalli, A. (1991). The burden of proof is on the computer. *New Scientist*, 129(1757), 38-40.
- Sarı, M., Altun, A. & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40(2), 295-319.
- Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, Kluwer, Dordrecht.
- Türk Dil Kurumu [TDK].(2005). *Türkçe Sözlük*. Türk Dil Kurumu Yayınları: 549, Türk Dil Kurumu, 4. Akşam Sanat Okulu Matbaası, Ankara.
- Uygan, C., Tanışlı, D. & Köse, N.Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtlardaki değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5(2), 137- 157.